1) Nel problema

$$\begin{aligned} \min \quad & \mathbf{0}\,x \\ & A\,x \geq b \\ & x \geq 0 \end{aligned}$$

ogni soluzione (e quindi anche ogni vertice) è ottimo. È immediato vedere che $u = 0$ è ottimo duale. Esistono altri ottimi duali? Ci sono delle condizioni che garantiscono una risposta negativa oppure affermativa?

Soluzione: Se il poliedro primale è un corpo convesso esiste un $\hat{x} > 0$ tale che $A\,\hat{x} > b$. Solo $\hat{u} = 0$ soddisfa la complementarità $u\,(A\,\hat{x} - b) = 0$ per tale $\hat{x}$. Se il poliedro primale non è un corpo convesso esiste un insieme I di indici per cui $A^i\,x = b_i$, $\forall i \in I$, per ogni x ammissibile, ed eventualmente un insieme J di indici per cui $x_j = 0$, $\forall j \in J$, per ogni x ammissibile. Si noti che, se il poliedro non è un corpo convesso, I non può essere vuoto (mentre J può esserlo). Infatti se $A\,\bar{x} > b$ anche $A\,(\bar{x} + \varepsilon) > b$ per un opportuno $\varepsilon > 0$. Sia A^I la matrice ristretta alle righe in I e siano $\hat{u}_I$ e b_I i rispettivi vettori ristretti alle componenti in I. Necessariamente $\hat{u}_i = 0$, $\forall i \notin I$, per ogni ottimo duale $\hat{u}$. Inoltre dalla dualità forte $\hat{u}\,b = \hat{u}_I\,b_I = 0$. Quindi gli ottimi duali sono le soluzioni ammissibili di

$$\begin{aligned} u_I\,b_I &= 0 \\ u_I\,A^I &\leq 0 \\ u_I &\geq 0 \end{aligned} \tag{1}$$

L'insieme ammissibile di (1) è un cono che si riduce alla sola origine se ad esempio $b_i > 0$, $\forall i \in I$. Quindi una condizione sufficiente di unicità dell'ottimo duale è $b_i > 0$, $\forall i$. Si noti che anche $b_i < 0$, $\forall i$, garantisce l'origine come unica soluzione ammissibile di (1). Tuttavia questa condizione implica che il poliedro primale è un corpo convesso (perché ?) e quindi rientra in questa condizione più generale.

Si consideri ad esempio

$$\begin{aligned} \min \quad & \mathbf{0}\,x \\ & \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \geq \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \\ & x \geq 0 \end{aligned}$$

Sommando le prime due disequazioni si vede che $x_2 = 0$ per ogni soluzione ammissibile e quindi le prime due disequazioni sono soddisfatte sempre come uguaglianza. Allora $I = \{1, 2\}$, $J = \{2\}$. Il poliedro primale P non è un corpo convesso ed è il segmento $\operatorname{conv}\{(1, 0, 0), (2, 0, 1)\}$. Si noti che

$$\dim P = 3 - \operatorname{rank} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = 3 - 2 = 1$$

Gli ottimi duali sono le soluzioni di $u_3 = 0$ e

$$\begin{aligned} u_1 - u_2 &= 0 \\ u_1 - u_2 &\leq 0 \\ -u_1 - u_2 &\leq 0 \\ -u_1 + u_2 &\leq 0 \\ u &\geq 0 \end{aligned}$$

cioè $\hat{u} = \alpha\,(1, 1, 0)$ per ogni $\alpha \geq 0$.

