

# Capitolo 11

## Matroidi

I matroidi costituiscono una speciale classe di strutture combinatorie i cui ottimi si possono trovare in tempo polinomiale con un algoritmo molto semplice. I matroidi sono particolari sistemi di indipendenti, che soddisfano dei requisiti alquanto stringenti sulla cardinalità delle soluzioni ammissibili, requisiti che rendono appunto facile la ricerca degli ottimi. Anche se non sono molte le strutture che rientrano nella classe dei matroidi, tuttavia queste sono di grande importanza in ottimizzazione combinatoria perché di uso molto frequente nelle applicazioni.

I matroidi furono introdotti per la prima volta da Whitney [1935] in un contesto puramente combinatorio. Fu solo molto più tardi che se ne studiarono le proprietà nell'ambito dell'ottimizzazione combinatoria, soprattutto nei lavori di Edmonds [1965a, 1970, 1971]. Gli sviluppi di questa teoria si possono trovare nei libri di Tutte [1971] e Lawler [1976].

### 11.1. Sistemi di indipendenti

Molti problemi possono essere modellati tramite un insieme finito  $E$  ed una assegnata famiglia  $\mathcal{F}$  di sottoinsiemi di  $E$ , che definisce i sottoinsiemi ammissibili di  $E$ . Inoltre è definita una funzione obiettivo  $f : 2^E \rightarrow \mathbb{Z}$  e si cerca il sottoinsieme  $X \in \mathcal{F}$  tale che  $f(X) \leq f(A), \forall A \in \mathcal{F}$  (oppure  $f(X) \geq f(A), \forall A \in \mathcal{F}$ ). Spesso  $f$  viene definita a partire da un insieme di valori  $w(e), \forall e \in E$ , tramite la relazione  $f(A) := \sum_{e \in A} w(e)$ .

Molto spesso avviene che, se  $A$  è un sottoinsieme ammissibile (cioè un membro della famiglia  $\mathcal{F}$ ), allora anche ogni suo sottoinsieme è ammissibile. In questo caso si dice che la famiglia  $\mathcal{F}$  è chiusa rispetto all'inclusione, cioè  $A \in \mathcal{F}$  e  $B \subset A$  implicano  $B \in \mathcal{F}$ .

**11.1 DEFINIZIONE.** Sia  $E$  un insieme finito e sia  $\mathcal{F} \subset 2^E$  chiusa rispetto all'inclusione. Allora la coppia  $\mathbf{S} = (E, \mathcal{F})$  viene detta sistema di indipendenti. Sottoinsiemi in  $\mathcal{F}$  vengono detti indipendenti, mentre sottoinsiemi non in  $\mathcal{F}$  vengono detti dipendenti. ■

**11.2 ESEMPIO.** Sia  $E = \{a, b, c, d, e\}$ ,  $E_1 = \{a, b, c\}$ ,  $E_2 = \{b, d\}$ ,  $E_3 = \{a, d, e\}$ ,

$$\mathcal{F} = 2^{E_1} \cup 2^{E_2} \cup 2^{E_3}.$$

Allora  $(E, \mathcal{F})$  è un sistema di indipendenti. In generale quindi a partire da insiemi  $E_i$ ,  $i = 1, \dots, m$ , i sottoinsiemi  $\bigcup_i 2^{E_i}$  costituiscono un sistema di indipendenti. È vero però anche il contrario, che cioè ogni sistema di indipendenti può essere espresso come  $\bigcup_i 2^{E_i}$  per una opportuna famiglia di sottoinsiemi  $E_i$ ,  $i = 1, \dots, m$ . ■

11.3 DEFINIZIONE. *Insiemi  $A \in \mathcal{F}$  sono detti massimali se  $A \cup \{e\} \notin \mathcal{F}$  per ogni  $e \notin A$ .* ■

Gli insiemi indipendenti massimali non possono quindi essere ulteriormente estesi ad insiemi più grandi ed indipendenti tramite la semplice inserzione di un nuovo elemento. Il termine ‘massimale’ indica questa proprietà e non la proprietà che il sottoinsieme sia di cardinalità massima fra quelli in  $\mathcal{F}$ , nel qual caso si usa il termine ‘massimo’. In generale vi sono insiemi massimali che non sono massimi, mentre è banalmente vero che ogni insieme massimo è anche massimale.

Per ogni sistema di indipendenti si può definire una funzione che associa ad ogni sottoinsieme la cardinalità di un suo sottoinsieme indipendente massimo:

11.4 DEFINIZIONE. *Dato il sistema di indipendenti  $(E, \mathcal{F})$  la funzione  $m : 2^E \rightarrow \mathbb{Z}$  definita da*

$$m(J) := \max \{|A| : A \subset J, A \in \mathcal{F}\} \quad J \subset E$$

*viene detta funzione di cardinalità (per convenzione  $m(\emptyset) := 0$ ).* ■

In generale non è detto che la funzione di cardinalità sia valutabile in tempo polinomiale. L’unica ovvia proprietà che si può dedurre a questo livello di generalità è che si tratta di una funzione non decrescente, cioè  $A \subset B$  implica  $m(A) \leq m(B)$ .

In modo naturale, data la proprietà di chiusura rispetto all’inclusione, si possono definire sistemi più piccoli, indotti da sottoinsiemi di  $E$ .

11.5 DEFINIZIONE. *Sia  $\mathbf{S} = (E, \mathcal{F})$  un sistema di indipendenti. Sia  $S \subset E$  e sia  $\mathcal{F}_S := \{A \in \mathcal{F} : A \subset S\}$ . Allora  $\mathbf{S}_S := (S, \mathcal{F}_S)$  è un sistema di indipendenti e viene detto sistema indotto da  $S$ .* ■

Qui di seguito presentiamo alcuni fra i molti possibili esempi di sistemi di indipendenti.

11.6 ESEMPIO. Dato un grafo (non orientato)  $G = (N, E)$ , sia  $\mathcal{F}$  la famiglia di sottoinsiemi di archi senza circuiti. Alternativamente ogni sottoinsieme in  $\mathcal{F}$  è una foresta. Allora  $\mathbf{F} = (E, \mathcal{F})$  è un sistema di indipendenti e gli elementi massimali sono tutti gli alberi di supporto di  $G$ , se  $G$  è connesso, altrimenti sono tutte le foreste di supporto di  $G$  (un albero di supporto per ogni componente connessa). Si noti che gli insiemi massimali hanno la stessa cardinalità, pari al numero di nodi meno il numero di componenti connesse e sono quindi tutti massimi. ■

11.7 ESEMPIO. Dato un grafo (non orientato) connesso  $G = (N, E)$ , sia  $\mathcal{G}$  la famiglia di sottoinsiemi di archi contenenti al più un circuito. Allora  $\mathbf{G} = (E, \mathcal{G})$  è un sistema di indipendenti e gli elementi massimali sono sottografi connessi contenenti esattamente un circuito. Gli insiemi massimali hanno cardinalità pari al numero di nodi (se il grafo è connesso e contiene un circuito, altrimenti?). ■

11.8 ESEMPIO. Dato un grafo (non orientato) connesso  $G = (N, E)$ , sia  $\mathcal{H}$  la famiglia di sottoinsiemi di archi in cui ogni componente connessa ha al più un circuito. Allora  $\mathbf{H} = (E, \mathcal{H})$  è un sistema di indipendenti e gli elementi massimali sono insiemi di circuiti con alberi, eventualmente vuoti, appesi ai nodi dei circuiti, e tutti i nodi sono incidenti a qualche arco. Gli insiemi massimali hanno cardinalità pari al numero di nodi (se il grafo contiene almeno un circuito). ■

11.9 ESEMPIO. Dato un grafo (non orientato)  $G = (N, E)$ , sia  $\mathcal{C}_k$  la famiglia di sottoinsiemi  $A$  di archi tali che il grado di ogni nodo rispetto agli archi in  $A$  sia al massimo  $k$ . Allora  $\mathbf{C}_k = (E, \mathcal{C}_k)$  è un sistema di indipendenti per ogni  $k$ .

Se  $k = 1$  ogni sottoinsieme è un accoppiamento e quindi gli insiemi massimali sono gli accoppiamenti massimali. In generale questi non hanno la medesima cardinalità. Si vedano in figura 11.1 tre insiemi massimali di cardinalità diversa (il terzo è anche ovviamente massimo). L'esempio suggerisce inoltre come sia possibile costruire un grafo in cui le cardinalità degli insiemi massimali differiscano di un prefissato fattore arbitrario.

Se  $k = 2$  ogni sottoinsieme massimale è costituito da una famiglia di circuiti e cammini. In figura 11.2 si vedono tre insiemi massimali, il primo di cardinalità 12 e gli altri due di cardinalità 14. Si costruisca per esercizio un insieme massimale di cardinalità 13. Esistono insiemi massimali di cardinalità 15? Possono, in generale, gli insiemi massimali di  $\mathbf{C}_2$  avere cardinalità superiore al numero dei nodi? ■

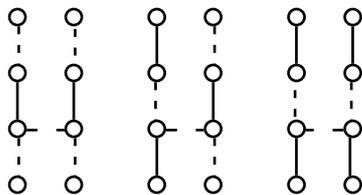


FIGURA 11.1

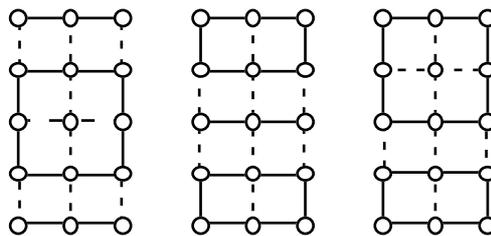


FIGURA 11.2

11.10 ESEMPIO. Dati due sistemi di indipendenti  $(E, \mathcal{F}_1)$  e  $(E, \mathcal{F}_2)$  è possibile costruire un terzo sistema di indipendenti  $(E, \mathcal{F}_1 \cap \mathcal{F}_2)$ . Ad esempio  $(E, \mathcal{G} \cap \mathcal{C}_2)$  è costituito da tutti i sottoinsiemi di archi di grado al più due e con al più un circuito. Quindi ogni sottoinsieme di  $\mathcal{G} \cap \mathcal{C}_2$  è costituito da un certo numero di componenti connesse che sono tutte cammini, oppure una è un circuito e le altre sono cammini. Se esistono elementi massimali di cardinalità  $n$  questi devono essere circuiti hamiltoniani. ■

11.11 ESEMPIO. Sia  $E$  un insieme finito ripartito come  $E_1, E_2, \dots, E_p$ . Sia  $\mathcal{P}$  una famiglia di sottoinsiemi di  $E$  tali che  $A \in \mathcal{P} \iff |A \cap E_i| \leq 1, \forall i$  (in altri termini ogni sottoinsieme di  $\mathcal{P}$  può essere costruito prendendo al più un elemento da ogni  $E_i$ ). Allora  $\mathbf{P} = (E, \mathcal{P})$  è un sistema di indipendenti. Ovviamente gli insiemi massimali corrispondono a sottoinsiemi costruiti prendendo esattamente un elemento da ogni  $E_i$  e quindi hanno tutti cardinalità  $p$ .

Si noti che se gli insiemi  $E_i$  non costituiscono una partizione, più esattamente se qualche coppia ha intersezione non vuota, allora gli insiemi massimali non hanno la medesima cardinalità. ■

11.12 ESERCIZIO. Si modellino gli insiemi stabili di un grafo non orientato (insiemi di nodi senza archi in comune) come un sistema di indipendenti del tipo dell'esempio precedente, in cui gli insiemi  $E_1, E_2, \dots, E_p$  non costituiscano necessariamente una partizione. ■

11.13 ESEMPIO. Data una matrice con  $m$  righe e  $n$  colonne, sia  $E$  l'insieme delle colonne e sia  $\mathcal{L}$  la famiglia di sottoinsiemi di colonne linearmente indipendenti. Ovviamente  $\mathbf{L} = (E, \mathcal{L})$  è un sistema di indipendenti. Gli insiemi massimali hanno tutti cardinalità pari al rango della matrice, cioè al valore minimo fra  $n$  e il numero di righe linearmente indipendenti.

Dato un grafo connesso non orientato si consideri il sistema  $\mathbf{F} = (E, \mathcal{F})$  (esempio 11.6). Si orienti ora arbitrariamente ogni arco del grafo, si costruisca la matrice d'incidenza nodi-archi e di questa matrice si consideri il sistema  $(E, \mathcal{L})$ . Non è difficile vedere che c'è una corrispondenza uno a uno fra i sottoinsiemi in  $\mathcal{F}$  e quelli in  $\mathcal{L}$ . ■

11.14 ESERCIZIO. Si consideri il sistema  $\mathbf{G} = (E, \mathcal{G})$  (vedi esempio 11.7). Si orienti arbitrariamente ogni arco del grafo, si costruisca la matrice d'incidenza nodi-archi, si aggiunga alla matrice la riga  $(2^0, 2^1, 2^2, \dots, 2^{|E|-1})$  e di questa matrice si consideri il sistema  $(E, \mathcal{L})$ . Si dimostri che c'è una corrispondenza biunivoca fra i sottoinsiemi in  $\mathcal{G}$  e quelli in  $\mathcal{L}$ . ■

## 11.2. Matroidi

Un sistema di indipendenti ha in generale troppo poca struttura per permettere l'esistenza di algoritmi, che, sfruttando tale struttura, siano particolarmente efficienti nella risoluzione del problema  $\max_{A \in \mathcal{F}} f(A)$ . Come si è visto (esempio 11.10, esercizio 11.12) vi sono sistemi di indipendenti per i quali la ricerca di un massimo insieme indipendente è un problema NP-difficile. Vi sono altresì casi in cui tutti i sottoinsiemi indipendenti massimali hanno la medesima cardinalità e sono pertanto tutti anche massimi. Ci si aspetta allora che il problema  $\max_{A \in \mathcal{F}} f(A)$  non sia particolarmente difficile, almeno in presenza di funzioni  $f$  definite come  $f(A) = \sum_{e \in A} w(e)$ . Infatti questo è quello che succede, come si vedrà subito. Questi particolari sistemi di indipendenti vengono introdotti dalla seguente definizione.

