

Capitolo 2

Grafi

I grafi sono una delle più importanti ed usate strutture combinatorie in quanto permettono una rappresentazione compatta di una relazione binaria in un insieme. La relazione può prevedere un ordine preferenziale fra i due elementi oppure no. Nel primo caso si parla di grafi orientati (o anche diretti) mentre nel secondo caso si parla semplicemente di grafi, specificando ‘non orientati’ quando si vuole evitare una possibile ambiguità. Le proprietà dei grafi orientati sono abbastanza diverse da quelle dei grafi non orientati e quindi le due trattazioni sono separate. Avendo i grafi orientati più struttura di quelli non orientati, alcune loro proprietà si deducono da quelle dei grafi non orientati. Quindi verranno esposte prima le proprietà dei grafi non orientati.

In questo capitolo vengono brevemente presentate solo quelle proprietà che sono di interesse per i problemi di ottimizzazione. La teoria dei grafi è molto più vasta di quello che si può evincere da questo semplice capitolo. Il lettore interessato può trovare ampio materiale in Berge [1958], Harary [1969], Deo [1974], Bondy e Murty [1976], Hartsfield e Ringel [1994], West [1995], Diestel [1997], Jungnickel [1999]. Di interessante consultazione è anche il libretto Ore [1979], tradotto in italiano.

2.1. Grafi non orientati - definizioni

2.1 DEFINIZIONE. *Un grafo non orientato $G = (N, E)$ è definito da un insieme finito N di nodi (o vertici) e da un insieme E di coppie non ordinate di nodi, chiamate archi (o spigoli).■*

Un arco $e \in E$ può anche essere indicato secondo la notazione $e = (i, j)$, con $i, j \in N$, in modo da evidenziare i nodi della coppia, che vengono anche indicati come *estremi* dell’arco. Se $(i, j) \in E$, i nodi i e j vengono detti *adiacenti*, mentre il nodo i (e anche il nodo j) e l’arco (i, j) vengono detti *incidenti*. Anche due archi con un nodo in comune vengono detti incidenti. Adotteremo la convenzione che $n := |N|$ e $m := |E|$. È consuetudine visualizzare un grafo come un insieme di punti più o meno grandi (i nodi) e di segmenti (gli archi), a volte curvilinei per esigenze di disegno. Si veda ad esempio il grafo di 10 nodi e 15 archi, detto anche *grafo di Petersen*, visualizzato in figura 2.1.

La definizione data sopra di grafo non orientato non ammette il caso di molteplicità di archi per la medesima coppia di nodi. Se è necessario considerare questo caso, bisogna modificare la definizione secondo lo spirito della definizione di grafo orientato (vedi più avanti). Si parla in questo caso di *multigrafo*. La definizione data esclude anche il caso di archi i cui estremi coincidano, i cosiddetti *cappi* (*self-loops*). Se sono presenti dei cappi si parla di *pseudografi*.

Quando due grafi G_1 e G_2 sono uguali? Ovviamente lo sono se $N_1 = N_2$ e $E_1 = E_2$, ma si può dire di più:

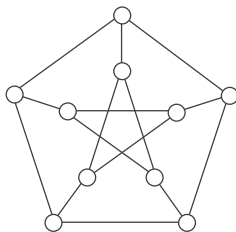


FIGURA 2.1

2.2 DEFINIZIONE. Due grafi $G_1 = (N_1, E_1)$ e $G_2 = (N_2, E_2)$ sono isomorfi se esiste una corrispondenza biiettiva $\pi : N_1 \rightarrow N_2$ tale che $(i, j) \in E_1$ se e solo se $(\pi(i), \pi(j)) \in E_2$. ■

Di fatto due grafi isomorfi vanno visti come due rappresentazioni diverse del medesimo grafo astratto (cioè la classe di equivalenza indotta dall'isomorfismo). Tuttavia, come si vedrà successivamente, non è del tutto elementare riconoscere se due grafi (necessariamente 'rappresentati') sono isomorfi (si vedano in figura 2.2 due grafi isomorfi).

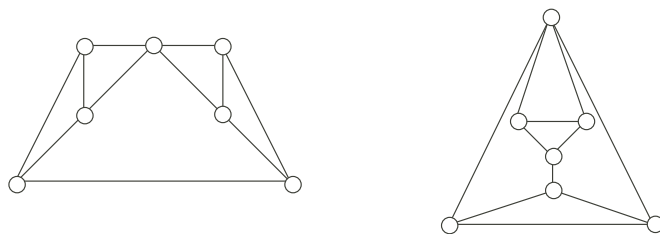


FIGURA 2.2

È utile tenere la contabilità di quanti archi vadano ad incidere su ogni nodo. A tal fine si ha la seguente:

2.3 DEFINIZIONE. Il grado $\deg(i)$ di un nodo i è il numero di archi incidenti ad i . Il grado $\deg(G)$ di un grafo G è la funzione $\deg : N \rightarrow \{0, 1, \dots, |N| - 1\}$ che associa ad ogni nodo il suo grado. ■

Grafi di grado costante si chiamano *regolari*, oppure *k-regolari* con k il grado di ogni nodo. Se $k = 3$ il grafo si dice *cubico*. Il grafo di Petersen in figura 2.1 è cubico.

2.4 ESERCIZIO. (facile) Dimostrare che $\sum_{i \in N} \deg(i)$ è pari. Dimostrare che il numero di nodi con grado dispari è pari. ■

2.5 ESERCIZIO. (difficile) Siano a_1, \dots, a_n numeri ordinati in modo non crescente. Dimostrare che tali numeri sono gradi dei nodi di un grafo se e solo se b_1, \dots, b_{n-1} lo sono con

$$\begin{cases} b_i = a_{i+1} - 1 & \text{se } 1 \leq i \leq a_1 \\ b_i = a_{i+1} & \text{se } i > a_1 \end{cases}$$

(in altre parole b è ottenuto da a , eliminando a_1 e sottraendo 1 dai successivi a_1 numeri). Facendo uso della proprietà, dimostrare che $(5, 4, 4, 3, 2, 2, 2)$ sono gradi di un grafo (e disegnare il grafo) e che nessun grafo può avere come gradi i numeri $(5, 5, 5, 5, 3, 3)$. ■

