1) Dato il poliedro

$$\begin{aligned} x_1 + 2\,x_2 + x_3 \qquad\quad + x_5 &= 4 \\ x_2 \qquad + 2\,x_4 + x_5 &= 4 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0 & \end{aligned}$$

se ne determini la dimensione. Si calcolino tutti i vertici ed in genere tutta la struttura delle facce. Una delle diseguaglianze non definisce una faccetta. La si individui e si dimostri che può essere omessa dalla rappresentazione del poliedro.

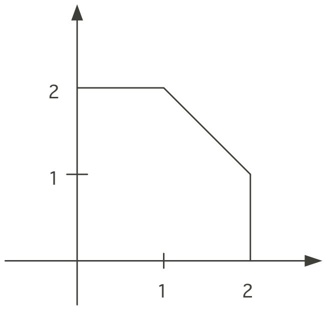
Soluzione: le due righe sono linearmente indipendenti. Quindi la dimensione è minore o uguale a 3. Si assegnino valori positivi sufficientemente piccoli a x_5, x_3 e x_2. Si ottengono così valori positivi per x_1 e x_4. Quindi la dimensione è 3.

Per il calcolo dei vertici si tratta di calcolare tutte le possibili terne $x_i = x_j = x_k = 0$. Si ottiene $(2,3,5) \to (4,0,0,2,0)$; $(2,3,4) \to (0,0,0,0,4)$; $(1,3,5) \to (0,2,0,1,0)$; $(1,3,4) \to (0,0,0,0,4)$; $(1,2,5) \to (0,0,4,2,0)$; $(1,2,4) \to (0,0,0,0,4)$; $(1,2,3) \to (0,0,0,0,4)$. Altre terne non danno luogo a soluzioni ammissibili. I vertici sono allora quattro: $V_1 = (4,0,0,2,0)$, $V_2 = (0,0,0,0,4)$, $V_3 = (0,2,0,1,0)$, $V_4 = (0,0,4,2,0)$. Gli spigoli sono costituiti dai segmenti che congiungono i vertici e che, al loro interno, hanno valore nullo per esattamente due coordinate. Quindi (V_1, V_2), (V_1, V_3), (V_1, V_4), (V_2, V_3), (V_2, V_4), e (V_3, V_4) sono spigoli (tutte le coppie di vertici, si tratta di un tetraedro quindi). Per le faccette bisogna trovare se esistono punti con $x_i = 0$ per un certo i e $x_j > 0$ per $j \neq i$. È immediato trovare tali valori, di volta in volta per $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0$ e $x_5 = 0$ che quindi sono diseguaglianze definenti faccette. Invece per x_4 si noti che $x_4 = 0$ implica $x_1 + x_2 + x_3 = 0$ e quindi $x_1 = x_2 = x_3 = 0$ da cui $x_4 \geq 0$ non può definire una faccetta.

Il vincolo $x_4 \geq 0$ è quindi ridondante perché implicato già dagli altri vincoli. A questo punto, la seconda uguaglianza può essere scritta come $2\,x_4 = 4 - x_2 - x_5 \geq 0$, diseguaglianza sempre soddisfatta. Quindi, se togliamo la variabile x_4 (cioè proiettiamo nello spazio delle variabili x_1, x_2, x_3, x_5) la seconda delle due disequazioni diventa ridondante e la proiezione del poliedro (ancora tridimensionale) è data da

$$\begin{aligned} & x_1 + 2\,x_2 + x_3 + x_5 = 4 \\ & x_1, x_2, x_3, x_5 \geq 0 \end{aligned}$$

2) si determini una funzione convessa $R^2 \to R$ con dominio effettivo solo l'ortante positivo, che sia positivamente omogenea, cioè $f(\alpha\, x) = \alpha\, f(x)$, $\alpha \geq 0$, e che abbia valore 1 sulla linea spezzata indicata in figura, (segmenti: (0,2)–(1,2); (1,2)–(2,1); (2,1)–(2,0))



Soluzione: si scriva in generale $f(x) = \max_k \{a_k\, x + b_k\}$. Dovendo f essere positivamente omogenea si deve avere $b_k = 0$. L'insieme contenuto dentro la spezzata è dato da $x_2 \leq 2$, $x_1 + x_2 \leq 3$, $x_1 \leq 2$. Per poter avere $a_k\, x \leq 1$ per ogni k, bisogna riscrivere $x_2/2 \leq 1$, $x_1/3 + x_2/3 \leq 1$, $x_2/2 \leq 1$. Quindi $f(x) = \max\{x_1/2\ ;\ (x_1 + x_2)/3\ ;\ x_2/2\}$ sul dominio effettivo e in generale

$$f(x) = \begin{cases} \max\{x_1/2\ ;\ (x_1+x_2)/3\ ;\ x_2/2\} & \text{se } x_1 \geq 0 \text{ e } x_2 \geq 0 \\ +\infty & \text{altrimenti} \end{cases}$$

3) Siano dati n punti su una retta di coordinate a_i. Trovare il punto x che minimizza $\sum_{i=1}^n |x - a_i|$ usando le proprietà delle funzioni convesse. Generalizzando, siano dati n punti nel piano di coordinate $a^i = (a_1^i, a_2^i)$. Trovare il punto (o i punti) x che minimizza $\sum_{i=1}^n ||x - a^i||_1$.