11.15 DEFINIZIONE. *Un sistema di indipendenti  $\mathbf{M} = (E, \mathcal{M})$  viene detto matroide se, per ogni  $F \subset E$ , gli insiemi massimali del sistema  $(F, \mathcal{M}_F)$  hanno la stessa cardinalità.* ■

Data la proprietà di cardinalità costante, gli elementi massimali di un matroide vengono anche indicati con un termine particolare.

11.16 DEFINIZIONE. *Ogni elemento massimale di un matroide viene detto base.* ■

Un matroide è caratterizzato dalla seguente proprietà, detta di scambio, che ne rende evidente la particolare struttura (spesso la proprietà di scambio viene usata come definizione di matroide).

11.17 TEOREMA. *Un sistema di indipendenti  $(E, \mathcal{M})$  è un matroide se e solo se per ogni  $A, B \in \mathcal{M}$  con  $|A| < |B|$  esiste un elemento  $e \in B \setminus A$  tale che  $A \cup \{e\} \in \mathcal{M}$ .*

DIMOSTRAZIONE. Sia  $(E, \mathcal{M})$  un matroide. Si consideri il matroide indotto dal sottoinsieme  $A \cup B$ . Sia  $A$  che  $B$  sono in  $\mathcal{M}_{A \cup B}$ . Siccome  $|A| < |B|$ ,  $A$  non è massimale in  $(A \cup B, \mathcal{M}_{A \cup B})$ . Siccome  $(E, \mathcal{M})$  è un matroide tutti i sottoinsiemi massimali di  $(A \cup B, \mathcal{M}_{A \cup B})$  sono massimi con la medesima cardinalità. Quindi  $A$  non è massimale ed esiste un elemento  $e \in A \cup B$ ,  $e \notin A$ , cioè  $e \in B \setminus A$ , tale che  $A \cup \{e\} \in \mathcal{M}_{A \cup B} \subset \mathcal{M}$ .

Sia vera la proprietà di scambio. Dato un sottoinsieme  $F \subset E$  sia  $B$  un sottoinsieme massimale per  $(F, \mathcal{M}_F)$  e sia  $A \in \mathcal{M}_F$ , con  $|A| < |B|$ . In base alla proprietà,  $A$  può essere esteso ad un altro insieme in  $\mathcal{M}_F$  di cardinalità superiore e quindi non può essere massimale. Allora non possono esistere insiemi massimali di cardinalità diversa e il sistema di indipendenti è per definizione un matroide. ■

**Algoritmo greedy**

```

input(( $E, \mathcal{M}$ ),  $w$ );
  Sia  $E$  ordinato in modo che  $w(e_1) \geq w(e_2) \geq \dots$ ;
   $A := \emptyset$ ;
  for  $i := 1$  to  $|E|$  do
    if  $A \cup \{e_i\} \in \mathcal{M}$  then  $A := A \cup \{e_i\}$ ;
output( $A$ ).

```

11.18 ESERCIZIO. Si dimostri che una famiglia di insiemi  $B_1, B_2, \dots, B_p$  definisce le basi di un matroide: 1) se e solo se per ogni coppia di insiemi della famiglia  $B$  e  $B'$  ed ogni elemento  $e \in B \setminus B'$  esiste un elemento  $e' \in B' \setminus B$  tale che  $B \cup \{e'\} \setminus \{e\}$  appartiene alla famiglia (basta particularizzare la proprietà di scambio); 2) se e solo se per ogni coppia di insiemi della famiglia  $B$  e  $B'$  ed ogni elemento  $e \in B \setminus B'$  esiste un elemento  $e' \in B' \setminus B$  tale che  $B' \cup \{e\} \setminus \{e'\}$  appartiene alla famiglia (si consideri il matroide indotto da  $B' \cup \{e\}$  e si deduca una contraddizione dal fatto che  $B' \cup \{e\} \setminus \{e'\}$  sia dipendente per ogni  $e' \in B' \setminus B$ ). Si faccia vedere con un controesempio che le proprietà enunciate possono non valere per degli insiemi massimali di un generico sistema di indipendenti. ■

Come si vede, la proprietà di scambio garantisce che si possa trovare un insieme massimo semplicemente aggiungendo un elemento alla volta, senza che la scelta di quale elemento aggiungere pregiudichi le possibilità successive di scelta. Fino al raggiungimento della cardinalità massima, un elemento da aggiungere esiste in ogni caso. Non stupisce quindi che l'algoritmo, noto come *algoritmo greedy*, risolve il problema  $\max_{A \in \mathcal{M}} f(A)$ .

11.19 TEOREMA. Un sistema di indipendenti  $(E, \mathcal{M})$  è un matroide se e solo se per ogni  $w: E \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $w > 0$ , l'algoritmo greedy fornisce il massimo di  $f_w(A) = \sum_{e \in A} w(e)$ .

DIMOSTRAZIONE. Sia  $(E, \mathcal{M})$  un matroide. Sia  $A = \{a_1, \dots, a_p\}$  il sottoinsieme fornito dall'algoritmo greedy con  $w(a_1) \geq w(a_2) \geq \dots \geq w(a_p)$ . Siccome i valori  $w(e)$  sono positivi  $A$  è una base. Sia  $B = \{b_1, \dots, b_p\}$  una qualsiasi altra base. Possiamo supporre senza perdita di generalità che  $A$  e  $B$  non abbiano elementi in comune.

Se  $w(a_i) \geq w(b_i)$ ,  $\forall i$ , allora ovviamente  $f_w(A) \geq f_w(B)$ . Sia dunque  $k > 1$  tale che  $w(a_k) < w(b_k) \leq w(b_{k-1}) \leq w(a_{k-1})$ . Si definisca  $F := \{e \in E : w(e) \geq w(b_k)\}$ . Poiché l'algoritmo greedy fornisce sottoinsiemi massimali,  $A \cap F$  è massimale in  $(F, \mathcal{M}_F)$ . Però  $|B \cap F| > |A \cap F|$  e questo contraddice la massimalità di  $A \cap F$  per definizione di matroide.

Viceversa, se  $(E, \mathcal{M})$  non è un matroide esiste un sottoinsieme  $F$  e due sottoinsiemi  $A$  e  $B$  massimali in  $(F, \mathcal{M}_F)$  tali che  $|A| > |B| = p$ . Si considerino allora i seguenti valori  $w(e) := p + 2$  se  $e \in B$ ,  $w(e) := p + 1$  se  $e \in A \setminus B$  e  $w(e) := 1$  altrimenti. Allora certamente  $c(A) \geq (p + 1)^2 > p(p + 2) = c(B)$  mentre l'algoritmo greedy fornisce  $B$ . ■

La complessità computazionale dell'algoritmo greedy dipende da quanto costa verificare l'appartenenza di un sottoinsieme alla famiglia, ovvero 'dato  $A$ ,  $A \in \mathcal{M}$ ?'. Certamente la complessità dell'algoritmo non può essere inferiore a  $O(|E| \log |E|)$  che è il costo dell'ordinamento iniziale. Per tutti i matroidi definiti in questo testo la verifica di appartenenza è polinomiale e quindi l'algoritmo greedy è polinomiale.

L'algoritmo greedy non risolve solo il problema di massimizzare  $f(A) = \sum_{e \in A} w(e)$  con pesi  $w(e)$  strettamente positivi. L'ipotesi sul segno dei pesi non è essenziale per il buon funzionamento dell'algoritmo. Se per alcuni elementi si ha  $w(e) \leq 0$  è chiaro che non sarà mai conveniente considerare questi elementi per massimizzare  $f(A)$ . Quindi si può applicare l'algoritmo greedy direttamente al matroide indotto dai soli elementi positivi, il che è equivalente a fermare anticipatamente l'algoritmo non appena si scandisce un elemento non positivo.

In base a queste considerazioni anche il problema molto frequente di minimizzare  $f(A)$  fra le basi di un matroide si può facilmente risolvere con l'algoritmo greedy variato in questo modo: si ordinano gli elementi dal minore al maggiore e si ferma l'algoritmo non appena si ottiene una base.

La procedura si può giustificare così: siccome tutte le basi hanno la stessa cardinalità, i pesi  $w(e)$  possono essere tutti variati di una medesima quantità  $\Delta$  senza alterare l'ottimo. Allora si prenda  $\Delta > \max_e w(e)$  e si ponga  $w'(e) := w(e) - \Delta$ , da cui  $w'(e) < 0, \forall e$ . Si trasformi il problema di minimo in uno di massimo cambiando il segno della funzione obiettivo e quindi si ha un problema di massimo con valori  $w''(e) := -w'(e) > 0$ . A questo punto l'algoritmo greedy applicato ai valori  $w''$  produce una base ed è equivalente all'algoritmo variato delineato precedentemente.

La funzione di cardinalità prende un nome particolare se il sistema è un matroide.

11.20 DEFINIZIONE. Dato il matroide  $\mathbf{M} = (E, \mathcal{M})$  la funzione di cardinalità  $r : 2^E \rightarrow \mathbb{Z}$  definita da

$$r(F) := \max \{|A| : A \subset F, A \in \mathcal{M}\} \quad F \subset E$$

viene detta anche funzione di rango del matroide (per convenzione  $r(\emptyset) := 0$ ). Ovviamente  $r(E) = r(B) =: \rho$  per ogni base  $B$  di  $\mathbf{M}$ , dove  $\rho$  viene detto rango del matroide  $\mathbf{M}$ . ■

La struttura del matroide si riflette in proprietà particolari della funzione di cardinalità e, viceversa, queste proprietà si verificano solo in presenza di un matroide. Richiamiamo dapprima le seguenti definizioni.

11.21 DEFINIZIONE. Sia  $f : 2^E \rightarrow \mathbb{Z}$ . Allora  $f$  si dice

- submodulare se  $f(S) + f(T) \geq f(S \cup T) + f(S \cap T), \forall S, T \subset E$
- supermodulare se  $f(S) + f(T) \leq f(S \cup T) + f(S \cap T), \forall S, T \subset E$
- modulare se  $f(S) + f(T) = f(S \cup T) + f(S \cap T), \forall S, T \subset E$ . ■

È immediato notare che  $f$  è modulare se e solo se esistono interi  $w(e), \forall e \in E$  tali che  $f(A) = \sum_{e \in A} w(e)$ . In termini un po' imprecisi una funzione submodulare cresce sempre di meno al crescere della cardinalità dell'argomento, mentre una funzione supermodulare cresce sempre di più. Una funzione submodulare può essere definita in modo alternativo dalla seguente proprietà (dimostrazione lasciata come esercizio):

11.22 TEOREMA. Una funzione  $f$  è submodulare se e solo se

$$f(T) \leq f(S) + \sum_{e \in T \setminus S} f(S \cup \{e\}) - f(S)$$

■

Dimostriamo ora che è equivalente dire che un sistema di indipendenti è un matroide oppure che la sua funzione di cardinalità è submodulare.

11.23 TEOREMA. La funzione di rango di un matroide  $(E, \mathcal{M})$  è submodulare. Viceversa un sistema di indipendenti è un matroide se la sua funzione di cardinalità è submodulare.

DIMOSTRAZIONE. Siano  $S$  e  $T$  sottoinsiemi di  $E$  ad intersezione non vuota. Sia  $A \in \mathcal{M}$  un sottoinsieme massimale in  $S \cap T$  e sia  $B \in \mathcal{M}$  un sottoinsieme massimale in  $S \cup T$ .

Se  $|B| = |A|$  allora  $A$  è massimale anche in  $S$  ed in  $T$  e quindi si ha  $r(S) + r(T) = r(S \cup T) + r(S \cap T)$ .

Se  $|B| > |A|$  si può invocare la proprietà di scambio e costruire un sottoinsieme  $C := A \cup \{e\} \in \mathcal{M}$  con  $e \in B \setminus A$ . Si noti che  $e \notin S \cap T$  altrimenti  $A$  non sarebbe massimale.

Finché  $|C| < |B|$ ,  $C$  può essere ridefinito ed ingrandito in modo analogo aggiungendo un elemento alla volta preso da  $S \setminus T$  oppure da  $T \setminus S$ . Quando infine  $|C| = |B|$  allora  $C$  è massimale in  $S \cup T$ . Per costruzione  $C$  può essere partizionato come  $C = C_S \cup C_T \cup A$  dove  $C_S \subset S \setminus T$  e  $C_T \subset T \setminus S$ . Quindi si ha

$$r(S \cap T) + r(S \cup T) = |A| + |C| = |A| + |C_S| + |C_T| + |A|$$

Siccome  $C \in \mathcal{M}$ , anche  $A \cup C_S \in \mathcal{M}$  e siccome  $A \cup C_S \subset S$  si ha

$$|A| + |C_S| = |A \cup C_S| \leq r(S)$$

e analogamente si ricava

$$|A| + |C_T| = |A \cup C_T| \leq r(T)$$

Dalle tre relazioni si ricava immediatamente la tesi. Se  $S$  e  $T$  non hanno elementi in comune la dimostrazione è analoga e molto più semplice.

