Pareto ottimi per un problema di investimento

Sia C un capitale da investire. Sono a disposizione due opzioni. La prima ha un guadagno atteso del 5% e la seconda dell'8%. Tuttavia il secondo investimento presenta un rischio maggiore. Per valutare quantitativamente il rischio si supponga che il guadagno sia rappresentato dal valore atteso più una variabile casuale di valor medio nullo. Quindi, indicando con t_i il tasso medio, x_i il capitale da investire e r_i la variabile casuale, il guadagno di ogni opzione è $(t_i + r_i)\,x_i$. Complessivamente il guadagno è dato dalla variabile casuale

$$(t_1 + r_1)\,x_1 + (t_2 + r_2)\,x_2$$

ovvero dal valore atteso $t_1\,x_1 + t_2\,x_2$ più la variabile casuale a valore nullo $r_1\,x_1 + r_2\,x_2$. La varianza

$$E[(r_1\,x_1 + r_2\,x_2)^2]$$

di questa variabile casuale può rappresentare una valida misura del rischio. Possiamo scrivere

$$E[(r^T x)^2] = E[x^T r\, r^T x] = x^T E[r\, r^T]\, x$$

dove $E[r\, r^T] =: Q$ è la matrice di covarianza. Quindi si tratta di massimizzare la funzione

$$f_1(x_1, x_2) := t_1\,x_1 + t_2\,x_2$$

e di minimizzare la funzione

$$f_2(x_1, x_2) := \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_{11} & q_{12} \\ q_{12} & q_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = q_{11}\,x_1^2 + q_{22}\,x_2^2 + 2\,q_{12}\,x_1\,x_2$$

con il vincolo

$$x_1 + x_2 \le C, \qquad x_1 \ge 0, \qquad x_2 \ge 0$$

Le linee di livello $f_1(x) = K$ sono rette e le linee di livello $f_2(x) = K$ sono ellissi (Q è positiva semidefinita) i cui assi sono dati dagli autovettori di Q. Consideriamo i seguenti dati:

$$C = 12 \cdot 10^3 \text{ €}, \qquad t_1 = 5 \cdot 10^{-2}, \qquad t_2 = 8 \cdot 10^{-2}, \qquad Q = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 6 \end{pmatrix} \cdot 10^{-4}$$

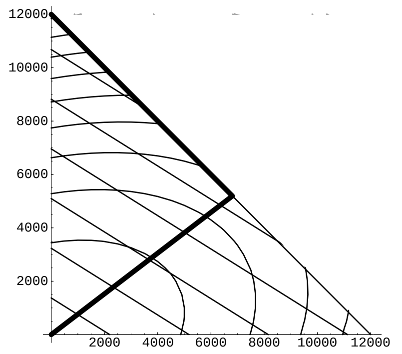

figura 1

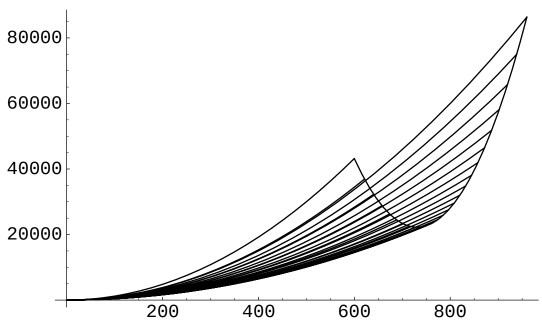

figura 2

In figura 1 è raffigurato il dominio X con le linee di livello e in figura 2 è raffigurato il codominio $f(X)$ insieme con l'immagine dei raggi $(x, m\,x)$. Gli ottimi di Pareto costituiscono la linea spezzata evidenziata in tratto grosso in figura 1 e le loro immagini costituiscono la frontiera 'sud-est' di $f(X)$ (figura 2).