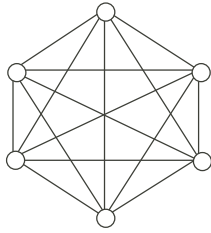


FIGURA 2.3

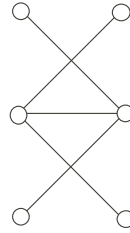


FIGURA 2.4

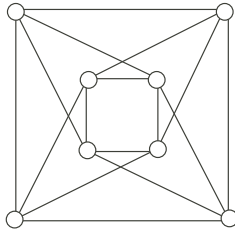


FIGURA 2.5

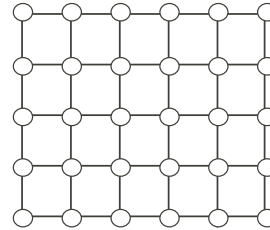


FIGURA 2.6

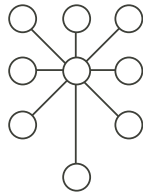


FIGURA 2.7

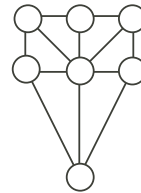


FIGURA 2.8

2.6 ESERCIZIO. (facile) Dimostrare che in ogni grafo vi sono almeno due nodi con lo stesso grado. ■

Alcuni grafi dotati di struttura particolare hanno designazioni proprie. Un grafo che abbia come archi tutte le possibili coppie non ordinate di nodi viene detto *completo* e viene indicato con K_n (si veda K_6 in figura 2.3). Un grafo i cui nodi si possano ripartire in due sottoinsiemi N_1 e N_2 tali che $(i, j) \in E$ solo se $i \in N_1$ e $j \in N_2$ (o viceversa) viene detto *bipartito* (si veda in figura 2.4 un grafo bipartito rappresentato nel modo consueto). Un grafo bipartito completo viene indicato con $K_{|N_1|, |N_2|}$ (si veda $K_{4,4}$ in figura 2.5 in una rappresentazione inconsueta). Più in generale un grafo in cui i nodi possano essere ripartiti in sottoinsiemi N_1, \dots, N_k tali che $(i, j) \in E$ solo se $i \in N_h$ e $j \in N_{h+1}$, per qualche h , viene detto *k-partito* (oppure *a livelli*) (quali sono i livelli e quant'è k nel grafo di figura 2.6?). Si noti che un grafo k -partito è anche $(k-1)$ -partito (è più che bipartito il grafo di figura 2.4?). Una *stella* è un grafo in cui un nodo, detto centro, è adiacente a tutti gli altri e questi sono adiacenti solo al centro. Si noti che una stella è un particolare grafo bipartito. Qualche volta si usa il simbolo S_n per indicare la stella con $n+1$ nodi (si veda S_8 in figura 2.7). Se i nodi esterni di una stella vengono resi adiacenti l'uno all'altro in sequenza circolare si ottiene una *ruota*. Qualche volta si usa il simbolo W_n per indicare la ruota con $n+1$ nodi (si veda W_6 in figura 2.8)

Dato un grafo si possono ottenere altri grafi tramite varie costruzioni. Il grafo $\bar{G} = (N, \bar{E})$ ottenuto dal grafo $G = (N, E)$ tramite la relazione $(i, j) \in \bar{E} \iff (i, j) \notin E$ viene detto *grafo complementare* di E . Si veda in figura 2.9 un grafo e in figura 2.10 il suo complementare

(attenzione! Qual è la corrispondenza fra i nodi delle due figure?).

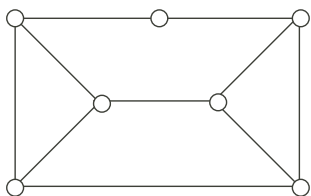


FIGURA 2.9

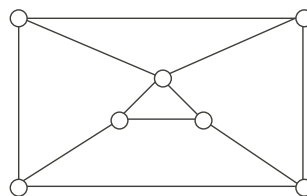


FIGURA 2.10

Data una partizione N_1, \dots, N_k dei nodi di un grafo G , il grafo G' ottenuto identificando il sottoinsieme N_i con il nodo i di G' , detto anche *pseudonodo*, e definendo il seguente insieme di archi per G'

$$E' := \{(i, j) : \exists h \in N_i, k \in N_j, (h, k) \in E \text{ con } i \neq j\}$$

viene detto grafo *contratto*, oppure ottenuto per *contrazione* della partizione (si usano anche i termini *collassato* e *collassamento*). Si vedano in figura 2.11 un grafo con la partizione dei nodi indicata graficamente e in figura 2.12 il grafo contratto.

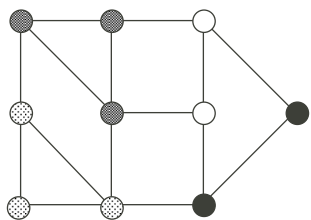


FIGURA 2.11

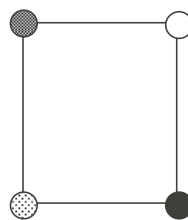


FIGURA 2.12

Dato un grafo G si definisce il suo *grafo di linea* $L(G)$ il grafo in cui i nodi sono associati agli archi di G ed esiste un arco (i, j) se e solo se gli archi i e j di G sono incidenti nello stesso nodo. Si vedano due esempi nelle figure 2.13 e 2.14.

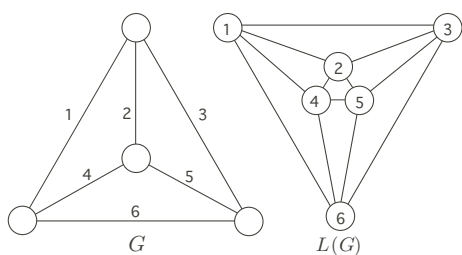


FIGURA 2.13

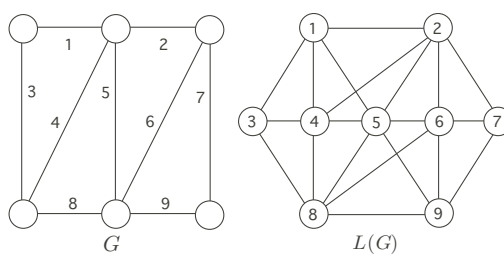


FIGURA 2.14

Il grafo $G' = (N', E')$ è un *sottografo* di $G = (N, E)$ se $N' \subset N$ e $E' \subset E$. Il grafo $G' = (N, E')$ è un *grafo parziale* o, alternativamente, un *sottografo di supporto* di $G = (N, E)$

se $E' \subset E$. Dato $N' \subset N$ il sottografo $G' = (N', E(N'))$ indotto da N' è il sottografo di $G = (N, E)$ che contiene tutti gli archi di G con entrambi gli estremi in N' , insieme indicato come $E(N')$. Spesso questo insieme di archi viene anche indicato in letteratura con il simbolo $\gamma(N')$.