Viceversa si supponga che il sistema di indipendenti non sia un matroide. Allora esiste un insieme  $F \subset E$  e due insiemi indipendenti e massimali (rispetto a  $F$ )  $S$  e  $T$  tali che  $|S| < |T|$ . Essendo i due insiemi massimali  $m(S) = |S|$  e  $m(T) = |T|$ . Inoltre per ogni  $e \in T \setminus S$ ,  $S \cup \{e\}$  non è indipendente ( $S$  è massimale) e quindi  $m(S \cup \{e\}) = m(S)$ , da cui  $\sum_{e \in T \setminus S} m(S \cup \{e\}) - m(S) = 0$ . Allora

$$m(T) > m(S) = m(S) + \sum_{e \in T \setminus S} m(S \cup \{e\}) - m(S)$$

ed  $m$  non è submodulare ■

La seguente ovvia proprietà caratterizza gli insiemi indipendenti tramite la funzione di rango.

11.24 TEOREMA. *Un insieme  $A \subset E$  è indipendente se e solo se  $r(A) = |A|$ .* ■

Quindi, dato che  $r(A) \leq |A|$  per ogni  $A$ , un insieme è dipendente se e solo se  $r(A) < |A|$ . Dato un insieme  $A$  con rango  $r(A)$  possiamo eseguire su  $A$  due operazioni di tipo opposto. Possiamo aggiungere ad  $A$  elementi facendo in modo di non aumentare il rango oppure, se l'insieme è dipendente, possiamo togliere elementi evitando che diventi indipendente.

La prima operazione definisce in modo univoco il massimo insieme che contiene  $A$  ed ha lo stesso rango di  $A$ .

11.25 DEFINIZIONE. *L'insieme  $\text{sp}(A) := A \cup \{e \notin A : r(A) = r(A \cup e)\}$  viene detto chiusura oppure espansione di  $A$ .* ■

11.26 TEOREMA.  *$r(A) = r(\text{sp}(A))$ . Inoltre  $\text{sp}(A)$  è il più grande insieme contenente  $A$  e di rango pari ad  $A$ .*

DIMOSTRAZIONE. Siano  $e$  e  $e'$  due elementi in  $\text{sp}(A)$  ma non in  $A$ . Allora

$$r(A \cup e) + r(A \cup e') \geq r(A \cup e \cup e') + r(A)$$

e siccome, per ipotesi  $r(A \cup e) = r(A \cup e') = r(A)$ , si ha  $r(A \cup e \cup e') \leq r(A)$ . Ma siccome vale sempre  $r(A \cup e \cup e') \geq r(A)$  si ha  $r(A \cup e \cup e') = r(A)$ . Procedendo in modo ricorsivo con gli altri elementi si ottiene  $r(A) = r(\text{sp}(A))$ .

Sia ora  $e$  tale che  $r(A \cup e) = r(A) + 1$ . Da  $\text{sp}(A) \cup e \supset A \cup e$  si ha  $r(\text{sp}(A) \cup e) \geq r(A \cup e)$  e quindi  $r(\text{sp}(A) \cup e) > r(A) = r(\text{sp}(A))$  da cui la massimalità di  $\text{sp}(A)$ . ■

La seconda operazione, portata avanti finché è possibile, genera insiemi minimali diversi a seconda della sequenza delle rimozioni. Questi insiemi vengono indicati con un termine particolare.

11.27 DEFINIZIONE. *Insiemi dipendenti minimali vengono detti circuiti.* ■

Circuiti vengono generati anche non appena un insieme diventa dipendente aggiungendovi un elemento:

11.28 TEOREMA. *Dato un matroide  $(E, \mathcal{M})$ , sia  $S \in \mathcal{M}$  e sia  $\bar{e} \notin S$ . Allora  $S \cup \{\bar{e}\}$  è indipendente oppure contiene un unico circuito.*

DIMOSTRAZIONE. Supponiamo  $S \cup \{\bar{e}\}$  dipendente. Togliendo da  $S \cup \{\bar{e}\}$  qualche altro elemento  $e$  di  $S$  può succedere che il nuovo insieme  $S \cup \{\bar{e}\} \setminus \{e\}$  sia indipendente. Definiamo pertanto

$$C := \{e \in S \cup \{\bar{e}\} : S \cup \{\bar{e}\} \setminus \{e\} \in \mathcal{M}\}$$

Supponiamo  $C$  indipendente. Essendo  $C \subset S \cup \{\bar{e}\}$ ,  $C$  deve essere contenuto in un insieme massimale  $T$  di  $S \cup \{\bar{e}\}$ . Siccome anche  $S \subset S \cup \{\bar{e}\}$ , si deve avere, per le proprietà dei matroidi,  $|T| = |S|$ . Siccome  $\bar{e} \in C \subset T$ ,  $T$  deve essere della forma  $T = S \cup \{\bar{e}\} \setminus \{e'\}$  per un certo  $e' \in S$ , il che implica  $e' \in C$  per definizione di  $C$ . Però si ha anche  $e' \notin T$ . Dalla contraddizione si ricava che  $C$  è dipendente. Inoltre, sempre per definizione di  $C$ , qualsiasi elemento di  $C$  si tolga da  $S \cup \{\bar{e}\}$  si ottiene un indipendente e quindi  $C$  è minimale, cioè un circuito.

Per l'unicità si supponga che esista un secondo circuito  $D \subset S \cup \{\bar{e}\}$ . Per la minimalità dei circuiti,  $C$  e  $D$  non possono essere inclusi uno nell'altro e quindi  $D \setminus C \neq \emptyset$  e  $C \setminus D \neq \emptyset$ . Inoltre  $\bar{e} \in C \cap D \neq \emptyset$ .  $C \cap D$  è indipendente altrimenti  $C$  non sarebbe un circuito. Si consideri il matroide indotto da  $C \cup D$ . L'insieme  $C \cup D \setminus \{\bar{e}\}$  è indipendente e massimale. L'insieme massimale che contiene  $C \cap D$  non può contenere tutti gli elementi di  $C \setminus D$  né tutti gli elementi di  $D \setminus C$  perché  $C$  e  $D$  sono dipendenti. Quindi la cardinalità di questo massimale deve essere al più  $|C \cup D| - 2$ , diversa da quella del precedente massimale. Trattandosi di matroidi questa è una contraddizione. ■

11.29 COROLLARIO. *Se  $C$  è un circuito allora  $r(C) = |C| - 1$  (ma non viceversa in generale).*

Il teorema 11.28 afferma l'esistenza di una proprietà quando il sistema di indipendenti è un matroide. Può essere utile tuttavia capire quanto sia cruciale l'ipotesi di matroide vedendo come la proprietà non valga su un generico sistema di indipendenti. Si consideri il sistema di indipendenti dato dagli accoppiamenti di un grafo. Sia  $G = (N, E)$  con  $N := \{1, 2, 3, 4\}$  e  $E := \{(1, 2), (2, 3), (3, 4)\}$ . Allora  $S := \{(1, 2), (3, 4)\}$  è indipendente e  $S \cup \{(2, 3)\} (= E)$  è dipendente. Tuttavia non è un circuito dato che contiene propriamente i dipendenti minimali  $\{(1, 2), (1, 3)\}$  e  $\{(2, 3), (3, 4)\}$ . Si riveda l'esercizio 11.18 alla luce del teorema 11.28.

Gli ottimi possono essere facilmente caratterizzati rispetto ai valori degli elementi sui circuiti. Più in particolare si consideri l'insieme delle basi di un matroide e per ogni base  $B$  sia  $C_B(e)$  il circuito generato da  $e \notin B$ . Si definisca allora un intorno di  $B$  come

$$N(B) := \{B' \in \mathcal{M} : B' = B \cup \{e'\} \setminus \{e\}, e' \notin B, e \in C_B(e')\} \quad (11.1)$$

Si ha la seguente proprietà di facile dimostrazione:

11.30 ESERCIZIO. Gli intorni definiti in (11.1) sono esatti. ■

Dopo aver definito le proprietà fondamentali dei matroidi, presentiamo alcuni fra i matroidi più comuni illustrandone le particolarità.

11.31 ESEMPIO. Il sistema di indipendenti dell'esempio 11.6 è un matroide in quanto per ogni sottoinsieme di archi  $F$  ogni insieme massimale di archi corrisponde ad un insieme di alberi di supporto, uno per ogni componente connessa di  $F$  e quindi è costante (una volta assegnato  $F$ ). Questo matroide prende il nome di *matroide grafico*. La proprietà di scambio può essere indipendentemente verificata nel seguente modo: siano  $A$  e  $B$  insiemi di archi e supponiamo che nessun arco di  $B \setminus A$  possa essere aggiunto ad  $A$  perché si formerebbe un circuito. Possiamo inoltre supporre senza perdita di generalità che gli archi di  $A$  siano connessi. Allora  $A$  è un albero di supporto su un sottoinsieme  $N'$  di nodi. Quindi  $|A| + 1 = |N'|$ . Per l'ipotesi che ogni arco di  $B$  genera un circuito in  $A$ , ogni arco di  $B$  è una corda di  $A$ , e allora tutti gli archi di  $B$  sono incidenti a nodi in  $N'$ . Siccome  $B$  non può avere circuiti, deve valere  $|B| + 1 \leq |N'|$  e quindi  $|B| \leq |A|$ . Allora se  $|B| > |A|$  almeno un arco di  $B$  può essere aggiunto ad  $A$  senza creare circuiti.

Dato un insieme indipendente  $A$  di archi,  $r(A)$  non viene aumentato se e solo se si aggiunge una qualsiasi corda di una componente connessa di  $A$ . Quindi, se indichiamo con  $N_1, \dots, N_p$  i nodi delle componenti connessi di  $A$  e con  $E(N_1), \dots, E(N_p)$  gli archi del grafo indotti dalla partizione, si ha che  $\text{sp}(A) = \bigcup_i E(N_i)$  (si vedano in figura 11.3 un insieme di archi e in figura 11.4 la sua espansione). Un circuito (nel senso di un matroide) è ovviamente un circuito (nel senso di un grafo). Infatti il nome deriva proprio da questo particolare matroide. ■

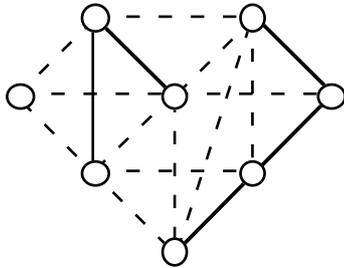


FIGURA 11.3

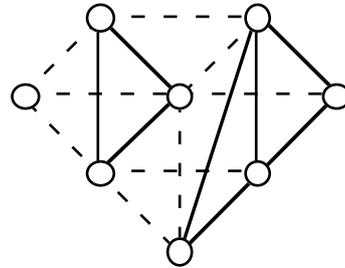


FIGURA 11.4

11.32 ESERCIZIO. Dimostrare che i sistemi di indipendenti degli esempi 11.7 e 11.8 sono matroidi. Dimostrare che sono matroidi anche ammettendo per la famiglia di sottoinsiemi al più un circuito dispari e nessun circuito pari e che non sono matroidi se invece il circuito ammesso deve essere pari. ■

11.33 ESEMPIO. Il sistema di indipendenti dell'esempio 11.11 è un matroide in quanto per ogni sottoinsieme di elementi  $F$  ogni insieme massimale è formato prendendo esattamente un elemento da ogni sottoinsieme  $F \cap E_i \neq \emptyset$  e quindi è di cardinalità costante. In questo caso la proprietà di scambio è facilmente verificata. Questo matroide prende il nome di *matroide di partizione*.

Dato un indipendente  $A$  con elementi provenienti dagli insiemi  $E_j, j \in J(A)$ , dove  $J(A) := \{j : E_j \cap A \neq \emptyset\}$ , si vede subito che  $\text{sp}(A) = \bigcup_{j \in J(A)} E_j$ . I circuiti in un matroide di partizione sono costituiti da coppie di elementi appartenenti alla stessa partizione. ■

11.34 ESEMPIO. Il sistema di indipendenti dell'esempio 11.13 è naturalmente un matroide in base a note proprietà di algebra lineare e prende il nome di *matroide lineare*.

Dato un insieme indipendente di colonne, la sua espansione contiene tutte le colonne che appartengono al sottospazio generato dalle colonne dell'indipendente. I circuiti sono

costituiti da insiemi di colonne in cui una colonna si può esprimere come combinazione lineare con coefficienti non nulli delle altre colonne. ■

11.35 ESERCIZIO. Data la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 4 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

si indichi, per ognuno dei 32 sottoinsiemi di colonne, il valore della funzione di rango e l'espansione. Si fornisca inoltre l'elenco dei circuiti. ■

11.36 ESEMPIO. Il sistema di indipendenti dell'esempio 11.7 è un matroide. Lo si può dimostrare anche invocando l'equivalenza con il particolare matroide lineare definito nell'esercizio 11.14. ■

11.37 ESEMPIO. Sia  $E$  un insieme finito. Siano  $E_1, E_2, \dots, E_p$  assegnati sottoinsiemi di  $E$ . Un insieme  $T \subset E$  viene detto *trasversale* se esiste una mappa iniettiva  $e \in T \mapsto E_e$  tale che  $e \in E_e$ . In altre parole l'insieme  $T$  è formato prendendo un elemento, o nessuno, da ogni insieme  $E_i$ , senza comunque escludere che vi possano essere alla fine più elementi da un singolo insieme  $E_i$ . Ad esempio se  $E = \{a, b, c\}$ ,  $E_1 = \{a, b\}$  e  $E_2 = \{b, c\}$  allora  $T = \{a, b\}$  è trasversale perché  $a$  viene scelto da  $E_1$  e  $b$  da  $E_2$ . Si noti che si tratta di una definizione diversa da quella dell'esempio 11.11, per il quale l'insieme  $\{a, b\}$  non sarebbe un indipendente dato che  $|E_1 \cap \{a, b\}| > 1$ .