Soluzione: Sia $a_1 \leq a_2 \leq \ldots \leq a_n$. Se $x \neq a_i$, $\forall i$, la funzione $\sum_{i=1}^n |x - a_i|$ è differenziabile e la sua derivata vale $|\{i : x > a_i\}| - |\{i : x < a_i\}|$. Se $n = 2\,m$ è pari allora la derivata è nulla per tutti i punti $\{x : a_m < x < a_{m+1}\}$ (insieme non vuoto se $a_m < a_{m+1}$). Se invece $n = 2\,m + 1$ è dispari non esistono punti $x \neq a_i$ di derivata nulla e quindi minimi.

Se $x = a_j$ per un certo j allora la funzione non è differenziabile e il suo subdifferenziale vale (supponendo $a_{j-1} \neq a_j$, $a_j \neq a_{j+1}$)

$$[-1, 1] + (n - j) - (j - 1) = [n - 2\,j, n - 2\,j + 2]$$

Quindi il minimo si ha se $n - 2\,j \leq 0 \leq n - 2\,j + 2$ cioè $n/2 \leq j \leq n/2 + 1$ ovvero

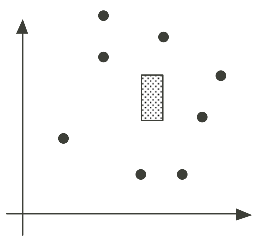
$$\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil \leq j \leq \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + 1$$

Se $n = 2\,m$ è pari allora sia $x = a_m$ che $x = a_{m+1}$ sono minimi. Se invece $n = 2\,m+1$ è dispari solo $x = a_{m+1}$ è minimo.

Per risolvere il problema più generale basta notare che

$$\min \sum_{i=1}^n ||x - a^i||_1 = \min \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^p |x_j - a_j^i| = \min \sum_{j=1}^p \sum_{i=1}^n |x_j - a_j^i| = \sum_{j=1}^p \min \sum_{i=1}^n |x_j - a_j^i|$$

e quindi si tratta di risolvere p volte (con p dimensione dello spazio) il problema precedente. Si veda in figura un esempio (i minimi corrispondono all'area tratteggiata)



4) Sia data

$$f(x,y) = \max\left\{x^2+y^2\ ;\ x^2-2\,y+3\ ;\ y^2-2\,x+3\right\} = \max\left\{g_1(x,y)\ ;\ g_2(x,y)\ ;\ g_3(x,y)\right\}$$

Si determini se la funzione è convessa e si calcoli il minimo sfruttando le condizioni differenziali.

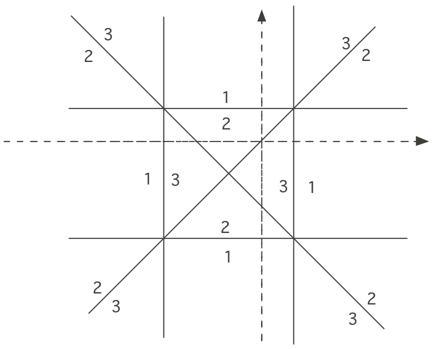
Soluzione: La funzione f è convessa perché le g_i sono convesse (immediato dagli Hessiani). I punti dove la funzione non è differenziabile appartengono solo ai seguenti insiemi:

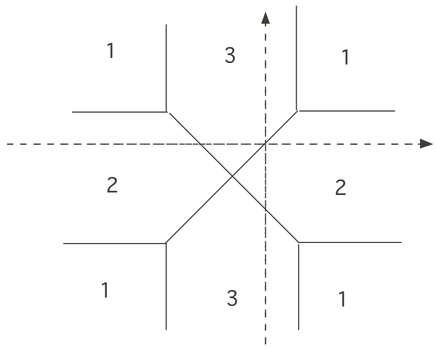
$$A := \left\{(x,y) : x^2+y^2 = x^2-2\,y+3\right\} \quad\Longrightarrow\quad A = \{(x,y) : y=1\} \cup \{(x,y) : y=-3\}\,,$$

$$B := \left\{(x,y) : x^2+y^2 = y^2-2\,x+3\right\} \quad\Longrightarrow\quad B = \{(x,y) : x=1\} \cup \{(x,y) : x=-3\}\,,$$

$$C := \left\{(x,y) : x^2-2\,y+3 = y^2-2\,x+3\right\} \quad\Longrightarrow\quad C = \{(x,y) : x=y\} \cup \{(x,y) : x+y+2=0\}\,.$$

Gli insiemi A, B e C sono rappresentati in figura insieme all'indicazione di quale g_i prevale fuori dall'insieme. Le regioni in cui prevale una sola funzione sono indicate nell'altra figura, dove sono evidenziati i punti di non differenziabilità.