I seguenti insiemi di nodi o archi sono particolarmente importanti nell'ottimizzazione:

2.7 DEFINIZIONE. Dato un grafo $G = (N, E)$:

- un sottoinsieme N' di nodi tale che ogni arco in E sia incidente ad almeno un nodo di N' viene detto copertura di nodi;
- un sottoinsieme E' di archi tale che ogni nodo in N sia incidente ad almeno un arco di E' viene detto copertura di archi;
- un sottoinsieme N' di nodi tale che ogni arco in E sia incidente ad al più un nodo di N' viene detto insieme stabile o anche insieme indipendente. Alternativamente un insieme stabile è un sottoinsieme di nodi non adiacenti;
- un sottoinsieme E' di archi tale che ogni nodo in N sia incidente ad al più un arco di E' viene detto accoppiamento (in inglese matching). Alternativamente un accoppiamento è un sottoinsieme di coppie di nodi adiacenti, identificate con i rispettivi archi. ■

Le figure 2.15, 2.16, 2.17 e 2.18 rappresentano rispettivamente una copertura di nodi, una copertura di archi, un insieme stabile e un accoppiamento.

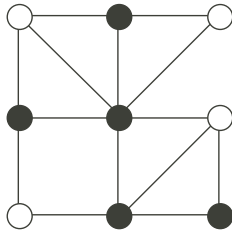


FIGURA 2.15

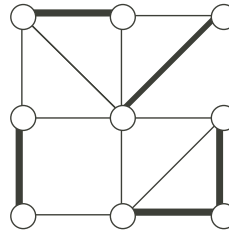


FIGURA 2.16

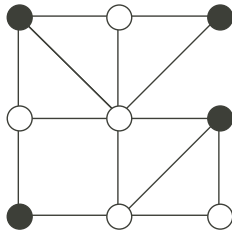


FIGURA 2.17

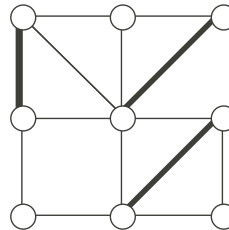


FIGURA 2.18

È facile dimostrare che un insieme stabile ha come insieme complementare una copertura di nodi e viceversa. Spesso si è interessati a determinare una copertura di nodi di minima cardinalità o, equivalentemente, un insieme stabile di massima cardinalità. Quest'ultimo valore costituisce un importante parametro del grafo.

2.8 DEFINIZIONE. Si definisce numero di stabilità del grafo G , e si indica con $\alpha(G)$, la cardinalità del massimo insieme stabile. ■

Si vede facilmente che $\alpha(K_n) = 1$, $\alpha(K_{p,q}) = \max\{p, q\}$, $\alpha(S_n) = n$, $\alpha(W_{2n}) = n$, $\alpha(W_{2n+1}) = n$. Tuttavia il numero di stabilità è di difficile determinazione in generale (vedi capitolo successivo).

Per ogni grafo una funzione $\xi : N \rightarrow \{1, \dots, k\}$ tale che $(i, j) \in E \implies \xi(i) \neq \xi(j)$ prende il nome di *coloratura*. In altre parole è come se si colorassero i nodi con k colori diversi facendo in modo che nodi adiacenti non abbiano lo stesso colore. Anche il minimo valore di k per cui si riesce a colorare un grafo è un importante parametro del grafo.

2.9 DEFINIZIONE. Si definisce numero cromatico di un grafo G , e si indica $\chi(G)$, il minimo numero di colori sufficiente a colorare G . ■

È immediato che $\chi(K_n) = n$, $\chi(K_{p,q}) = 2$, $\chi(W_{2n}) = 3$ e $\chi(W_{2n+1}) = 4$. Anche la determinazione del numero cromatico per un grafo generico non è un problema facile (vedi capitolo successivo).

2.10 ESERCIZIO. Si dimostri che contraendo un grafo partizionato secondo una coloratura minima (numero cromatico) si ottiene un grafo completo. ■

2.11 DEFINIZIONE. Un sottoinsieme di nodi tale che il sottografo indotto sia completo prende il nome di *cricca* (clique). ■

2.12 DEFINIZIONE. Si definisce numero di cricca di un grafo G , e si indica $\omega(G)$, la cardinalità della massima cricca di G . ■

Ovviamente $\omega(K_n) = n$, $\omega(K_{p,q}) = 2$, $\omega(W_3) = 4$, $\omega(W_n) = 3$ se $n > 4$. Inoltre il numero di cricca è legato al numero di stabilità e al numero cromatico da $\chi(G) \geq \omega(G)$, $\alpha(\bar{G}) = \omega(G)$ (\bar{G} grafo complementare). Dall'ultima relazione si vede che anche la determinazione del numero di cricca è difficile in generale.

2.13 DEFINIZIONE. Si definisce numero di partizione di cricche di un grafo G , e si indica $\theta(G)$, la cardinalità della minima partizione dei nodi di G in cricche. ■

Ovviamente $\theta(K_n) = 1$, $\theta(K_{p,q}) = \max\{p, q\}$. Inoltre $\alpha(G) \leq \theta(G)$ e $\theta(G) = \chi(\bar{G})$. Va da sé, in base all'ultima eguaglianza, che anche $\theta(G)$ è di difficile valutazione in generale.

2.14 ESERCIZIO. Si determinino i valori $\alpha(G)$, $\theta(G)$, $\chi(G)$ e $\omega(G)$ del grafo di Petersen (figura 2.1) e dei grafi nelle figure 2.2, 2.9, 2.10, 2.13 e 2.14. ■

2.15 ESERCIZIO. Si dimostri che in un grafo G un accoppiamento ha la stessa cardinalità di una copertura di nodi solo se $\alpha(L(G)) = \theta(L(G))$. Ad esempio nei grafi di figura 2.13 si ha l'eguaglianza, mentre nei grafi di figura 2.14 si ha la diseguaglianza. ■

Di particolare importanza sono le diseguaglianze $\alpha(G) \leq \theta(G)$ e $\omega(G) \leq \chi(G)$. Se si verifica l'eguaglianza i grafi meritano un nome speciale.

2.16 DEFINIZIONE. Un grafo G si dice perfetto se $\omega(G') = \chi(G')$ per ogni sottografo indotto G' . ■

2.17 TEOREMA. (Teorema del grafo perfetto, Lovász [1972]) Un grafo G è perfetto se e solo se $\alpha(G') = \theta(G')$ per ogni sottografo indotto G' . Alternativamente, un grafo è perfetto se e solo se il suo grafo complementare è perfetto. ■

2.18 ESERCIZIO. Siano assegnati n intervalli I_1, \dots, I_n in R . Si definisca il *grafo degli intervalli* come un grafo in cui ogni nodo è associato ad un intervallo ed esiste un arco (i, j) se e solo se $I_i \cap I_j \neq \emptyset$ (si veda un esempio in figura 2.19). Si dimostri che tale grafo è perfetto. ■