Il sistema di indipendenti  $(E, \mathcal{T})$  con  $\mathcal{T}$  la famiglia di tutti gli insiemi trasversali è un matroide, detto *matroide trasversale*. Che  $(E, \mathcal{T})$  sia un matroide può essere dimostrato ad esempio sfruttando la proprietà di scambio. Siano  $A$  e  $B$  due insiemi indipendenti e sia  $\tau : A \rightarrow \{E_1, E_2, \dots, E_p\}$  una mappa iniettiva. Sia  $C := \bigcup \{E_i : \exists e : \tau(e) = E_i\}$  l'unione degli insiemi non toccati dalla mappa iniettiva. Se nessun elemento di  $B \setminus A$  può essere aggiunto ad  $A$ , significa che  $B \cap C = \emptyset$  e quindi  $B$ , essendo un indipendente, può avere cardinalità al più pari a quella di  $A$ . ■

11.38 ESERCIZIO. Sia  $E$  l'insieme degli archi di un grafo non orientato e siano  $E_1, \dots, E_n$  gli insiemi degli archi incidenti nei rispettivi  $n$  nodi del grafo. Come sono fatti gli insiemi trasversali? Si confronti con l'esempio 11.8. ■

11.39 ESERCIZIO. Come si può determinare in modo polinomiale se  $A \in \mathcal{T}$  per un matroide trasversale? ■

11.40 ESEMPIO. Sia dato il grafo  $G = (N, A)$ . Sia  $E$  un sottoinsieme di  $N$ . Sia  $\mathcal{M}$  la famiglia di tutti i sottoinsiemi  $D \subset E$  per i quali esiste un accoppiamento  $M$  di  $G$  che copre tutti i nodi in  $D$ . È immediato vedere che si tratta di un sistema di indipendenti. Un insieme massimale di  $\mathcal{M}$  non può avere più di  $2|M^*|$  elementi con  $M^*$  l'accoppiamento di massima cardinalità rispetto ad  $E$  e agli archi indotti da  $E$ . Sia  $D^* \in \mathcal{M}$  un insieme massimale indotto da  $M^*$  e  $D'$  un qualsiasi altro insieme massimale. La massimalità di  $D'$  implica che per ogni nodo  $i \notin D'$  non esiste un accoppiamento che copre sia  $i$  che tutti i nodi in  $D'$ , in particolare non ci sono cammini aumentanti da  $i$ , da cui  $|D'| = 2|M^*|$ . Quindi si tratta di un matroide che viene detto *matroide d'accoppiamento*. Si consideri il grafo di figura 11.5. Gli insiemi massimali sono

$$\{1, 2, 3, 4\}, \{1, 3, 4, 6\}, \{2, 3, 4, 5\}, \{3, 4, 5, 6\}, \{2, 3, 4, 6\}$$

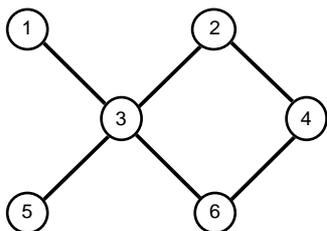


FIGURA 11.5

La funzione di rango vale ovviamente 4 per gli insiemi massimali. Per altri insiemi si ha ad esempio  $r(\{1, 3, 5\}) = 2$ ,  $r(\{1, 2, 3\}) = 3$ ,  $r(\{1, 5\}) = 1$ . L'insieme  $\{1, 5\}$  è quindi un circuito. Si noti che  $r(\{1, 3, 5\}) = 2 = |\{1, 3, 5\}| - 1$ , ma  $\{1, 3, 5\}$  non è un circuito perché non è minimale. In generale, in un matroide d'accoppiamento, un circuito è formato da una coppia di nodi di cui uno è esposto in un accoppiamento massimo e l'altro è accoppiato (nello stesso accoppiamento). Nell'esempio sono circuiti tutte le coppie di nodi tranne la coppia  $\{3, 4\}$ . ■

11.41 ESERCIZIO. Si faccia vedere che il matroide trasversale non è altro che un caso speciale del matroide d'accoppiamento su un opportuno grafo bipartito. Tramite questa rappresentazione si caratterizzi l'espansione per un matroide trasversale. ■

11.42 ESEMPIO. Dato un insieme finito  $E$  sia  $\mathcal{U}$  la famiglia di tutti gli insiemi di  $E$  di cardinalità al più  $k$ . Si tratta ovviamente di un matroide, che viene detto *matroide uniforme*. I circuiti sono tutti gli insiemi di cardinalità  $k + 1$ . Inoltre  $\text{sp}(A) = A$  per ogni insieme di cardinalità minore di  $k$ , mentre  $\text{sp}(A) = E$  per gli altri. ■

11.43 ESEMPIO. Si consideri la figura 11.6. Sia  $E$  l'insieme dei punti  $P_1, \dots, P_7$ . Ogni sottoinsieme di  $\{P_1, \dots, P_7\}$  di al più tre punti non giacenti sulla medesima linea (incluso fra le linee anche la circonferenza) è un indipendente. Si provi che tale sistema è un matroide.

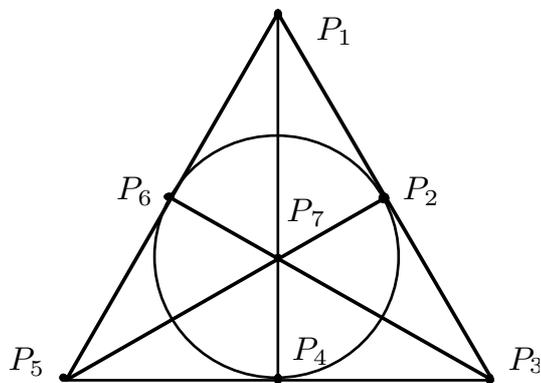


FIGURA 11.6

L'aspetto interessante di questo matroide è che non è riconducibile ad un matroide lineare, cosa invece possibile per tutti i precedenti matroidi (si vedano l'esempio 11.13 e l'esercizio 11.14). Si indichino con  $P_1, \dots, P_7$  dei vettori di dimensione opportuna associati ai rispettivi punti. Essendo  $P_1, P_5$  e  $P_6$  linearmente dipendenti, mentre due qualsiasi dei

tre vettori non lo sono, esistono coefficienti  $\alpha_1 \neq 0$ ,  $\alpha_2 \neq 0$ , tali che  $P_6 = \alpha_1 P_5 + \alpha_2 P_1$ . Analogamente si ha  $P_2 = \beta_1 P_1 + \beta_2 P_3$ , e  $P_4 = \gamma_1 P_3 + \gamma_2 P_5$ . Siccome  $P_2$ ,  $P_4$  e  $P_6$  sono linearmente dipendenti, esistono coefficienti  $\xi_1$ ,  $\xi_2$  e  $\xi_3$  non tutti nulli tali che  $\xi_1 P_2 + \xi_2 P_4 + \xi_3 P_6 = 0$ , da cui, sostituendo e raggruppando i termini,

$$(\xi_1 \beta_1 + \xi_3 \alpha_2) P_1 + (\xi_1 \beta_2 + \xi_2 \gamma_1) P_3 + (\xi_2 \gamma_2 + \xi_3 \alpha_1) P_5 = 0$$

$P_1$ ,  $P_3$  e  $P_5$  formano un indipendente. Allora i tre coefficienti della precedente espressione devono essere tutti e tre nulli, cioè

$$(\xi_1 \quad \xi_2 \quad \xi_3) \begin{pmatrix} \beta_1 & \beta_2 & 0 \\ 0 & \gamma_1 & \gamma_2 \\ \alpha_2 & 0 & \alpha_1 \end{pmatrix} = 0$$

che implica la singolarità della matrice, cioè  $\alpha_1 \beta_1 \gamma_1 + \alpha_2 \beta_2 \gamma_2 = 0$ . Inoltre  $P_7$  può essere espresso tramite tre diverse combinazioni lineari:

$$\begin{aligned} P_7 &= a_1 P_1 + a_2 P_4 = a_1 P_1 + a_2 (\gamma_1 P_3 + \gamma_2 P_5) = a_1 P_1 + a_2 \gamma_1 P_3 + a_2 \gamma_2 P_5 \\ P_7 &= b_1 P_3 + b_2 P_6 = b_1 P_3 + b_2 (\alpha_1 P_5 + \alpha_2 P_1) = b_2 \alpha_2 P_1 + b_1 P_3 + b_2 \alpha_1 P_5 \\ P_7 &= c_1 P_5 + c_2 P_2 = c_1 P_5 + c_2 (\beta_1 P_1 + \beta_2 P_3) = c_2 \beta_1 P_1 + c_2 \beta_2 P_3 + c_1 P_5 \end{aligned}$$

Eguagliando i coefficienti della prima e della seconda equazione e quelli della seconda e della terza si ottiene

$$(a_1 \quad a_2 \quad b_1 \quad b_2 \quad c_1 \quad c_2) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \gamma_1 & \gamma_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\alpha_2 & 0 & -\alpha_1 & \alpha_2 & 0 & \alpha_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -\beta_1 & -\beta_2 & 0 \end{pmatrix} = 0$$

che implica la singolarità della matrice, cioè  $\alpha_1 \beta_1 \gamma_1 - \alpha_2 \beta_2 \gamma_2 = 0$ . Combinando con il precedente risultato si ottiene  $\alpha_1 \beta_1 \gamma_1 = \alpha_2 \beta_2 \gamma_2 = 0$ . Ma questo risultato contraddice il fatto che tutti i coefficienti siano diversi da zero. ■

11.44 ESERCIZIO. Si caratterizzino i circuiti e le espansioni dell'esempio precedente. ■

### 11.3. Poliedro di un matroide

Si consideri ora il poliedro

$$P_{\mathbf{M}} := \text{conv} \left\{ e(A) \in \mathbb{R}^{|E|} : A \in \mathcal{M} \right\}$$

definito dall'involuppo convesso dei vettori d'incidenza degli indipendenti di un matroide  $\mathbf{M} = (E, \mathcal{M})$ . Vogliamo ora dimostrare che è possibile fornire una rappresentazione esterna di  $P_{\mathbf{M}}$  tramite la funzione di rango. Nel seguito useremo la notazione abbreviata  $x(S) := \sum_{e \in S} x_e$ .

11.45 TEOREMA.  $P_M = Q_M := \left\{ x \in \mathbb{R}_+^{|E|} : x(S) \leq r(S) \quad \forall S \subset E \right\}$ .

DIMOSTRAZIONE. Per dimostrare la tesi basta far vedere che ogni vettore d'incidenza di un indipendente è contenuto in  $Q_M$  (quindi  $P_M \subset Q_M$ ) e che le coordinate di un vertice generico di  $Q_M$  sono un vettore d'incidenza di un indipendente (quindi, essendo  $Q_M$  limitato,  $Q_M \subset P_M$ ). La prima parte è semplice e viene lasciata come esercizio. La dimostrazione della seconda parte è invece più complessa.

Un vertice  $\hat{x}$  di  $Q_M$  è caratterizzato dall'intersezione di  $|E|$  piani linearmente indipendenti, di cui una parte proviene dai vincoli di rango  $x(S) \leq r(S)$  e una parte dai vincoli di non negatività. Conviene considerare gli eventuali vincoli  $\hat{x}_e = 0$  per  $e \in A \subset E$  come una proiezione sul sottospazio generato da tali vincoli e quindi tener conto solo dei vincoli di rango per il matroide indotto da  $E \setminus A$ . Nel seguito quindi assumeremo senza perdita di generalità che vi siano solo vincoli di rango attivi.

Siano allora  $S$  e  $T$  tali che  $\hat{x}(S) = r(S)$  e  $\hat{x}(T) = r(T)$ . Possiamo notare che

$$\hat{x}(S) + \hat{x}(T) = r(S) + r(T) \geq r(S \cup T) + r(S \cap T) \geq \hat{x}(S \cup T) + \hat{x}(S \cap T) = \hat{x}(S) + \hat{x}(T)$$

dove la prima uguaglianza deriva dall'ipotesi che  $S$  e  $T$  definiscano il vertice  $\hat{x}$ , la prima disuguaglianza deriva dalla submodularità, la seconda disuguaglianza dall'ammissibilità del vertice  $\hat{x}$  e la seconda uguaglianza è una semplice identità algebrica. Quindi si deduce che  $r(S \cup T) + r(S \cap T) = \hat{x}(S \cup T) + \hat{x}(S \cap T)$  e in particolare, dato che  $r(S \cup T) \geq \hat{x}(S \cup T)$  e  $r(S \cap T) \geq \hat{x}(S \cap T)$ , si ha anche  $\hat{x}(S \cup T) = r(S \cup T)$  e  $\hat{x}(S \cap T) = r(S \cap T)$ .

Esiste allora un reticolo di sottoinsiemi chiuso rispetto all'intersezione e all'inclusione che definiscono tutti i piani passanti per un vertice. Vogliamo ora dimostrare che esiste nel reticolo una catena di  $|E|$  sottoinsiemi ordinati per inclusione stretta (e quindi di cardinalità  $1, 2, \dots, |E|$ ).