I gradienti delle tre funzioni sono

$$Dg_1 = \begin{pmatrix} 2\,x \\ 2\,y \end{pmatrix}, \qquad Dg_2 = \begin{pmatrix} 2\,x \\ -2 \end{pmatrix}, \qquad Dg_3 = \begin{pmatrix} -2 \\ 2\,y \end{pmatrix}.$$

Quindi la funzione non ha un minimo all'interno delle regioni di differenziabilità. Dove $f(x,y) = g_1(x,y) = g_2(x,y)$ il subdifferenziale è dato da

$$\operatorname{conv}\{Dg_1, Dg_2\} = \begin{pmatrix} 2\,x \\ \operatorname{conv}\{2\,y\,,\ -2\} \end{pmatrix} \not\ni 0$$

Analogamente dove $f(x,y) = g_1(x,y) = g_3(x,y)$ il subdifferenziale è dato da

$$\operatorname{conv}\{Dg_1, Dg_3\} = \begin{pmatrix} \operatorname{conv}\{2\,x\,,\ -2\} \\ 2\,y \end{pmatrix} \not\ni 0$$

Dove $f(x,y) = g_2(x,y) = g_3(x,y)$ il subdifferenziale è dato da

$$\operatorname{conv}\{Dg_2, Dg_3\} = \operatorname{conv}\left\{\begin{pmatrix} 2\,x \\ -2 \end{pmatrix}\ ;\ \begin{pmatrix} -2 \\ 2\,y \end{pmatrix}\right\}$$

Per vedere se $0 \in \operatorname{conv}\{Dg_2, Dg_3\}$ calcoliamo α tale che

$$\begin{pmatrix} 2\,x \\ -2 \end{pmatrix} \alpha + \begin{pmatrix} -2 \\ 2\,y \end{pmatrix} (1-\alpha) = 0 \Longrightarrow \begin{pmatrix} 2\,x+2 \\ -2-2\,y \end{pmatrix} \alpha = \begin{pmatrix} 2 \\ -2\,y \end{pmatrix} \Longrightarrow$$

$$\alpha = \frac{1}{x+1} = \frac{y}{1+y} \Longrightarrow \frac{1}{x+1} = \frac{y}{1+y} \Longrightarrow x\,y = 1$$

Inoltre deve essere $x \geq 0$, $y \geq 0$ (affinché $0 \leq \alpha \leq 1$). Inoltre solo la componente di C dove $x = y$ soddisfa questo requisito. L'unica soluzione è $x = y = 1$ dove $f = g_1 = g_2 = g_3$ e dove

$$\partial f_{1,1} = \operatorname{conv}\left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} \; ; \; \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix} \; ; \; \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \end{pmatrix} \right\} \ni 0$$

e quindi $(1,1)$ è minimo.

5) Si consideri il problema di massimizzare $f(x)$ concava usando l'iterazione

$$x^{k+1} = x^k + \frac{\hat{f} - f(x^k)}{\gamma_k^T \gamma_k} \gamma_k$$

dove γ_k è un subgradiente di f in x^k e $\hat{f}$ è una sottostima del valore ottimo f^* (cioè $\hat{f} < f^*$). Che risultati di convergenza si possono trarre?

Soluzione Si consideri la funzione $\tilde{f}(x) = \min\left\{f(x), \hat{f}\right\}$. Se $f(x) < \hat{f}$ i subdifferenziali di f coincidono con quelli di $\tilde{f}$. Siccome $\hat{f}$ è valore ottimo di $\tilde{f}$, l'iterazione data converge verso punti x tali che $f(x) \geq \hat{f}$.

6) Si considerino i due sistemi

$$\begin{aligned} \sum_i a_{ij}\, y_i &= 0 \qquad \forall j \\ \sum_i y_i &= 1 \\ y_i &\geq 0 \qquad \forall i \end{aligned} \tag{1}$$

e

$$\sum_j a_{ij}\, x_j < 0 \qquad \forall i \tag{2}$$

Una delle varianti del Lemma di Farkas afferma che il sistema (1) è ammissibile se e solo se il sistema (2) non è ammissibile. Si dimostri questa affermazione usando i risultati dell'analisi convessa applicati alla funzione

$$f(x) = \sup_i \sum_j a_{ij}\, x_j$$

Soluzione

Si consideri $f(0)$. Si ha $\partial f(0) = \text{conv}_i \{a_{ij}\}$. Il punto 0 è minimo se e solo se $0 \in \partial f(0)$. Quindi il sistema (1) è ammissibile (le variabili y_i sono coefficienti di una combinazione convessa) $\iff 0 \in \partial f(0) \iff 0$ è minimo $\iff$ non esiste x tale che $f(x) < 0 \iff \forall x,\ \sup_i \sum_j a_{ij}\, x_j \geq 0 \iff$ (2) è inammissibile.