2) Supponendo che durante un'iterazione del metodo del simplesso si verifichi la condizione di illimitatezza si determinino la direzione estrema e il vertice da cui parte la direzione estrema lungo la quale si ha l'illimitatezza. Si calcoli esplicitamente la direzione estrema d che si ottiene con $\beta = \{1, 2, 3\}$ e $p = 4$ per la seguente matrice A

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Soluzione: La condizione di illimitatezza è $\tilde{a} := B^{-1} A^p \leq 0$ per un qualsiasi indice p tale che $\bar{c}_p < 0$. La soluzione di base $\hat{x}_\beta = B^{-1} b$, $\hat{x}_j = 0 \ \forall j \notin \beta$ può in tal caso venir modificata nella soluzione ammissibile di costo migliore $x_j = \hat{x}_j - \alpha \, \tilde{a}_j$, se $j \in \beta$, $x_p = \alpha$, $x_j = 0$, se $j \notin \beta$ e $j \neq p$, per ogni $\alpha \geq 0$. Questa soluzione corrisponde ad una parametrizzazione (tramite α) dello spigolo. Quindi la direzione estrema d è data da $d = x - \hat{x}$, ovvero $d_j = -\tilde{a}_j$, $j \in \beta$, $d_p = 1$, $d_j = 0$, $j \notin \beta$, $j \neq p$.

Si noti che d soddisfa

$$A\,d = \begin{pmatrix} B & A^p & N \setminus A^p \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -B^{-1} A^p \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = -A^p + A^p = 0, \qquad d \geq 0$$

come richiesto per ogni direzione del poliedro. Nel caso numerico dato si ha

$$B^{-1} A^p = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

e quindi

$$d = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

3) Si calcoli la massima circonferenza inscritta nell'insieme ammissibile:

$$\begin{aligned} x_1 \qquad\quad &\leq 2 \\ 2\,x_2 &\leq 3 \\ 3\,x_1 + 4\,x_2 &\leq 9 \\ x_1 \qquad\quad &\geq 0 \\ x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

Soluzione: L'insieme ammissibile si può rappresentare come in Figura 1. Per vincoli scritti nella forma generica $A\,x \leq b$ il problema si può scrivere come

$$\begin{aligned} \max \quad & r \\ & A^k\,x + r\,\sqrt{A^k\,A^k} \leq b_k \qquad \forall k \end{aligned}$$

e quindi si ha

$$\begin{aligned} \max \quad & \qquad\qquad r \\ & x_1 \qquad\quad + \quad r \leq 2 \\ & \qquad 2\,x_2 + 2\,r \leq 3 \\ & 3\,x_1 + 4\,x_2 + 5\,r \leq 9 \\ & -\; x_1 \qquad\quad + \quad r \leq 0 \\ & \qquad -\; x_2 + \quad r \leq 0 \end{aligned}$$

il cui duale è

$$\begin{aligned} \min \quad & 2\,u_1 + 3\,u_2 + 9\,u_3 \\ & u_1 \qquad + 3\,u_3 - u_4 \qquad = 0 \\ & \qquad 2\,u_2 + 4\,u_3 \qquad - u_5 = 0 \\ & u_1 + 2\,u_2 + 5\,u_3 + u_4 + u_5 = 1 \\ & u_i \geq 0 \end{aligned}$$

se si sceglie la base $\beta = \{3, 4, 5\}$ si vede subito che è ottima e fornisce l'ottimo $x_1 = x_2 = r = 3/4$. La soluzione è rappresentata in Figura 2.

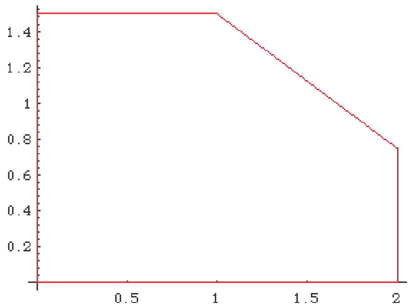

Figura 1

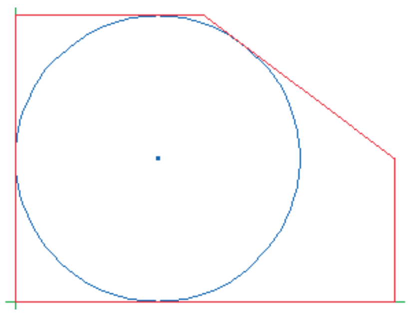

Figura 2

4) Sia data la funzione

$$f(x) = \max \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + 8 \ ; \\ -x_1 + 2\,x_2 - x_3 + 4 \ ; \\ 2\,x_1 - x_2 + 2\,x_3 + 3 \ ; \\ -x_1 - x_2 + 4\,x_3 - 4 \ ; \\ x_1 + x_2 - 2\,x_3 + 1 \ ; \\ -x_1 - x_2 - x_3 \end{cases}$$