Si consideri la sottomatrice  $M$  della matrice dei vincoli, le cui righe sono i vettori d'incidenza dei sottoinsiemi del reticolo. Ogni riga ha  $|E|$  elementi e siccome queste righe definiscono un vertice la matrice ha rango pieno pari a  $|E|$ . Si supponga ora che la minima cardinalità dei sottoinsiemi del reticolo sia maggiore di uno e sia  $\hat{A}$  un sottoinsieme di minima cardinalità. Siccome gli insiemi sono chiusi rispetto all'intersezione, per ogni  $A$  del reticolo si deve avere  $\hat{A} \cap A = \emptyset$  oppure  $\hat{A} \cap A = \hat{A}$ , altrimenti nel reticolo ci sarebbe un sottoinsieme di cardinalità minore. Questo fatto implica che le colonne di  $M$  corrispondenti agli elementi di  $\hat{A}$  sono uguali e quindi  $M$  non può avere rango pieno. Quindi i sottoinsiemi del reticolo di cardinalità minima sono costituiti da singoli elementi. Si scelga ora arbitrariamente uno di questi elementi e si elimini da  $M$  la colonna corrispondente all'elemento e la riga corrispondente al sottoinsieme, che indichiamo con  $A_1$ . La nuova matrice ottenuta deve avere rango pieno (stavolta pari a  $|E| - 1$ ).

Il ragionamento procede in modo ricorsivo producendo un ordinamento  $e_1, e_2, \dots, e_{|E|}$  di  $E$  e un elenco di sottoinsiemi  $A_1, A_2, \dots, A_{|E|}$  tali che  $e_k \in A_k$  e  $A_k \subset \bigcup_{i=1}^k e_i$ . Sfruttando la chiusura rispetto all'unione basta ora definire  $D_k := \bigcup_{i=1}^k A_i = \bigcup_{i=1}^k e_i$  e i sottoinsiemi  $D_k$  costituiscono la catena di sottoinsiemi ordinati per inclusione stretta.

Il sistema  $\hat{x}(D_k) = r(D_k)$ ,  $k = 1, \dots, |E|$ , è immediatamente risolvibile e dà come soluzione  $\hat{x}_1 = r(D_1)$ ,  $\hat{x}_k = r(D_k) - r(D_{k-1})$ ,  $k = 2, \dots, |E|$  (per semplicità di notazione le variabili sono ordinate come  $e_1, e_2, \dots, e_{|E|}$ ). Siccome  $D_k = D_{k-1} \cup \{e_k\}$  e  $e_k \notin D_{k-1}$  si ha

$$r(D_k) = r(D_{k-1} \cup \{e_k\}) \leq r(D_{k-1}) + r(\{e_k\}) \leq r(D_{k-1}) + 1$$

e quindi  $\hat{x}_k \in \{0, 1\}$ .

Resta da dimostrare ora che il vettore d'incidenza così ottenuto corrisponde ad un indipendente. Si indichi  $I_k := \bigcup_{i=1}^k \{e_i : \hat{x}_i = 1\}$ . Dimostreremo per induzione che tutti gli  $I_k$  sono

indipendenti. Supponiamo per semplicità che  $I_1 \neq \emptyset$  (altrimenti basta cominciare dal primo insieme non vuoto, necessariamente di un elemento). Siccome  $|I_1| = 1 = r(I_1)$ ,  $I_1$  è un indipendente. Sia ora  $k$  tale che  $|I_k| = |I_{k-1}| + 1$ . Questo avviene solo se  $r(D_k) = r(D_{k-1}) + 1$  e quindi, aggiungendo  $e_k$  a  $I_{k-1}$  si ottiene un altro indipendente di cardinalità superiore. ■

Il problema  $\max_{A \in \mathcal{M}} \sum_{e \in A} w(e)$  diventa pertanto un problema di programmazione lineare, anche se con un numero esponenziale di vincoli:

$$\begin{aligned} \max \quad & \sum_{e \in E} w(e) x(e) \\ & \sum_{e \in S} x(e) \leq r(S) \quad \forall S \subset E \\ & x(e) \geq 0 \end{aligned} \quad (11.2)$$

il cui duale è

$$\begin{aligned} \max \quad & \sum_{S \subset E} r(S) u(S) \\ & \sum_{S \ni e} u(S) \geq w(e) \quad \forall e \in E \\ & u(S) \geq 0 \end{aligned}$$

11.46 ESERCIZIO. Si dimostri in modo alternativo la correttezza dell'algoritmo greedy, verificando le condizioni di complementarità per la base (nel duale) formata dagli insiemi  $D_1 = \{e_1\}$ ,  $D_2 = \{e_1, e_2\}$ , ...,  $D_{|E|} = E$ , dove gli elementi di  $E$  sono stati ordinati in ordine decrescente di  $w(e)$ . ■

11.47 ESERCIZIO. Siano  $x^1$  e  $x^2$  due vertici di  $Q_M$  corrispondenti a due basi del matroide. Si dimostri che  $x^1$  e  $x^2$  appartengono al medesimo spigolo se e solo se  $x^1 \in N(x^2)$  (e viceversa) con  $N(x)$  intorno definito da (11.1). ■

Vogliamo ora vedere se la rappresentazione di  $P_M$  data da  $Q_M$  è ridondante, ovvero vogliamo vedere quali vincoli generano faccette di  $P_M$ . È facile vedere che se non esistono sottoinsiemi dipendenti formati da un singolo elemento (in tal caso questi elementi potrebbero essere omessi del tutto dalla definizione dell'insieme  $E$  perché non farebbero parte di nessun insieme indipendente), allora  $P_M$  ha dimensione piena e ogni vincolo di non negatività definisce una faccetta.

Per quel che riguarda i vincoli  $x(A) \leq r(A)$  si consideri in particolare un insieme  $A = \text{sp}(A)$ . Sia  $\hat{x}$  tale che  $\hat{x}(e) > 0$  se  $e \in A$ ,  $\hat{x}(e) := 0$  altrimenti ed inoltre  $\hat{x}(A) = r(A)$ . Si è visto come, per due generici insiemi  $S$  e  $T$ ,  $\hat{x}(S) = r(S)$  e  $\hat{x}(T) = r(T)$  implicano  $\hat{x}(S \cup T) = r(S \cup T)$ . Si supponga allora che  $\hat{x}(S) = r(S)$  per un certo  $S$  e quindi  $\hat{x}(S \cup A) = r(S \cup A)$ . Per l'ipotesi su  $\hat{x}$  si ha  $\hat{x}(S \cup A) = \hat{x}(A)$ . Se  $S$  non è contenuto in  $A$  si ha  $r(S \cup A) > r(A)$  per l'ipotesi  $A = \text{sp}(A)$  e quindi si ottiene la contraddizione  $\hat{x}(A) > r(A)$ . Se  $S$  è contenuto in  $A$  può avvenire in generale che sia  $\hat{x}(A) = r(A)$  e  $\hat{x}(S) = r(S)$ . Affinché ciò sia impossibile e quindi la diseuguaglianza  $x(A) \leq r(A)$  definisca una faccetta bisogna introdurre un'ipotesi sul matroide.

11.48 DEFINIZIONE. Un insieme  $A \subset E$  viene detto separabile se può essere partizionato in due sottoinsiemi  $S$  e  $T$  tali che  $r(S) + r(T) = r(A)$ . ■

Non è difficile vedere che condizione necessaria e sufficiente per la separabilità è che, per ogni massimale  $B \subset A$ ,  $B \cap S$  sia massimale in  $S$ .

Supponendo ora che l'insieme  $A = \text{sp}(A)$  non sia separabile si prenda un punto  $\hat{x}$  che sia la combinazione convessa con coefficienti uguali di tutti i massimali  $B_1, B_2, \dots, B_q$  in  $A$ . Per ogni  $e \in A$  sia  $q(e)$  il numero di massimali che contengono  $e$ . Allora  $\hat{x}$  è dato da  $\hat{x}(e) := q(e)/q$ . Si consideri ora

$$\sum_{e \in S} \hat{x}(e) = \frac{1}{q} \sum_{e \in S} q(e) = \frac{1}{q} \sum_{i=1}^q |B_i \cap S|$$

Se  $S = A$  si trova immediatamente  $\hat{x}(A) = r(A)$ . Se invece  $S \subset A$  l'ipotesi di non separabilità implica che esiste almeno un  $B_i$  tale che  $|B_i \cap S| < r(S)$  e quindi si ha che  $\hat{x}(S) < r(S)$ . Allora  $x(A) \leq r(A)$  definisce una faccetta. Se invece  $A$  è separabile la disuguaglianza  $x(A) \leq r(A)$  è ovviamente implicata da  $x(S) \leq r(S)$  e  $x(T) \leq r(T)$ . Abbiamo allora dimostrato il seguente risultato:

11.49 TEOREMA. *Le faccette di  $P_M$  sono generate dai vincoli di non negatività e dai vincoli di rango  $x(A) \leq r(A)$  se  $A = \text{sp}(A)$  e  $A$  non è separabile.* ■

11.50 ESEMPIO. Si consideri un matroide grafico. Gli insiemi separabili sono quelli che consistono di più componenti connesse, oppure quelli per i quali esiste almeno un arco la cui rimozione sconnette l'insieme. Inoltre per ogni insieme connesso  $A$  di archi  $\text{sp}(A)$  consiste in tutti gli archi incidenti nei nodi incidenti ad archi di  $A$ . Conviene allora riformulare gli insiemi per cui  $A = \text{sp}(A)$  come  $E(S)$  per un assegnato insieme  $S$  di nodi tale che  $E(S)$  sia non separabile. Quindi si ha

$$P_M = \left\{ x \geq 0 : \sum_{e \in E(S)} x_e \leq |S| - 1, \quad \forall S \subset N, \quad \text{non separabile} \right\} \quad (11.3)$$

Si considerino i seguenti grafi.

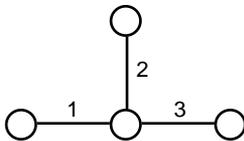


FIGURA 11.7

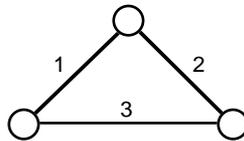


FIGURA 11.8

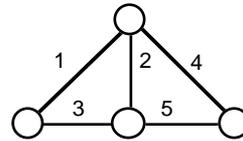


FIGURA 11.9

Nel grafo di sinistra ogni sottoinsieme di archi è uguale alla sua espansione dato che il grafo è già di per sé un albero. Tuttavia ogni insieme è decomponibile, per cui sono sufficienti a descrivere il poliedro (rappresentato in figura 11.10) le sei disuguaglianze  $0 \leq x_i \leq 1$ ,  $i = 1, 2, 3$ . Nel grafo di mezzo gli insiemi uguali alla propria espansione sono  $\{1, 2, 3\}$ ,  $\{1\}$ ,  $\{2\}$ ,  $\{3\}$ . Inoltre  $\{1, 2, 3\}$  non è separabile. Quindi il poliedro (rappresentato in figura 11.11) è definito da  $0 \leq x_i \leq 1$ ,  $i = 1, 2, 3$ , e  $x_1 + x_2 + x_3 \leq 2$ .

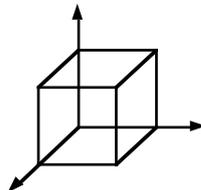


FIGURA 11.10

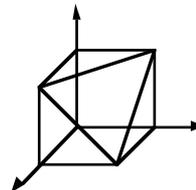


FIGURA 11.11

L'esempio del grafo di figura 11.9 è leggermente più complesso. Il poliedro del relativo matroide grafico è rappresentabile dalle seguenti disequazioni:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &\leq 2 \\ x_2 + x_4 + x_5 &\leq 2 \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 &\leq 3 \\ 0 \leq x_i &\leq 1, \quad i = 1, \dots, 5 \end{aligned}$$

■

11.51 ESERCIZIO. Questo esercizio riprende gli esercizi 11.38 e 11.41 (e li svolge in parte). Si consideri il grafo in figura 11.12.

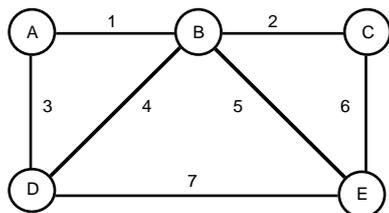


FIGURA 11.12

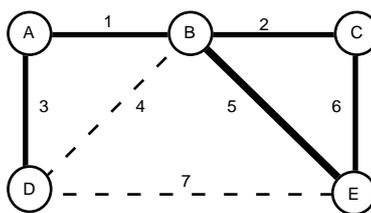


FIGURA 11.13

Dal grafo viene definito il matroide trasversale  $(E, T)$  dove  $E$  è l'insieme degli archi e gli insiemi che determinano gli insiemi trasversali sono indotti dai nodi e corrispondono agli archi incidenti nei nodi. Quindi  $E_A = \{1, 3\}$ ,  $E_B = \{1, 2, 4, 5\}$ ,  $E_C = \{2, 6\}$ ,  $E_D = \{3, 4, 7\}$ ,  $E_E = \{5, 6, 7\}$ . Da questo matroide si ricava un matroide d'accoppiamento su un grafo bipartito (vedi figura 11.14) in cui i nodi in basso in figura sono associati ai sottoinsiemi (i nodi del grafo di figura 11.12 in questo caso) e quelli in alto agli elementi di  $E$  (gli archi in questo caso). In questo matroide di accoppiamento l'insieme di base sono i nodi in alto del grafo bipartito e gli indipendenti sono i sottoinsiemi dei nodi in alto per cui esiste un accoppiamento che li contiene. La mappa iniettiva richiesta per determinare se un sottoinsieme è un indipendente nel matroide trasversale corrisponde ad un accoppiamento sul grafo bipartito (vedi figura 11.15). Dai nodi accoppiati si determina l'indipendente del matroide trasversale (vedi figura 11.13).