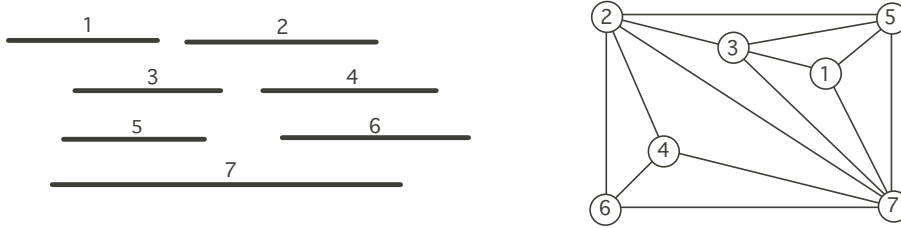


FIGURA 2.19

2.19 ESERCIZIO. Si dimostri che un grafo bipartito è perfetto (si tratta dell'esercizio 1.60 formulato diversamente). ■

È naturale pensare di tracciare un percorso in un grafo che si sposti da un nodo all'altro usando gli archi presenti nel grafo. Quest'idea intuitiva porta al concetto di *cammino*. Sia nodi che archi sono ovviamente coinvolti nell'idea intuitiva di cammino, tuttavia è più semplice, per l'uso formale che se ne farà, considerare un cammino come un insieme solo di archi. Questa scelta crea qualche complicazione a livello di definizione formale, che risulta quindi più complessa di quanto sembra invece richiedere la semplicità del concetto intuitivo.

2.20 DEFINIZIONE. Sia data una sequenza e_1, \dots, e_p di archi (eventualmente vuota) tale che esista un'orientazione per gli estremi di ogni arco per cui $e_k = (i, j)$ e $e_{k+1} = (j, h)$ per $k := 1, \dots, p-1$. Si indichi $(s, j) := e_1$ e $(i, t) := e_p$. La sequenza viene detta *cammino* se $s \neq t$ e *circuito* se $s = t$. ■

Si definisce come *lunghezza* del cammino (circuito) il numero di archi contenuti nel cammino (circuito). Un cammino (circuito) viene detto pari o dispari a seconda della sua lunghezza. Nel caso di cammino i nodi s e t vengono detti rispettivamente *sorgente* e *destinazione* del cammino e si usa la notazione $P : s \rightarrow t$ per evidenziarli. In modo naturale un cammino induce una sequenza di nodi da s a t (con possibili ripetizioni), che vengono indicati come nodi del cammino. Con abuso di terminologia si considera cammino (senza archi) anche un singolo nodo. Anche un circuito induce una sequenza circolare di nodi (con possibili ripetizioni). Se gli archi del cammino (circuito) sono tutti diversi il cammino (circuito) viene detto *non molteplice*. Se i nodi del cammino (circuito) sono tutti diversi il cammino (circuito) viene detto *elementare* o *semplice*. Quindi cammini e circuiti elementari sono necessariamente non molteplici. Si noti che dalle varie definizioni un circuito deve avere almeno due archi e in questo caso è molteplice, mentre un circuito semplice deve avere almeno tre archi. Se non altrimenti indicato si intende d'ora in poi che un circuito è non molteplice.

2.21 ESERCIZIO. Dimostrare che un grafo è bipartito se e solo se tutti i suoi circuiti sono pari. ■

Il concetto di cammino estende quello di arco. Due nodi possono non essere adiacenti, però può esistere un cammino che li congiunge. La proprietà di poter raggiungere un qualsiasi nodo a partire da un qualsiasi nodo è molto importante. Quindi si ha la seguente:

2.22 DEFINIZIONE. Due nodi fra i quali esista un cammino si dicono connessi. Un grafo si dice connesso se tutte le sue coppie di nodi sono connesse. ■

Se due nodi i e j sono connessi si definisce loro *distanza* $d(i, j)$ la minima lunghezza fra tutti i cammini $P : i \rightarrow j$. Il concetto intuitivo di quanto ‘largo’ possa essere un grafo viene catturato dalla definizione:

2.23 DEFINIZIONE. Si definisce *diametro* di un grafo connesso $\max_{i, j \in G} d(i, j)$. ■

Facilmente si ottiene che il diametro di un grafo completo vale 1, e quello di una generica stella vale 2. In generale la determinazione del diametro è facile. Il concetto intuitivo di quanto possa essere ‘stretto’ un grafo viene definito da:

2.24 DEFINIZIONE. Si definisce *giro* (girth) di un grafo connesso la lunghezza del circuito più corto in G . ■

2.25 ESERCIZIO. Trovare un grafo con numero cromatico e giro uguali a 4. ■

Un grafo in cui $E = \emptyset$ viene detto *totalmente sconnesso*. La proprietà di connessione è una relazione di equivalenza su N (convenzionalmente si considera un nodo connesso con se stesso). Le classi di equivalenza costituiscono una partizione N_1, \dots, N_k di N e inducono la partizione E_1, \dots, E_k di E tramite $(i, j) \in E_h \iff i, j \in N_h$. I sottografi (N_h, E_h) vengono detti *componenti connesse*. Il grafo ottenuto per contrazione della partizione è ovviamente totalmente sconnesso.

Di fondamentale importanza sono quei grafi che sono connessi usando il minor numero di archi. La seguente definizione introduce uno dei concetti più ampiamente utilizzati in Ottimizzazione e anche in altre aree.

2.26 DEFINIZIONE. Un grafo connesso senza circuiti viene detto *albero*. ■

2.27 DEFINIZIONE. Un grafo senza circuiti viene detto *foresta*. ■

Quindi una foresta è un grafo le cui componenti connesse sono alberi. In figura 2.20 è rappresentato un albero generato a caso.

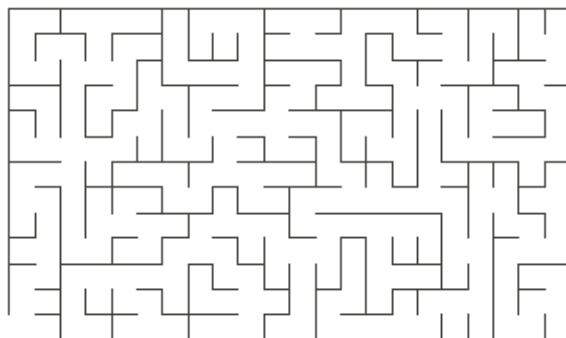


FIGURA 2.20

2.28 ESERCIZIO. Si dimostri che per un albero vale la relazione $|N| = |E| + 1$, mentre per una foresta vale $|N| = |E| + k$ con k il numero di componenti connesse. ■

2.29 ESERCIZIO. Dimostrare le seguenti proprietà di un albero:

- per ogni coppia di nodi esiste un unico cammino;
- l'eliminazione di un qualsiasi arco rende il grafo sconnesso;
- l'aggiunta di un qualsiasi arco crea un circuito.

2.30 ESERCIZIO. Si tolga dall'albero di figura 2.20 un qualsiasi arco del bordo. Si è così ottenuto un labirinto con le due aperture (gli archi del grafo sono le pareti del labirinto). Dimostrare che esiste la possibilità di attraversare il labirinto.