Possiamo eseguire il calcolo degli ottimi di Pareto in vari modi alternativi. Inizialmente seguiamo un metodo 'diretto'. Si esamini un punto generico x all'interno del dominio dove le linee di livello delle due funzioni non siano tangenti fra loro. In un intorno di x si considerino le quattro regioni generate dalle linee di livello passanti per x. Una delle quattro regioni è caratterizzata da punti migliori per entrambi gli obiettivi. Quindi x è dominato e nessun punto interno al dominio con linee di livello non tangenti può essere ottimo di Pareto. Nei punti interni dove le ellissi sono tangenti alle rette non c'è invece intersezione fra i punti migliori per il primo obiettivo (punti situati sopra e a destra della retta) e quelli migliori per il secondo obiettivo (interni all'ellisse). Quindi tali punti sono ottimi di Pareto e si trovano imponendo che il gradiente di f_2 sia parallelo al gradiente di f_1, cioè

$$2\,Q\,x = \alpha\,t \tag{1}$$

Risolvendo (1) si ottiene

$$x = \alpha\,(\,111.765 \quad 85.2941\,) \qquad \alpha \geq 0$$

(punti del segmento in tratto grosso interno all'insieme ammissibile in figura 1). Per i punti sulla frontiera dell'insieme ammissibile si tratta di valutare se i punti che dominerebbero un punto generico della frontiera sono ammissibili. I punti del segmento in tratto grosso sulla frontiera dell'insieme ammissibile in figura 1 sarebbero dominati solo da punti non ammissibili e sono pertanto ottimi di Pareto.

Alternativamente si trasformi il problema in una combinazione convessa degli obiettivi. Quindi si ha

$$\begin{aligned} \min \quad & \alpha\,(q_{11}\,x_1^2 + q_{22}\,x_2^2 + 2\,q_{12}\,x_1\,x_2) - (1-\alpha)\,(t_1\,x_1 + t_2\,x_2) \\ & x_1 + x_2 \leq C, \qquad x_1 \geq 0, \qquad x_2 \geq 0 \end{aligned} \tag{2}$$

Si tratta di un problema di programmazione quadratica per il quale esistono algoritmi efficienti dato che la funzione da minimizzare è convessa e i vincoli sono lineari. In questo caso, data la semplicità del problema, si può anche risolverlo per via geometrica. Le linee di livello della funzione obiettivo in (2)

$$\alpha\,x^T Q\,x - (1-\alpha)\,t\,x = K \tag{3}$$

sono ellissi concentriche con centro

$$\frac{1-\alpha}{2\,\alpha}\,Q^{-1}\,t \tag{4}$$

Infatti, imponendo una traslazione dell'origine in modo che i coefficienti dei termini lineari spariscano, si ha

$$\alpha\,(y+x_0)^T Q\,(y+x_0) - (1-\alpha)\,t\,(y+x_0) = \alpha\,y^T Q\,y + 2\,\alpha\,x_0^T Q\,y + \alpha\,x_0^T Q\,x_0 - (1-\alpha)\,t\,(y+x_0)$$

$$\Longrightarrow \quad 2\,\alpha\,x_0^T Q - (1-\alpha)\,t = 0$$

Il luogo dei punti di (4) al variare di α è la retta $Q^{-1}\,t$. Si noti anche che il centro è il minimo valore assoluto che può assumere la funzione obiettivo. Quindi se il centro è ammissibile si tratta del minimo del problema (2). Questo avviene per i valori α che rendono ammissibili i vincoli, ovvero

$$\frac{1-\alpha}{2\,\alpha}\mathbf{1}^T Q^{-1}\,t \leq C \quad \Longrightarrow \quad \alpha \geq \frac{\mathbf{1}^T Q^{-1}\,t}{\mathbf{1}^T Q^{-1}\,t + 2\,C} =: \hat{\alpha}$$

Sia

$$\hat{x} := \frac{C}{\mathbf{1}^T Q^{-1}\,t}\,Q^{-1}\,t$$

Con i dati del problema si ha:

$$Q^{-1}\,t = \begin{pmatrix} 223.529 \\ 170.588 \end{pmatrix} \quad \Longrightarrow \quad \mathbf{1}^T\,Q^{-1}\,t = 394.118 \quad \Longrightarrow$$

$$\hat{x} = \frac{12000}{394.118}\,Q^{-1}\,t = 30.4478\,\begin{pmatrix} 223.529 \\ 170.588 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6805.97 \\ 5194.03 \end{pmatrix}$$

$$\hat{\alpha} = \frac{394.118}{394.118 + 24000} = 0.0161563$$

Se il centro cade fuori dall'insieme ammissibile il punto che minimizza (2) è il punto della frontiera in cui la retta $x_1 + x_2 = C$ è tangente ad un'ellisse della famiglia (3), cioè