Si fornisca la rappresentazione poliedrale (non ridondante) del matroide dell'esempio (suggerimento: oltre ai vincoli  $0 \leq x_i \leq 1, i = 1, \dots, 7$ , vi sono solo altre cinque disequazioni).■

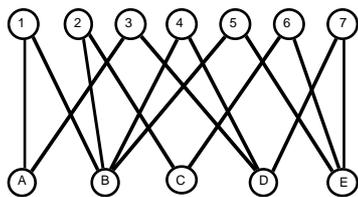


FIGURA 11.14

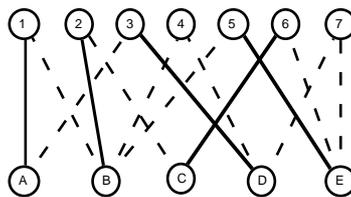


FIGURA 11.15

Si è visto nella sezione 6.6 che un problema di programmazione lineare si può risolvere in tempo polinomiale se il problema di separazione per il poliedro corrispondente è polinomiale. Il problema  $\max_{A \in \mathcal{M}} w(A)$  è polinomiale in virtù dell'algoritmo greedy (sempre che

‘ $A \in \mathcal{M}$ ?’ sia polinomiale). Sembra ragionevole chiedersi a questo punto se il problema di programmazione lineare (11.2) sia polinomiale, nonostante il numero esponenziale di vincoli. Per rispondere a questa domanda basta fornire un algoritmo polinomiale di separazione. Tale algoritmo effettivamente esiste, tuttavia la sua presentazione nel caso generale esula dai confini di questa trattazione in quanto richiederebbe l’introduzione e l’approfondimento del concetto di polimatroide e delle tecniche di minimizzazione per le funzioni submodulari. Il lettore interessato può fare riferimento alle sezioni III.3.6-7 di Nemhauser e Wolsey [1988]. Ci limitiamo a fornire un algoritmo di separazione per il caso particolare del poliedro di un matroide grafico nella formulazione (11.3) (esempio 11.50).

Sia assegnato un vettore  $\bar{x} \in \mathbb{R}^{|E|}$ . Ci chiediamo se  $\bar{x} \in P_M$  e, in caso contrario, quale fra le disequaglianze  $\sum_{e \in E(S)} x_e \leq |S| - 1$  sia la più violata (possiamo considerare tutte le disequaglianze per ogni  $S \subset N$  anche se alcune possono essere ridondanti). A questo fine si costruisca un grafo bipartito orientato dove i nodi di sinistra sono associati agli archi (e quindi vengono indicati con il simbolo  $E$ ) e quelli di destra ai nodi (e quindi vengono indicati con il simbolo  $N$ ). È presente un arco nel grafo bipartito se e solo se arco e nodo sono incidenti. Gli archi sono orientati da sinistra a destra e viene loro assegnato un intervallo di capacità  $[0, \infty)$ . Vengono introdotti inoltre altri due nodi, una sorgente  $s$  ed una destinazione  $t$ . La sorgente  $s$  è collegata con ogni nodo di  $E$  con un arco  $(s, e)$  di capacità  $[0, \bar{x}_e]$  e ogni nodo di  $N$  è collegato con la destinazione con un arco  $(i, t)$  di capacità  $[0, 1]$ . A questo punto si risolve un problema di massimo flusso. Se la minima capacità di taglio è inferiore a  $\sum_{e \in E} \bar{x}_e + 1$  allora tale taglio individua la disequaglianza maggiormente violata, altrimenti  $\bar{x}$  appartiene al poliedro.

Per verificare la correttezza di questa affermazione si indichi con  $E^-$  e  $N^-$  i nodi uniti a  $s$  in un taglio generico e con  $E^+$  e  $N^+$  quelli uniti a  $t$ . Si noti che la capacità del taglio è finita solo se non vi sono archi del grafo bipartito da  $E^-$  verso  $N^+$  ovvero se  $E^- \subset E(N^-)$ . Quindi si possono prendere in considerazione solo tagli per i quali  $E^- \subset E(N^-)$ . Per questi la capacità vale:

$$c(E^-, N^-) = \sum_{e \in E^+} \bar{x}_e + \sum_{i \in N^-} 1 = \sum_{e \in E^+} \bar{x}_e + |N^-| = \sum_{e \in E} \bar{x}_e - \sum_{e \in E^-} \bar{x}_e + |N^-|$$

Inoltre, fissato  $N^-$  la capacità diminuisce all’aumentare di  $E^-$ . Quindi, cercando la minima capacità di taglio, tanto vale considerare solo i tagli per cui  $E^- = E(N^-)$ . Quindi la minima capacità di taglio (e il massimo flusso) si possono esprimere come

$$\sum_{e \in E} \bar{x}_e + \min_{S \subset N} |S| - \sum_{e \in E(S)} \bar{x}_e$$

Può sorgere il problema che la minima capacità di taglio si abbia per  $S = \emptyset$ , situazione che non fornisce alcuna disequaglianza violata. Per escludere questo caso si obblighi a turno ogni nodo del grafo ad appartenere a  $S$  e si risolvano  $n$  problemi di massimo flusso. Per realizzare questa ‘prescrizione’ si può aggiungere un arco di capacità infinita da  $s$  ad un assegnato nodo  $i \in N$ . Con questo accorgimento la capacità di taglio non può essere maggiore di  $\sum_{e \in E} \bar{x}_e + 1$  (caso  $S = \{i\}$  e quindi  $E^- = \emptyset$ ). Se è minore allora si è individuata una disequaglianza violata.

11.52 ESEMPIO. Si consideri il grafo di figura 11.9 e sia assegnata la soluzione frazionaria  $\bar{x} = (1, 0.6, 0.6, 0.2, 0.5)$ . Il grafo per il calcolo del massimo flusso è rappresentato in figura 11.16 nel caso in cui il nodo obbligato è il nodo  $A$ . In figura è indicato anche il taglio minimo di valore  $0.2 + 0.5 + 1 + 1 + 1 = 3.7 < \sum_e \bar{x}_e + 1 = 3.9$ . Questo taglio identifica

l'insieme  $S = \{A, B, C\}$  che genera la diseuguaglianza violata. Infatti  $\bar{x}_1 + \bar{x}_2 + \bar{x}_3 = 2.2 > 2$ . In figura 11.17 è invece rappresentato il caso in cui è obbligato il nodo  $D$ . In questo caso il taglio di minima capacità vale proprio  $\sum_e \bar{x}_e + 1 = 3.9$  e quindi non vengono identificate diseuguaglianze violate.

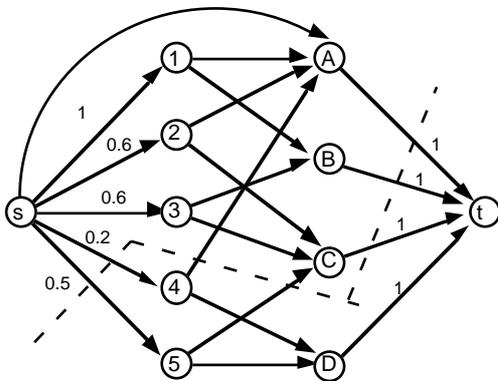


FIGURA 11.16

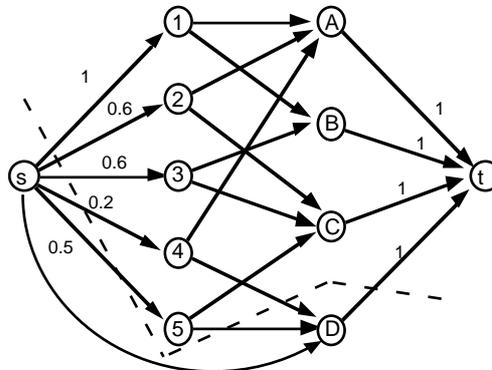


FIGURA 11.17

### 11.4. Matroidi duali

Si è visto che, data una collezione di sottoinsiemi  $A_1, \dots, A_m \subset E$ ,  $(E, \cup_i 2^{A_i})$  è un sistema di indipendenti. Se la collezione di insiemi è proprio l'insieme delle basi di un matroide, allora ovviamente il sistema è il matroide stesso. Il fatto interessante è che la collezione costituita dai complementi in  $E$  delle basi è ancora un matroide, che prende il nome di *matroide duale* di quello che definisce le basi.

11.53 TEOREMA. Siano  $B_1, \dots, B_m$  le basi di un matroide  $\mathbf{M} = (E, \mathcal{M})$  e sia  $B_i^* := E \setminus B_i$ . Allora il sistema  $\mathbf{M}^* := (E, \cup_i 2^{B_i^*})$  è un matroide, detto *matroide duale*.

DIMOSTRAZIONE. Per la dimostrazione si sfrutta la proprietà di scambio nella versione dell'esercizio 11.18. In base alla proprietà 1) dell'esercizio 11.18 basta dimostrare che per ogni coppia di basi  $B_1^*$  e  $B_2^*$  ed ogni  $e \in B_1^* \setminus B_2^*$  esiste sempre  $e' \in B_2^* \setminus B_1^*$  tale che  $B_1^* \cup \{e'\} \setminus \{e\} = B_k^*$  per qualche  $k$ . Si noti che  $B_1^* \setminus B_2^* = B_2 \setminus B_1$ . Siccome gli insiemi  $B_i$  sono basi di un matroide, per ogni  $e \in B_2 \setminus B_1$  esiste  $e' \in B_1 \setminus B_2 = B_2^* \setminus B_1^*$  tale che  $B_2 \cup \{e'\} \setminus \{e\} = B_k$  per qualche  $k$ . Siccome il complemento di  $B_2 \cup \{e'\} \setminus \{e\}$  è  $B_2^* \cup \{e\} \setminus \{e'\}$  la tesi è provata in base alla proprietà 2). ■

11.54 ESERCIZIO. Dimostrare che la funzione di rango  $r^*$  del matroide duale  $\mathbf{M}^*$  è legata alla funzione di rango  $r$  del matroide  $\mathbf{M}$  dalla relazione

$$r^*(S) = |S| + r(T \setminus S) - r(T) \quad \forall S \subset T$$

e quindi in particolare

$$r^*(S) = |S| + r(E \setminus S) - r(E) = |S| - (\rho - r(E \setminus S)) \tag{11.4}$$

■

11.55 ESEMPIO. Una base del matroide duale del matroide grafico  $\mathbf{F}$  è data da tutte le corde di un albero di supporto. Possiamo definire l'insieme delle corde di un albero come un insieme massimale di archi che può essere rimosso senza sconnettere il grafo e quindi sono certamente indipendenti del matroide duale tutti gli insiemi di corde che non sconnettono il grafo. Viceversa, se un insieme di archi sconnette il grafo significa che contiene un taglio e siccome in ogni taglio c'è almeno un arco di ogni albero di supporto, tale insieme di archi non può essere contenuto nel complementare di un albero di supporto e quindi si tratta di un insieme dipendente. Questo matroide viene detto *matroide cografico*.

Il rango di un insieme di archi del matroide cografico è dato da, particularizzando (11.4):

$$r^*(S) = |S| - (n - 1 - (n - p(S))) = |S| - (p(S) - 1)$$

dove  $p(S)$  è il numero di componenti connesse di  $E \setminus S$ . Un circuito del matroide cografico è un taglio del grafo. ■

11.56 ESERCIZIO. Siano  $E := \{1, 2, 3, 4, 5\}$ ,  $E_1 := \{1, 3\}$ ,  $E_2 := \{1, 5\}$ ,  $E_3 := \{2, 3, 4\}$ . Si elenchino le basi del matroide duale del matroide trasversale. ■

## 11.5. Intersezione di matroidi

Dati due sistemi di indipendenti  $\mathbf{S}_1 = (E, \mathcal{S}_1)$  e  $\mathbf{S}_2 = (E, \mathcal{S}_2)$  possiamo sempre costruire il sistema di indipendenti  $\mathbf{S} = (E, \mathcal{S}_1 \cap \mathcal{S}_2)$  che possiamo definire come intersezione dei due sistemi  $\mathbf{S} = \mathbf{S}_1 \cap \mathbf{S}_2$ . È banale verificare che  $\mathbf{S}$  è un sistema di indipendenti. Se i sistemi sono due matroidi  $\mathbf{M}_1 = (E, \mathcal{M}_1)$  e  $\mathbf{M}_2 = (E, \mathcal{M}_2)$ , l'intersezione di due matroidi  $\mathbf{S} = (E, \mathcal{M}_1 \cap \mathcal{M}_2)$  non è in generale un matroide (lo è ad esempio se uno dei matroidi è il matroide uniforme, ma in tutti gli altri esempi che si sono visti non lo è).

Tuttavia il sistema di indipendenti che si ottiene da due matroidi tramite la loro intersezione eredita abbastanza struttura dai due 'genitori' da permettere una risoluzione polinomiale del problema di trovare il sottoinsieme massimale di massimo peso. L'algoritmo è molto più complesso dell'algoritmo greedy, tuttavia rimane polinomiale.

L'intersezione di tre matroidi invece genera sistemi di indipendenti troppo generali per permettere algoritmi efficienti. Basterà notare che il problema del circuito hamiltoniano in un grafo orientato si può modellare come la ricerca di un insieme di cardinalità massima in un sistema di indipendenti ottenuto come intersezione di tre matroidi, due di partizione e la terza il matroide  $\mathbf{G}$  dell'esempio 11.7:  $E$  è l'insieme degli archi,  $\mathcal{P}_1$  viene ottenuto partizionando gli archi secondo i nodi da cui escono e  $\mathcal{P}_2$  viene ottenuto partizionando gli archi secondo i nodi in cui entrano. Quindi  $\mathcal{P}_1 \cap \mathcal{P}_2$  contiene come sottoinsiemi solo cicli oppure cammini orientati. Il terzo matroide  $\mathbf{G}$  (definito sugli archi senza tener conto della loro orientazione) è definito da una famiglia di sottoinsiemi di archi che hanno al più un circuito. È evidente che esistono cammini hamiltoniani se e solo se i sottoinsiemi massimi in  $\mathcal{P}_1 \cap \mathcal{P}_2 \cap \mathcal{G}$  hanno cardinalità  $n$  e quindi la ricerca di un elemento massimo nell'intersezione di tre matroidi è un problema **NP**-difficile.