Se un sottografo di supporto è una foresta o un albero, viene detto *foresta di supporto* oppure *albero di supporto* (*spanning tree*). Gli archi di G appartenenti ad un albero di supporto vengono detti *rami*, mentre quelli non appartenenti vengono detti *corde*.

Un grafo connesso con esattamente un circuito viene detto *quasi-albero*. Il quasi-albero si dice pari o dispari a seconda del numero di archi del circuito. L'unione di più quasi-alberi viene detta *quasi-foresta*.

Il concetto simmetrico a quello di cammino ed altrettanto importante per l'ottimizzazione è dato dalla seguente definizione.

2.31 DEFINIZIONE. Dato un grafo $G = (N, E)$ ed una partizione $(S, N \setminus S)$ di N , viene detto taglio il sottoinsieme di archi

$$Q(S) := \{(i, j) \in E : i \in S, j \notin S \text{ o viceversa}\}$$

In letteratura si trova anche il simbolo $\delta(S)$ per indicare gli archi del taglio. In figura 2.21 la partizione dei nodi è rappresentata dai nodi bianchi e neri. Gli archi del taglio sono evidenziati in tratto più grosso. La relazione fra tagli e cammini (o circuiti) è data dalle seguenti proprietà di facile dimostrazione:

2.32 ESERCIZIO. Dimostrare che un grafo è connesso se e solo se nessun taglio è vuoto. Dimostrare che un taglio ed un circuito hanno in comune un numero pari di archi.

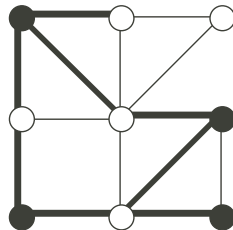


FIGURA 2.21

2.2. Grafi non orientati - rappresentazioni vettoriali

Dato un grafo $G = (N, E)$, sottoinsiemi $E' \subset E$ e $N' \subset N$ possono venir rappresentati tramite i seguenti vettori d'incidenza

$$x_e := \begin{cases} 1 & \text{se } e \in E' \\ 0 & \text{se } e \notin E' \end{cases} \quad u_i := \begin{cases} 1 & \text{se } i \in N' \\ 0 & \text{se } i \notin N' \end{cases}$$

La matrice d'adiacenza M viene definita come

$$M_i^j := \begin{cases} 1 & \text{se i nodi } i \text{ e } j \text{ sono adiacenti} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

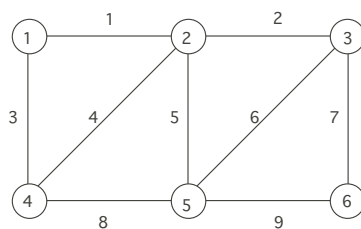
2.33 ESERCIZIO. Verificare che $(M^k)_i^j$ = numero di cammini distinti di lunghezza k fra i nodi i e j . ■

La matrice d'incidenza nodi-archi A viene definita come

$$A_i^e := \begin{cases} 1 & \text{se } i \text{ ed } e \text{ sono incidenti} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Quindi tutte le colonne di A hanno solo due componenti diverse da 0 ed uguali ad 1. Si veda un esempio in figura 2.22.

Se $x(E')$ è il vettore d'incidenza di un sottoinsieme E' di archi, il grado di $G' = (N, E')$ può essere espresso da $\text{deg}(G') = Ax(E')$.



$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Matrice d'adiacenza

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Matrice d'incidenza nodi-archi

FIGURA 2.22

2.34 ESERCIZIO. Dimostrare che un sottoinsieme E' di archi è un insieme di circuiti semplici se e solo se il vettore d'incidenza $x(E')$ soddisfa $Ax(E') = \mathbf{2}$. Come modificare l'affermazione per i cammini? ■

Se $u(N')$ è il vettore d'incidenza di un sottoinsieme N' di nodi, il numero di estremi contenuti in N' per ogni arco può essere espresso da $u(N')A$.

2.35 ESERCIZIO. Dimostrare che un sottoinsieme E' di archi è un taglio se e solo se esiste un vettore u di 1 e 0, per cui il vettore d'incidenza $x(E')$ soddisfa $uA = x(E') \pmod{2}$. ■

2.36 ESERCIZIO. Verificare che

$$N' \text{ è una copertura di nodi} \iff u(N')A \geq \mathbf{1}$$

$$E' \text{ è una copertura d'archi} \iff Ax(E') \geq \mathbf{1}$$

$$N' \text{ è un insieme stabile} \iff u(N')A \leq \mathbf{1}$$

$$E' \text{ è un accoppiamento} \iff Ax(E') \leq \mathbf{1}$$

Alcune proprietà combinatorie di un grafo vengono trasformate in proprietà algebriche tramite la matrice d'incidenza. Sia B una qualsiasi sottomatrice della matrice d'incidenza nodi-archi di un grafo G . Si può associare a B il seguente sottografo $G(B)$ (si confronti la figura 2.23):

- i nodi di $G(B)$ sono i nodi di G corrispondenti alle righe di B ;
- gli archi di $G(B)$ sono gli archi di G corrispondenti alle colonne di B che hanno due componenti diverse da zero;
- ogni colonna di B con una sola componente diversa da zero e corrispondente ad un certo nodo r di $G(B)$ associa al nodo r l'etichetta di radice.

Quindi $G(B)$ si può indicare come (N, E, R) dove R è l'insieme di nodi etichettati come radici. Se gli alberi di una foresta hanno esattamente una radice la foresta viene detta *con radici*. Se B è non singolare $G(B)$ assume una forma particolare. Infatti:

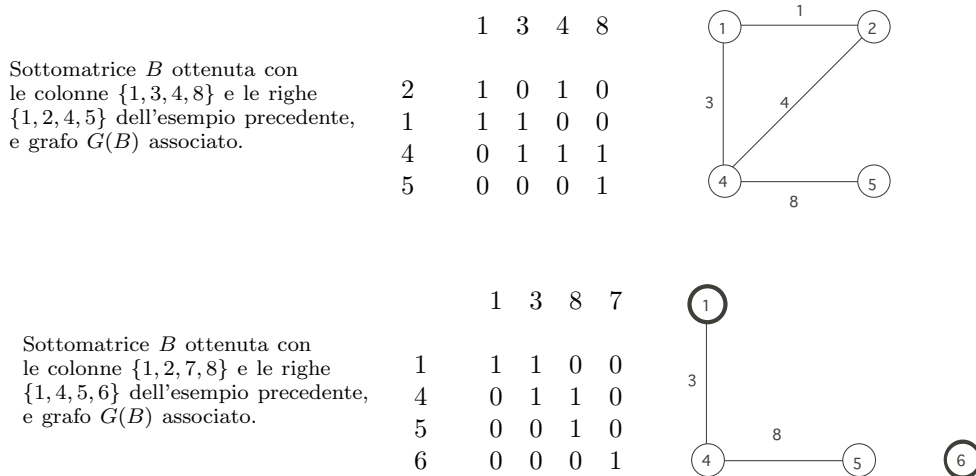


FIGURA 2.23

2.37 TEOREMA. B è non singolare se e solo se $G(B)$ è l'unione di una foresta con radici e di una quasi-foresta dispari.

DIMOSTRAZIONE. Se archi e nodi sono ordinati per componenti connesse B ha una struttura a blocchi, in generale rettangolari. Si vede immediatamente che, se esiste un blocco non quadrato, B è singolare. Quindi se B è non singolare B è diagonale a blocchi, ognuno dei quali è associato ad una componente connessa di $G(B)$. Inoltre il determinante di B si calcola come prodotto dei determinanti dei blocchi. Possiamo quindi limitarci a considerare una singola componente connessa e supporre per comodità di esposizione che $G(B)$ sia connesso. Deve allora valere $|N| = |E| + |R|$ se B è non singolare.