$$2\,\alpha\,Q\,x - (1-\alpha)\,t = \beta\,\mathbf{1}$$

da cui

$$x = \frac{1}{2\,\alpha}\,Q^{-1}(\beta\,\mathbf{1} + (1-\alpha)\,t)$$

e siccome $\mathbf{1}^T x = C$

$$\mathbf{1}^T x = \frac{1}{2\,\alpha}\,\mathbf{1}^T Q^{-1}(\beta\,\mathbf{1} + (1-\alpha)\,t) = C \qquad \Longrightarrow \qquad \beta = \frac{2\,\alpha\,C - (1-\alpha)\,\mathbf{1}^T Q^{-1} t}{\mathbf{1}^T Q^{-1}\mathbf{1}}$$

$$x = \frac{1}{2\,\alpha}\,Q^{-1}\Big(\frac{2\,\alpha\,C - (1-\alpha)\,\mathbf{1}^T Q^{-1} t}{\mathbf{1}^T Q^{-1}\mathbf{1}}\mathbf{1} + (1-\alpha)\,t\Big)$$

$$x = \frac{C}{\mathbf{1}^T Q^{-1}\mathbf{1}}\,Q^{-1}\,\mathbf{1} - \frac{1-\alpha}{2\,\alpha}\,Q^{-1}\left(\frac{\mathbf{1}^T Q^{-1} t}{\mathbf{1}^T Q^{-1}\mathbf{1}}\,\mathbf{1} - t\right)$$

Con i dati del problema si ha:

$$Q^{-1}\mathbf{1} = \begin{pmatrix} 4117.65 \\ 2352.94 \end{pmatrix} \quad \Longrightarrow \quad \mathbf{1}^T Q^{-1}\mathbf{1} = 6470.59 \quad \Longrightarrow$$

$$x = \frac{12000}{6470.59}\begin{pmatrix} 4117.65 \\ 2352.94 \end{pmatrix} - \frac{1-\alpha}{2\,\alpha}\,Q^{-1}\left(\frac{394.118}{6470.59}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0.05 \\ 0.08 \end{pmatrix}\right) =$$

$$\begin{pmatrix} 7636.36 \\ 4363.64 \end{pmatrix} - \frac{1-\alpha}{2\,\alpha}\,Q^{-1}\left(\begin{pmatrix} 0.0609091 \\ 0.0609091 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0.05 \\ 0.08 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 7636.36 \\ 4363.64 \end{pmatrix} - \frac{1-\alpha}{2\,\alpha}\,Q^{-1}\begin{pmatrix} 0.0109091 \\ -0.0190909 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 7636.36 \\ 4363.64 \end{pmatrix} - \frac{1-\alpha}{2\,\alpha}\,Q^{-1}\begin{pmatrix} 0.0109091 \\ -0.0190909 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7636.36 \\ 4363.64 \end{pmatrix} - \frac{1-\alpha}{2\,\alpha}\begin{pmatrix} 27.2727 \\ -27.2727 \end{pmatrix}$$

Questa espressione è valida per $\alpha \le \hat{\alpha}$ e finché le coordinate di x sono entrambe non negative, cioè per α tale che

$$7636.36 \ge \frac{1-\alpha}{2\,\alpha}\,27.2727 \quad \Longrightarrow \quad \alpha \ge 0.00178253$$

Per valori di α inferiori a 0.00178253 si ottiene sempre lo stesso ottimo di Pareto $(0, 12000)$.

Come terzo metodo si minimizzi il rischio imponendo un vincolo sul guadagno atteso. Quindi

$$\begin{aligned} \min \quad & x^T Q\,x \\ & t^T\,x \ge K \\ & \mathbf{1}^T\,x \le C \\ & x \ge 0 \end{aligned} \tag{5}$$

Con riferimento alle linee di livello della figura 1 si vede che per valori piccoli di K il minimo di (5) si ha per i valori in cui le ellissi sono tangenti alle rette $t^T\,x = K$. Quando tali punti diventano non ammissibili a causa del vincolo $\mathbf{1}^T\,x \le C$, il minimo si trova nell'intersezione delle rette $t^T\,x = K$ e $\mathbf{1}^T\,x = C$.