Per quel che riguarda l'intersezione di due matroidi presentiamo ora un algoritmo per la ricerca di un sottoinsieme massimo. L'algoritmo sfrutta la proprietà di scambio, in particolare il teorema 11.50, e usa il seguente risultato di dualità debole per garantire la terminazione con la soluzione ottima.

11.57 TEOREMA. Sia  $\mathbf{S} = (E, \mathcal{M}_1 \cap \mathcal{M}_2)$  con  $\mathbf{M}_1 = (E, \mathcal{M}_1)$  e  $\mathbf{M}_2 = (E, \mathcal{M}_2)$  due matroidi, con rispettive funzioni di rango  $r_1$  e  $r_2$ . Allora per ogni  $S \subset \mathcal{M}_1 \cap \mathcal{M}_2$  e ogni  $T \subset E$  vale (sia  $\bar{T} := E \setminus T$ )

$$|S| \leq r_1(T) + r_2(\bar{T}) \quad (11.5)$$

DIMOSTRAZIONE. Siccome  $S \in \mathcal{M}_1 \cap \mathcal{M}_2$  allora anche  $S \cap T$  e  $S \cap \bar{T}$  sono indipendenti in entrambi i matroidi. Quindi:

$$|S| = |S \cap T| + |S \cap \bar{T}| = r_1(S \cap T) + r_2(S \cap \bar{T}) \leq r_1(T) + r_2(\bar{T})$$

■

Vedremo fra poco che esistono sempre sottoinsiemi  $\hat{S}$  e  $\hat{T}$  per i quali si ha eguaglianza in (11.5) e quindi  $\hat{S}$  è necessariamente ottimo. La dimostrazione di questo fatto si baserà costruttivamente sull'algoritmo.

Partendo da un massimale  $S \in \mathcal{M}_1 \cap \mathcal{M}_2$  l'algoritmo esegue ad ogni iterazione un aumento di un'unità in modo del tutto simile all'algoritmo dell'accoppiamento di cardinalità massima. Ad ogni iterazione, dato un massimale  $S$  si costruisce il seguente grafo orientato ausiliario  $G(S)$  a tre livelli: al primo livello vi sono due nodi che indichiamo con  $s$  e  $t$ , al secondo livello vi sono nodi associati agli elementi in  $\bar{S} := E \setminus S$  e al terzo livello vi sono nodi associati agli elementi in  $S$ . Gli archi di  $G(S)$  sono definiti dai seguenti quattro insiemi:

$$\begin{aligned} A_s &:= \{(s, e) : S \cup \{e\} \in \mathcal{M}_1, e \notin S\} & A_t &:= \{(e, t) : S \cup \{e\} \in \mathcal{M}_2, e \notin S\} \\ A_1 &:= \{(e, e') : e \notin S, e' \in S, S \cup \{e\} \setminus \{e'\} \in \mathcal{M}_2\} \\ A_2 &:= \{(e, e') : e \in S, e' \notin S, S \cup \{e'\} \setminus \{e\} \in \mathcal{M}_1\} \end{aligned}$$

In figura 11.18 si vede un insieme massimale  $S = \{2, 4, 5, 8\} \subset E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ . Gli indipendenti devono esserlo sia rispetto al matroide grafico del grafo di sinistra che rispetto a quello di destra. Come si vede  $S$  è massimale perché gli elementi 1 e 2 genererebbero un circuito in  $\mathbf{M}_1$  e gli elementi 6 e 7 genererebbero un circuito in  $\mathbf{M}_2$ . In figura 11.19 si vede il grafo orientato  $G(S)$ .

Un cammino orientato in  $G(S)$  che parta da  $s$  può essere interpretato come una sequenza di operazioni di inserzione e rimozioni di elementi da e in  $S$ . L'attraversamento di un nodo del secondo livello corrisponde all'inserzione dell'elemento corrispondente e l'attraversamento di un nodo del terzo livello corrisponde alla rimozione di un elemento. Il modo come sono definiti gli archi garantisce che dopo l'operazione di rimozione l'insieme  $S$  modificato sia ancora indipendente. Se il cammino riesce a raggiungere il nodo  $t$  allora l'ultima inserzione non genera circuiti e il nuovo insieme  $S$  ha un elemento di più.

C'è da tener conto di un fatto: nel momento in cui  $S$  viene modificato tramite inserzioni e rimozioni, dovremmo forse modificare anche il grafo  $G(S)$ , la cui costruzione si basa su  $S$ , e quindi non avrebbe molto senso poi cercare un cammino minimo in un grafo che risulterebbe 'obsoleto'. A questo scopo si tenga presente che gli archi uscenti da un nodo  $e$  del secondo livello e diretti verso il terzo corrispondono al circuito generato da  $e$  in  $\mathbf{M}_1$  e gli archi entranti da un nodo  $e$  del secondo livello e provenienti dal terzo corrispondono al circuito generato da  $e$  in  $\mathbf{M}_2$ . Ora l'elemento  $e'$  che viene rimosso dopo l'inserzione di  $e$  appartiene al circuito generato da  $e$ . Se ora si reinserisse  $e'$  si otterrebbe lo stesso circuito e quindi non si modifica la struttura degli archi. L'unico cambiamento che si opera nel grafo è dovuto allo scambio di livello che si opera fra gli elementi  $e$  e  $e'$ . Se il cammino è semplice questo cambiamento è ininfluente sul cammino stesso.

In figura 11.20 si vede un possibile cammino che corrisponde all'inserzione di 3 seguita dalla rimozione di 4 e dalla successiva inserzione di 7. Il nuovo insieme  $S$  (necessariamente massimo) è rappresentato in figura 11.21.

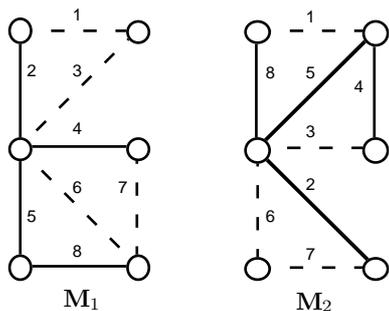


FIGURA 11.18

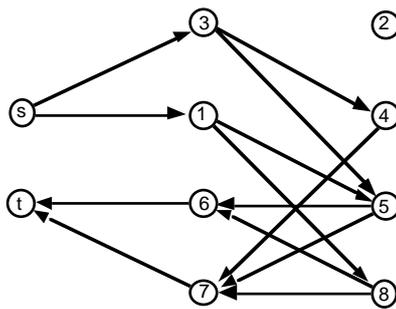


FIGURA 11.19

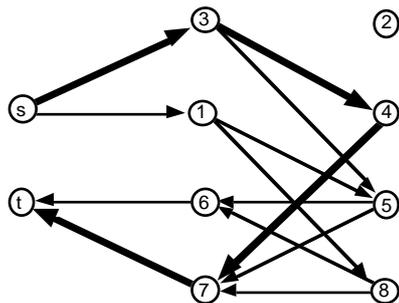


FIGURA 11.20

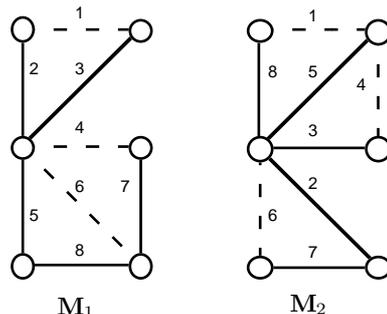


FIGURA 11.21

Se non esistono cammini da  $s$  a  $t$  allora l'insieme  $S$  è il massimo cercato.

11.58 TEOREMA. Si supponga che nel grafo ausiliario  $G(S)$  non esistano cammini  $s \rightarrow t$ . Siano  $S_0 \subset S$  e  $\bar{S}_0 \subset \bar{S}$  i nodi raggiungibili da  $s$  e siano  $S_1 \subset S$  e  $\bar{S}_1 \subset \bar{S}$  i nodi non raggiungibili. Allora

$$|S| = r_2(S_0 \cap \bar{S}_0) + r_1(S_1 \cap \bar{S}_1)$$

e quindi  $S$  è ottimo.

DIMOSTRAZIONE. Ogni elemento di  $\bar{S}_0$  genera un circuito in  $M_2$  i cui elementi di  $S$  sono necessariamente tutti in  $S_0$  (altrimenti qualche elemento di  $S_1$  sarebbe raggiungibile da  $\bar{S}_0$ ). Allora  $r_2(S_0 \cap \bar{S}_0) = r_2(S_0)$ . Inoltre  $S_0$  è indipendente e quindi  $r_2(S_0) = |S_0|$ . Analogamente ogni elemento di  $\bar{S}_1$  genera un circuito in  $M_1$  i cui elementi di  $S$  sono necessariamente tutti in  $S_1$  (altrimenti qualche elemento di  $\bar{S}_1$  sarebbe raggiungibile da  $S_0$ ). Allora  $r_1(S_1 \cap \bar{S}_1) = r_1(S_1)$ . Inoltre  $S_1$  è indipendente e quindi  $r_1(S_1) = |S_1|$ . Siccome  $|S| = |S_0| + |S_1|$  si ha l'eguaglianza espressa nella tesi. L'ottimalità discende dal teorema 11.57. ■

11.59 ESEMPIO. Si consideri il grafo di figura 11.22 con 9 nodi e 16 archi. Vogliamo dimostrare che non è decomponibile in due alberi di supporto disgiunti negli archi (si noti che il numero di archi è esattamente  $2(n - 1)$ ). Per trovare due alberi di supporto disgiunti in un grafo si può considerare l'intersezione di un matroide grafico con il suo duale. Infatti gli indipendenti di un matroide grafico duale sono insiemi di archi che non sconnettono il grafo e quindi, se l'insieme massimale  $S$  è un albero di supporto e non sconnette il grafo, c'è la garanzia che nell'insieme complementare dell'albero si può trovare un altro albero.

Se si procede a generare l'insieme  $S$  inserendo, quando possibile, gli elementi nell'ordine di indice, si ottiene il massimale indicato in figura 11.23. Si noti che l'arco 2 non è stato inserito perché, insieme all'arco 1 già scelto, avrebbe sconnesso il grafo. Anche l'inserimento

degli archi 4, 5, 11 e 14 avrebbe provocato la sconnessione. Inoltre gli archi da 11 a 16 non sono stati inseriti perché avrebbero generato dei circuiti (nel senso grafico).

Il grafo ausiliario è raffigurato in figura 11.24. Per chiarezza di disegno si è scelto di indicare con tratto continuo gli archi orientati da sinistra verso destra, con tratteggio quelli da destra verso sinistra e con tratteggio in grosso quelli che vanno in ambedue le direzioni (in realtà si tratta di due archi antiparalleli, ma questo avrebbe complicato il disegno). Come si può vedere non ci sono cammini da  $s$  a  $t$  e in figura è indicata anche la partizione degli elementi raggiungibili e non raggiungibili. Si verifica che  $r_2(S_0 \cap \bar{S}_0) = r_2(\{1, 2, 3, 4, 5\}) = 2$ ,  $r_1(\{6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16\}) = 5$  e  $S = \{1, 3, 6, 7, 8, 9, 10\}$ ,  $|S| = 7$ .

Come esercizio si provi ad aggiungere un arco al grafo e vedere se si riescono a trovare due alberi di supporto disgiunti. ■

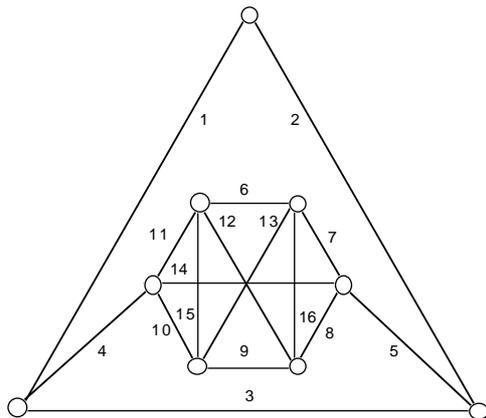


FIGURA 11.22

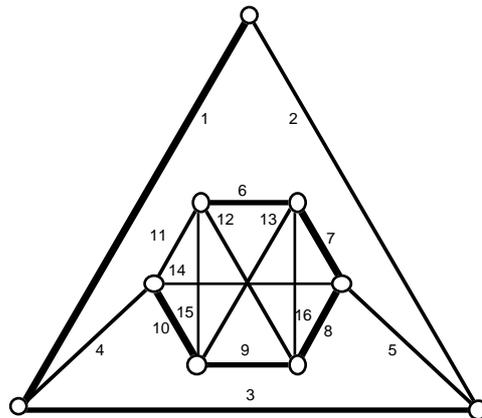


FIGURA 11.23

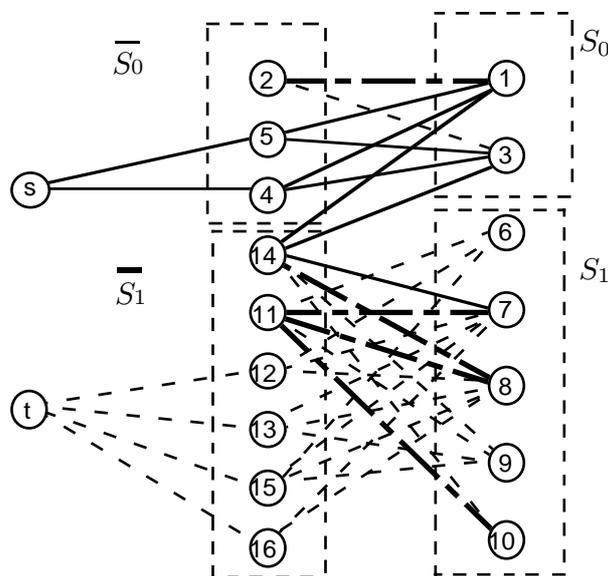


FIGURA 11.24

È chiaro che gli indipendenti dell'intersezione di due matroidi  $\mathbf{M}_1, \mathbf{M}_2$  sono contenuti nel poliedro:

$$Q_{\cap} := \left\{ x \in \mathbb{R}_+^{|E|} : x(S) \leq \min \{r_1(S); r_2(S)\} \quad \forall S \subset E \right\}$$

Il fatto notevole è che i vertici di  $Q_{\cap}$  sono interi e quindi rappresentano gli indipendenti dell'intersezione dei matroidi. Questo risultato è dovuto a Edmonds [1970] e non verrà provato in questa sede. Il lettore può trovare ampio riferimento in Nemhauser e Wolsey [1988] (pagg. 678 e seg.) oppure in Cook et al. [1998] (pagg. 297 e seg.).