Per la connessione si deve avere $|E| \geq (|N| - 1)$. Quindi si deve avere $|R| \leq 1$. Consideriamo separatamente i due casi:

$|R| = 1$: siccome $|N| = |E| + 1$, $G(B)$ è un albero con radice. Si riordinino le righe e le colonne di B secondo l'ordine ottenuto visitando, a partire dalla radice, tutti i nodi di $G(B)$ lungo gli archi di $G(B)$. Secondo questo ordinamento B risulta essere triangolare superiore con tutte le componenti sulla diagonale uguali ad 1. Quindi $|\det B| = 1$.

$|R| = 0$: siccome $|N| = |E|$, $G(B)$ contiene esattamente un circuito, è cioè un quasi-albero. Si riordinino le righe e le colonne di B secondo l'ordine ottenuto visitando prima tutti i nodi e gli archi del circuito e poi il resto del grafo partendo dai nodi del circuito. Si ottiene una

matrice del seguente tipo:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 1 & \dots & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C & E \\ \mathbf{0} & D \end{pmatrix}$$

dove C è la sottomatrice che si riferisce al circuito e D è triangolare superiore. Calcolando il determinante a partire dall'ultima riga si vede subito che $|\det B| = \det C$. Il calcolo di $\det C$ si può effettuare a partire dalla prima riga. Non è difficile verificare che $\det C = 0$ se il circuito è pari, mentre $\det C = 2$ se il circuito è dispari. ■

Il precedente teorema ha messo in luce un'interessante caratterizzazione dell'inversa di una sottomatrice non singolare B della matrice d'incidenza nodi-archi:

2.38 COROLLARIO. *Gli elementi di B^{-1} appartengono all'insieme*

$$\left\{0, \pm \frac{1}{2}, \pm 1 \pm 2\right\}$$

DIMOSTRAZIONE. Si è visto che se B è non singolare, può essere riscritta come una matrice diagonale a blocchi. L'inversa di una matrice diagonale a blocchi è ancora una matrice diagonale a blocchi, dove ogni singolo blocco è l'inversa del blocco corrispondente. Il determinante di ogni blocco può essere uguale in valore assoluto a 1 oppure a 2. Tenendo conto della formula che fornisce gli elementi di una matrice inversa si ricava la tesi. ■

Introduciamo la seguente definizione di grande importanza per l'ottimizzazione combinatoria:

2.39 DEFINIZIONE. *Una matrice tale che il determinante di ogni sua sottomatrice quadrata valga $+1$, -1 o 0 , viene detta totalmente unimodulare.* ■

Allora abbiamo:

2.40 COROLLARIO. *La matrice d'incidenza nodi-archi di un grafo bipartito è totalmente unimodulare.*

DIMOSTRAZIONE. La mancanza di circuiti dispari in un grafo bipartito impedisce di avere determinanti uguali a ± 2 . ■

2.3. Grafi orientati - definizioni

2.41 DEFINIZIONE. *Un grafo orientato è definito da un insieme finito di nodi N , da un insieme finito di archi E e da una funzione d'arco $E \rightarrow N \times N$ che associa ad ogni arco e una coppia ordinata (i, j) di nodi distinti.* ■

Un arco $e \in E$ può venir anche indicato secondo la notazione $e = (i, j)$ con $i, j \in N$ in modo da evidenziare la coppia orientata di nodi associata all'arco. Si noti che questa definizione permette una molteplicità di archi per la medesima coppia ordinata di nodi. Archi di questo tipo vengono detti *paralleli*. Due archi (i, j) e (j, i) vengono detti *antiparalleli*. Si esclude comunque il caso di una coppia formata dal medesimo nodo. L'ordinamento della coppia di nodi fornisce un'orientazione ad ogni arco. Se si trascura l'orientazione degli archi rimane la struttura di multigrafo, a cui spesso è conveniente fare riferimento. Un grafo orientato viene visualizzato come un grafo non orientato aggiungendo una freccia per indicare l'orientazione dell'arco.

I concetti di adiacenza di nodi e di incidenza nodi–archi sono indotti dal multigrafo associato. Inoltre si dice che l'arco (i, j) *esce* dal nodo i ed *entra* nel nodo j .

Il concetto di isomorfismo tra grafi viene naturalmente esteso tenendo conto anche dell'orientazione. Alla definizione di grado, indotta dal multigrafo, si aggiungono le seguenti definizioni:

2.41 DEFINIZIONE. *Si definisce grado esterno di un nodo i il numero di archi uscenti da i e si indica con $\deg^+(i)$; si definisce grado interno di un nodo n il numero di archi entranti in i e si indica con $\deg^-(i)$.* ■

Ovviamente $\deg(i) = \deg^+(i) + \deg^-(i)$. Un grafo orientato *completo* ha come archi tutte le possibili coppie orientate di nodi, quindi sia (i, j) che (j, i) appartengono ad E .

Un cammino P ed un circuito C vengono definiti come per il multigrafo associato, senza tener conto dell'orientazione originale degli archi. Tenendo conto dell'orientazione, gli archi di P (C) costituiscono un insieme segnato (un insieme segnato è un insieme in cui parte degli elementi viene contrassegnata come 'positiva' e la parte rimanente come 'negativa') dato che possono venire ripartiti in due insiemi P^+, P^- (C^+, C^-), dove P^+ (C^+) è l'insieme di archi orientati nel verso del cammino (circuito) e P^- (C^-) nel verso opposto. Un cammino in cui $P^- = \emptyset$ viene detto *cammino orientato*, mentre un circuito in cui $C^- = \emptyset$ viene detto *ciclo*. Cammini e circuiti vengono definiti semplici o elementari come per i grafi non orientati. Il fatto che un cammino inizi in un nodo s e termini in un nodo t viene anche indicato sinteticamente come $P : s \rightarrow t$.