Si modelli il problema di minimizzare f come un problema di PL e si dimostri, tramite le relazioni di complementarità, che il punto $\hat{x} = (-1.8 \ ; \ -3 \ ; \ 0.8)$ è il minimo della funzione. Qual è il significato del problema duale?

Soluzione: Il problema di PL che minimizza f è:

$$\begin{aligned} \min \quad & v \\ & v \geq x_1 + x_2 + x_3 + 8 \\ & v \geq -x_1 + 2\,x_2 - x_3 + 4 \\ & v \geq 2\,x_1 - x_2 + 2\,x_3 + 3 \\ & v \geq -x_1 - x_2 + 4\,x_3 - 4 \\ & v \geq x_1 + x_2 - 2\,x_3 + 1 \\ & v \geq -x_1 - x_2 - x_3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \max \quad & 8\,u_1 + 4\,u_2 + 3u_3 - 4\,u_4 + u_5 \\ & u_1 + u_2 + u_3 + u_4 + u_5 + u_6 = 1 \\ & -u_1 + u_2 - 2\,u_3 + u_4 - u_5 + u_6 = 0 \\ & -u_1 - 2\,u_2 + u_3 + u_4 - u_5 + u_6 = 0 \\ & -u_1 + u_2 - 2\,u_3 - 4\,u_4 + 2\,u_5 + u_6 = 0 \\ & u_i \geq 0 \end{aligned}$$

Si trova

$$f(\hat{x}) = \max \{4 \ ; \ -1 \ ; \ 4 \ ; \ 4 \ ; \ -5.4 \ ; \ 4\}$$

e quindi la seconda e la quinta diseguaglianza sono soddisfatte strettamente, da cui $\hat{u}_2 = \hat{u}_5 = 0$. Bisogna allora risolvere il sistema

$$\begin{aligned} u_1 + u_3 + u_4 + u_6 &= 1 \\ -u_1 - 2\,u_3 + u_4 + u_6 &= 0 \\ -u_1 + u_3 + u_4 + u_6 &= 0 \\ -u_1 - 2\,u_3 - 4\,u_4 + u_6 &= 0 \\ u_i &\geq 0 \end{aligned}$$

Confrontando la seconda e la terza equazione si vede che $\hat{u}_3 = 0$ e confrontando la seconda e la quarta equazione si vede che $\hat{u}_4 = 0$. Quindi si ha

$$\begin{aligned} u_1 + u_6 &= 1 \\ -u_1 + u_6 &= 0 \\ u_i &\geq 0 \end{aligned}$$

che ha soluzione fra cui $u_1 = u_6 = 1/2$.

Come si vede dalla formulazione del problema duale, le variabili duali sono i coefficienti della combinazione convessa che fornisce l'origine come punto appartenente al subdifferenziale. In ottimalità possono entrare nella combinazione convessa (con coefficiente positivo) solo i gradienti delle funzioni affini che danno luogo al massimo, dato che per la complementarità le diseguaglianze strette del primale danno luogo a variabili duali nulle. Nell'esempio il subdifferenziale nell'ottimo è l'inviluppo convesso dei quattro gradienti

$$\begin{array}{cccc} -1 & -2 & +1 & +1 \\ -1 & +1 & +1 & +1 \\ -1 & -2 & -4 & +1 \end{array}$$

e l'origine si trova a metà dello spigolo che connette il primo al quarto vertice.