Per ciò che riguarda la massimizzazione di  $\sum_{e \in A} w_e$  fra gli indipendenti dell'intersezione di matroidi, vi è un elegante algoritmo proposto da Lawler [1975] che si basa sul medesimo grafo ausiliario usato per l'algoritmo di massima cardinalità. Questa volta si inizializza con  $S := \emptyset$  e si cercano cammini di minimo costo con il minor numero possibile di archi. Il costo degli archi orientati dal secondo al terzo livello è dato dalla differenza fra il costo dell'elemento che si rimuove e il costo dell'elemento che si inserisce e il costo degli archi orientati dal secondo al primo livello è pari all'opposto del costo dell'elemento che si inserisce. Gli altri archi hanno costo nullo. La dimostrazione di correttezza di tale algoritmo non è elementare e pertanto si rinvia alla citata letteratura.

## 11.6. Minimi alberi di supporto

Un problema di grandissima rilevanza pratica e teorica è costituito dalla ricerca di un albero che connetta tutti i nodi di un grafo e abbia la somma dei costi dei suoi archi minima. Questo problema prende il nome di *minimo albero di supporto* (*minimal spanning tree*). Trattandosi di basi del matroide grafico il problema si risolve facilmente con l'algoritmo greedy una volta stabilito come determinare, per ogni arco che si vorrebbe aggiungere, se si genera un circuito oppure no. Gli archi aggiunti di volta in volta formano un certo numero di insiemi sconnessi. Un arco da inserire genera un circuito se e solo se i suoi estremi appartengono alla stessa componente connessa. Se questo non avviene allora l'arco viene aggiunto e le due componenti connesse vengono fuse in una componente connessa più grande. Una struttura dati che riesce a gestire efficacemente questo tipo d'informazione è già stata presentata nel capitolo 10 per rappresentare i germogli di un accoppiamento. In modo analogo la fase di costruzione dell'albero ha una complessità di  $O(m \log n)$ , che è pari alla complessità  $O(m \log m) = O(m \log n)$  di ordinare preventivamente gli archi. Quindi, usando questo metodo il problema si risolve in tempo  $O(m \log n)$ . La complessità della costruzione dell'albero si può ulteriormente abbassare ad una funzione 'quasi' lineare in  $m$  usando gli accorgimenti descritti in Tarjan [1983]. Questo algoritmo viene generalmente citato come *algoritmo di Kruskal*, in quanto fu presentato per la prima volta da Kruskal [1956] (senza tuttavia la speciale struttura dati).

Vi sono altri algoritmi per il problema del minimo albero di supporto che si basano su altre idee originate dalla struttura stessa del grafo, anziché da quella più generale di matroide. Consideriamo un taglio qualsiasi nel grafo e l'arco  $\hat{e}$  (o gli archi) di minimo costo del taglio. Supponiamo che un minimo albero di supporto  $T$  non contenga  $\hat{e}$ . Si aggiunga allora  $\hat{e}$  all'albero, generando così un circuito. Almeno un altro arco  $\tilde{e}$  del circuito deve appartenere al taglio. Se si rimuove  $\tilde{e}$  da  $T \cup \hat{e}$  si ottiene un altro albero  $T'$  il cui costo deve essere inferiore a quello di  $T$  per l'ipotesi sui costi di  $\hat{e}$  e  $\tilde{e}$ . Ma questo contraddice l'ottimalità di  $T$ .

Quindi, se si costruisce un albero prendendo per ogni taglio l'arco di costo minimo, certamente si ottiene un minimo albero di supporto. Quest'idea può essere realizzata algoritmicamente in vari modi. Due algoritmi in particolare meritano di essere menzionati e cioè

l'algoritmo di Prim e l'algoritmo di Borůvka. La storia del problema del minimo albero di supporto è abbastanza interessante ed è riportata in dettaglio nell'articolo di Graham e Hell [1985]. Sembra che il primo ad occuparsi del problema sia stato Borůvka in connessione con la costruzione della rete elettrica nella Moravia meridionale negli anni Venti (Borůvka [1926a], Borůvka [1926b]). Questi articoli furono poi seguiti da un lavoro di Jarník [1930] dove di fatto si anticipa l'algoritmo di Prim. Questi risultati tuttavia rimasero ignorati a lungo tempo a causa della loro scarsa accessibilità. Negli anni Cinquanta il problema fu riesaminato e si ebbero gli articoli di Kruskal [1956] e di Prim [1957] (che comunque citano Borůvka [1926a]) e di Dijkstra [1959], che indipendentemente presentò l'algoritmo di Prim insieme con il suo famoso algoritmo del cammino minimo.

L'algoritmo di Prim si basa sull'idea di aggiungere un arco ad un albero che supporta in modo ottimo un sottoinsieme  $S$  di nodi. In base alle precedenti considerazioni l'arco viene scelto come l'arco di minimo costo del taglio generato da  $S$ . L'insieme  $S$  viene quindi aggiornato aggiungendovi l'altro estremo dell'arco e la procedura si ripete finché  $S$  contiene tutti i nodi. La procedura viene inizializzata prendendo  $S = \{s\}$  con  $s$  nodo arbitrario. Per realizzare efficientemente la procedura conviene trovare l'arco di minimo costo sfruttando l'informazione ottenuta nei precedenti passi. Dato  $S \subset N$  sia  $T(S)$  il minimo albero di supporto su  $S$  e per ogni  $j \notin S$  si definisca

$$\begin{aligned}\rho_j(S) &:= \min \{w(e) : e \in Q(S) \cap Q(\{j\})\} \\ e_j(S) &:= \{e \in Q(S) \cap Q(\{j\}) : w(e) = \rho_j(S)\}\end{aligned}$$

e sia

$$k(S) := \operatorname{argmin}_j \rho_j(S) \quad (11.6)$$

Allora

$$\begin{aligned}T(S \cup \{k(S)\}) &:= T(S) \cup \{e_{k(S)}(S)\} \\ \rho_j(S \cup \{k(S)\}) &:= \min \{w(e) : e \in Q(S \cup \{k(S)\}) \cap Q(\{j\})\} = \\ \min \{ \min \{w(e) : e \in Q(S) \cap Q(\{j\})\} ; w((kj)) \} &= \min \{ \rho_j(S) ; w((kj)) \} \\ e_j(S \cup \{k(S)\}) &:= \begin{cases} e_j(S) & \text{se } \rho_j(S \cup \{k(S)\}) = \rho_j(S) \\ (k, j) & \text{se } \rho_j(S \cup \{k(S)\}) = w((kj)) \end{cases}\end{aligned} \quad (11.7)$$

L'aggiornamento (11.7) costa globalmente  $O(m)$  mentre il calcolo del minimo in (11.6) costa  $O(n)$  ad ogni iterazione e va ripetuto  $n$  volte. Complessivamente quindi l'algoritmo ha complessità  $O(n^2)$ . Si può notare la strettissima parentela dell'algoritmo di Prim con quello di Dijkstra. Come per quell'algoritmo il valore di complessità  $O(n^2)$  non può essere abbassato per grafi densi ( $m = \Omega(n^2)$ ) e in questi casi l'algoritmo di Prim è preferibile a quello di Kruskal che richiede un tempo  $O(m \log n) = O(n^2 \log n)$ .

Per grafi sparsi (cioè  $m = O(n)$ ) è più conveniente usare una struttura a 'heap' per i valori  $\rho_j(S)$ . In questo modo il calcolo (11.6) richiede tempo costante. Tuttavia bisogna aggiornare lo 'heap' ad ogni aggiornamento (11.7) e ad ogni rimozione della radice dello 'heap'. Quindi discende una complessità globale  $O(m \log n)$  pari a quella dell'algoritmo di Kruskal.

L'algoritmo di Borůvka opera come l'algoritmo di Prim cominciando però la costruzione dell'albero a partire da tutti i nodi contemporaneamente anziché da un solo nodo. Preventivamente si assegnino in modo arbitrario etichette da 1 a  $|E|$  a tutti gli archi. Ad un passo generico dell'algoritmo è disponibile una foresta  $F$  formata da un certo numero di alberi  $T_1, \dots, T_p$  che sono minimi alberi di supporto per i rispettivi insiemi di nodi  $S_1, \dots, S_p$ . Sia  $\hat{e}_i$  l'arco di costo minimo e, a parità di costo, di etichetta minima fra gli archi del taglio

$Q(S_i)$ . Si aggiorni  $F := \cup_i T_i \cup_i \{\hat{e}_i\}$ . Se  $F$  è un albero l'algoritmo è terminato altrimenti, si ripete l'iterazione. Siccome ad ogni iterazione il numero di componenti connesse almeno si dimezza, il numero di iterazioni è  $O(\log n)$ . Tuttavia è necessario un lavoro alquanto complesso di aggiornamento dati e strutture e alla fine si perviene comunque alla medesima complessità dell'algoritmo di Kruskal, cioè  $O(m \log n)$ , oppure con una più raffinata gestione dei dati a  $O(m \log \log n)$  (Yao [1975], Cheriton e Tarjan [1976]). Il vantaggio di questo algoritmo risiede nella possibilità di parallelizzare il calcolo, altrimenti la difficoltà implementativa rispetto agli algoritmi di Kruskal e Prim ne sconsiglia l'uso. In figura 11.25 è rappresentata l'evoluzione dell'algoritmo di Borůvka su un grafo euclideo (costi degli archi pari alla distanza geometrica fra i nodi) completo con 200 nodi. Quattro iterazioni sono sufficienti a trovare il minimo albero di supporto.

11.60 ESERCIZIO. Perché si sono introdotte le etichette nella valutazione dei costi degli archi nell'algoritmo di Borůvka? ■

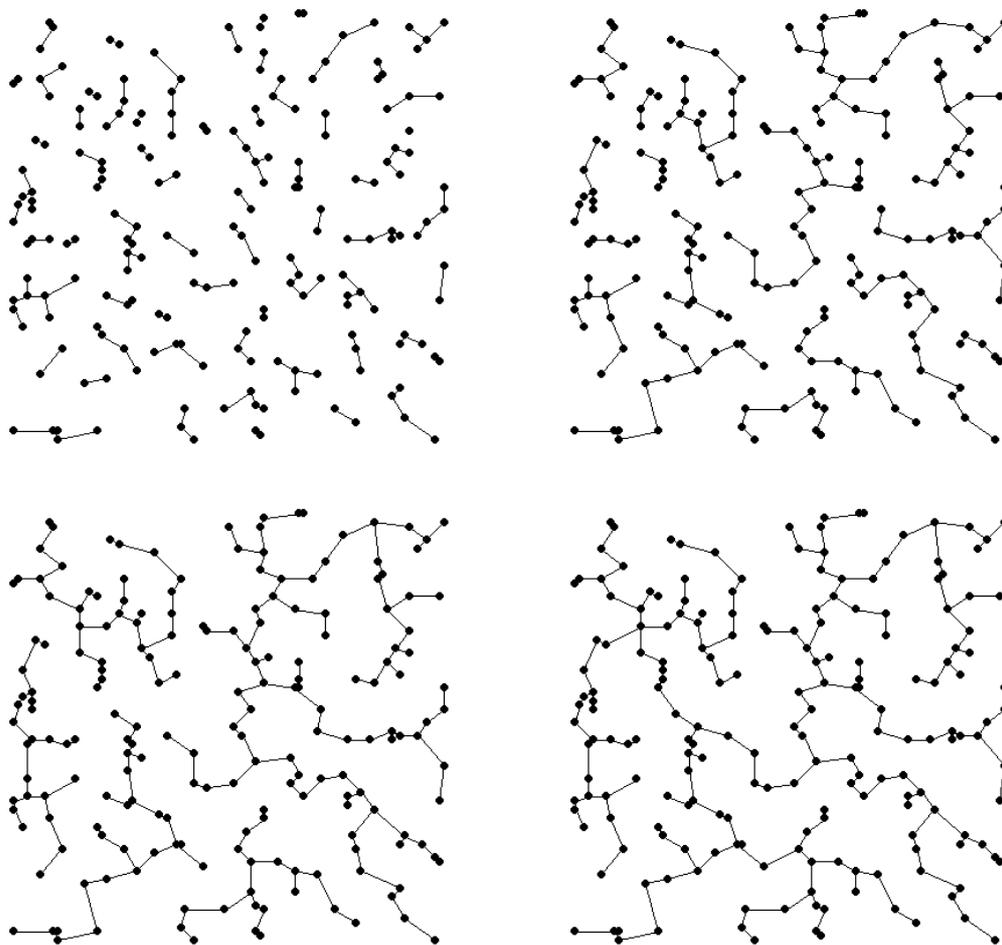


FIGURA 11.25