2.42 ESERCIZIO. Sia dato un grafo non orientato completo. Si orientino arbitrariamente gli archi. Dimostrare che esiste nel grafo orientato così ottenuto un cammino orientato che passa per tutti i nodi. La proprietà può essere anche riformulata nel seguente modo: si definisca un modo, tenendo conto solo dei due incontri diretti durante il campionato, per poter affermare che una squadra di calcio è 'migliore' di un'altra squadra (alcune coppie di pareggi creano problemi, in questi casi si fissi arbitrariamente quale squadra è migliore). Allora esiste una sequenza di squadre S_1, S_2, \dots, S_n per cui S_1 è migliore di S_2 , S_2 è migliore di S_3 , ecc. Si noti che S_1 potrebbe non aver niente a che fare con la squadra vincitrice del campionato. Ad esempio potrebbe avvenire che S_n sia migliore di S_1 e a questo punto esistono n sequenze con in testa a turno una squadra diversa! ■

Un grafo orientato senza cicli viene detto *aciclico*. Un grafo aciclico e senza archi multipli può esser visto come la rappresentazione di un ordine parziale su N . La *chiusura transitiva* di un grafo aciclico $G = (N, E)$ è il grafo il cui insieme d'archi è il più piccolo insieme E^c tale che $E \subset E^c$ e $(i, j) \in E^c, (j, k) \in E^c$ implica $(i, k) \in E^c$. La *riduzione transitiva* di un grafo aciclico è il grafo il cui insieme d'archi è il più grande insieme E^r tale che $E^r \subset E$ e $(i, j) \in E^r, (j, k) \in E^r$ implica $(i, k) \notin E^r$.

Due nodi fra i quali esista un cammino vengono detti connessi e il grafo viene detto connesso se fra tutte le coppie di nodi esistono cammini. Quindi la proprietà di connessione

è ereditata dal multigrafo associato. Nei grafi orientati c'è un ulteriore concetto. Due nodi fra i quali esista un ciclo vengono detti *fortemente connessi* e il grafo si dice fortemente connesso se tutte le coppie di nodi sono fortemente connesse. Definendo ogni nodo fortemente connesso con se stesso, anche la proprietà di connessione forte è una relazione di equivalenza che induce una partizione dei nodi del grafo in componenti fortemente connesse. Non si ottiene tuttavia una analoga partizione degli archi.

2.43 ESERCIZIO. Dimostrare che il grafo ottenuto per contrazione delle componenti fortemente connesse è aciclico. ■

Anche un taglio può venir definito come per il multigrafo associato. Data una coppia ordinata $(S, N \setminus S)$ di sottoinsiemi di N che costituiscano una partizione di N si definiscano i seguenti insiemi di archi

$$Q^+ := \{e \in E : e \equiv (n, n'), n \in S, n' \in N \setminus S\}$$

$$Q^- := \{e \in E : e \equiv (n', n), n \in S, n' \in N \setminus S\}$$

Si definisce *taglio* l'insieme segnato di archi $Q := Q^+ \cup Q^-$, che può anche essere indicato come $Q(S)$ per enfatizzare la dipendenza dall'insieme S di nodi, generatore del taglio. Il fatto che un taglio $Q(S)$ separi un nodo s da un nodo t , ovvero $s \in S$ e $t \notin S$, viene sinteticamente indicato con $Q : s \downarrow t$.

2.44 ESERCIZIO. Provare che un grafo orientato è aciclico se e solo se ogni arco appartiene ad almeno un taglio Q per cui $Q^- = \emptyset$. ■

Anche per i grafi orientati si definisce la classe di *grafi a livelli* facendo riferimento semplicemente alla struttura di multigrafo.

Anche i concetti di *albero* e *foresta* vengono definiti per un grafo orientato facendo riferimento alla struttura di multigrafo. Inoltre si definisce come *arborescenza* un albero in cui esista un nodo dal quale partono cammini orientati verso tutti gli altri nodi. In modo equivalente un'arborescenza è un grafo orientato in cui tutti i nodi hanno grado interno uguale ad 1 tranne un nodo in cui il grado interno vale 0.

2.4. Grafi orientati - rappresentazioni vettoriali

Dato un grafo $G = (N, E)$, sottoinsiemi di nodi e di archi possono venire rappresentati tramite vettori d'incidenza come nel caso di grafi non orientati. La *matrice d'adiacenza* M viene definita come

$$M_i^j := \text{numero di archi } (i, j) \text{ presenti nel grafo}$$

2.45 ESERCIZIO. Verificare che $(M^k)_i^j = \text{numero di cammini orientati distinti di lunghezza } k \text{ fra i nodi } i \text{ e } j$. ■

La *matrice d'incidenza nodi-archi* viene definita come

$$A_i^e := \begin{cases} 1 & \text{se l'arco } e \text{ è uscente dal nodo } i \\ -1 & \text{se l'arco } e \text{ è entrante nel nodo } i \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

(vedi figura 2.24). Quindi ogni colonna di A ha solo due componenti diverse da 0 che valgono 1 e -1 . Si vede immediatamente che $\mathbf{1}A = 0$ e quindi $\text{rank } A < |N|$; più esattamente vale $\text{rank } A = |N| - k$, dove k è il numero delle componenti connesse di G . La dimostrazione di questa relazione può essere fatta sfruttando i risultati che verranno successivamente esposti.

Se $x(E')$ è il vettore d'incidenza di un sottoinsieme E' di archi, si ha per $G' = (N, E')$ $\text{deg}^+(G') - \text{deg}^-(G') = Ax(E')$. Se $u(N')$ è il vettore d'incidenza di un sottoinsieme N' di nodi, il vettore $u(N')A$ è la riga della matrice d'incidenza relativa allo pseudonodo N' del multigrafo contratto. Quindi se si definisce la seguente matrice d'incidenza partizione-nodi:

$$P_S^i := \begin{cases} 1 & \text{se il nodo } i \text{ appartiene al sottoinsieme } S \text{ della partizione} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

la matrice d'incidenza A' del grafo contratto è data da $A' = PA$, a meno di alcune colonne tutte nulle.

Se B è una qualsiasi sottomatrice della matrice d'incidenza nodi-archi di un grafo orientato G , si può associare a B un sottografo orientato $G(B)$ seguendo la medesima costruzione fatta per i grafi non orientati (si veda la figura 2.25).

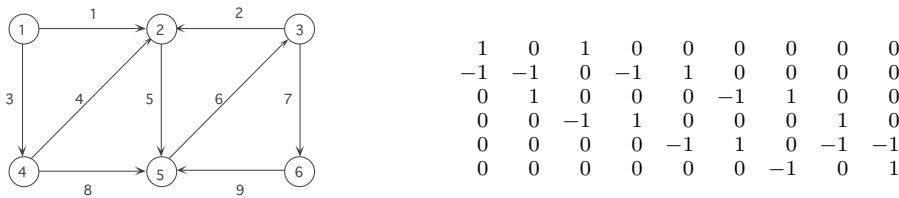


FIGURA 2.24



FIGURA 2.25

Quindi, analogamente al caso non orientato, $G(B)$ si può indicare come (N, E, R) dove R è l'insieme delle radici. Inoltre la caratterizzazione di B e $G(B)$ per un grafo orientato dà luogo a dei risultati molto importanti.

2.46 TEOREMA. B è non singolare se e solo se $G(B)$ è una foresta con radici.

DIMOSTRAZIONE. La dimostrazione è analoga al caso di un grafo non orientato tranne che per il caso $|R| = 0$. Infatti in questo caso $\mathbf{1}B = 0$ e quindi $\det B = 0$. ■

La differenza cruciale rispetto al caso di grafo orientato consiste quindi nella mancanza di sottomatrici con determinante uguale a ± 2 . Quindi si ottiene, come conseguenza immediata del teorema, il seguente risultato fondamentale:

2.47 COROLLARIO. La matrice d'incidenza nodi-archi di un grafo orientato è totalmente unimodulare. ■

I risultati ottenuti rimangono validi anche per una matrice (AH) ottenuta aggiungendo alla matrice d'incidenza nodi-archi alcune colonne della matrice identica.

2.48 COROLLARIO. (AH) è totalmente unimodulare e il grafo $G(B)$ associato ad una sottomatrice quadrata non singolare B di (AH) è una foresta con radici. In particolare se B ha lo stesso numero di righe di A , le radici sono associate alle colonne di H , e se inoltre H consiste di un'unica colonna, B è non singolare se e solo se $G(B)$ è un albero di supporto con radice nel nodo individuato dalla colonna di H . ■

La matrice $L := AA^T$ viene detta *matrice Laplaciana* oppure *matrice di grado* del grafo G . È immediato vedere che $L = \text{diag deg}(G) - M$, dove $\text{deg}(G)$ e la matrice d'adiacenza M si riferiscono al multigrafo associato a G (quindi il Laplaciano può anche essere definito per grafi non orientati e può comunque essere calcolato da $L = AA^T$ previa orientazione arbitraria degli archi).

Per quanto detto è chiaro che L è singolare. Se però calcoliamo il determinante di L' , dove L' coincide con L tranne che per l'elemento $L'_{k,k} := L_{k,k} + 1$, con k fissato arbitrariamente, otteniamo il sorprendente risultato che tale determinante è uguale al numero di alberi di supporto distinti di G ! Analogo risultato si ottiene per $\det(L'')$ dove L'' è ottenuta da L sopprimendo una riga arbitraria e la corrispondente colonna.

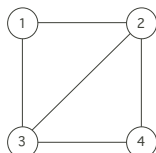
2.49 TEOREMA. $\det(L') = \det(L'') = \text{numero di alberi di supporto di } G$.

DIMOSTRAZIONE. La dimostrazione viene fatta per L' essendo il ragionamento del tutto simile per L'' . Sia C un'arbitraria matrice rettangolare con più colonne che righe e sia B una sottomatrice quadrata di C con lo stesso numero di righe di C . Un risultato di teoria delle matrici, noto come teorema di Cauchy e Binet, afferma che

$$\det(CC^T) = \sum_B \det(BB^T) = \sum_B \det(B)^2 \tag{2.1}$$

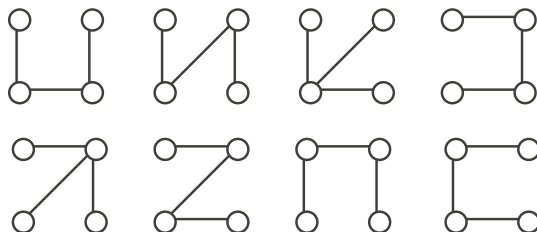
Applichiamo questo risultato alla matrice C , ottenuta aggiungendo alla matrice d'incidenza A una colonna di tutti 0 tranne un 1 in posizione k -esima. Allora abbiamo che $L' = CC^T$ e che, in base al corollario 2.48, $\det(B) \neq 0$ se e solo se le colonne di B , tranne quella aggiunta ad A che deve essere sempre presente in B se B è non singolare, corrispondono ad un albero di supporto, e in questo caso si ha $\det(B)^2 = 1$. Siccome matrici B diverse fra loro corrispondono a diversi alberi di supporto abbiamo che la somma in (2.1) effettivamente conta gli alberi di supporto. ■

2.50 ESEMPIO.



$$L' = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Si ottiene $\det(L') = 8$ e questi sono gli 8 alberi di supporto



Si noti che il numero corrisponde agli alberi diversi anche secondo le etichette dei nodi e non al numero di classi di isomorfismo diverse (due nell'esempio). Questo secondo numero è molto più difficile da calcolare. ■

2.51 ESERCIZIO. Si dimostri che il numero di alberi di supporto è n^{n-2} per il grafo completo K_n e $n^{m-1} m^{n-1}$ per il grafo completo bipartito K_{nm} . (suggerimento: si sfrutti la proprietà che il determinante non cambia se ad una riga (o colonna) si aggiunge un multiplo arbitrario di un'altra riga (colonna)). ■

Il vettore d'incidenza $e(P)$ di un cammino non molteplice P viene definito come

$$e_j(P) := \begin{cases} 1 & \text{se } j \in P^+ \\ -1 & \text{se } j \in P^- \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Analogamente viene definito il vettore d'incidenza $e(C)$ di un circuito C . Si può verificare immediatamente che $Ae(C) = 0$, per ogni circuito C .

Il vettore d'incidenza $e(Q)$ di un taglio Q generato dal sottoinsieme S di nodi viene definito come

$$e_j(Q) := \begin{cases} 1 & \text{se } j \in Q^+ \\ -1 & \text{se } j \in Q^- \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Se $u(S)$ è il vettore d'incidenza del sottoinsieme S , si ha che $u(S)A = e(Q(S))$, per ogni S (si confronti con quanto detto precedentemente per la medesima operazione).

Quindi $e(C) \in \mathcal{N}(A)$, $\forall C$, e $e(Q) \in \mathcal{R}(A')$, $\forall Q$, da cui risulta che $e(C)$ e $e(Q)$ sono ortogonali. Il sottospazio $\mathcal{C} := \text{lin}\{e(C)\}_C$ prende il nome di *sottospazio dei circuiti* mentre il sottospazio $\mathcal{Q} := \text{lin}\{e(Q)\}_Q$ prende il nome di *sottospazio dei tagli*. In base alle precedenti osservazioni \mathcal{C} e \mathcal{Q} sono ortogonali.

Un'utile caratterizzazione delle basi di \mathcal{C} e \mathcal{Q} è data dalle seguenti osservazioni: supponiamo per semplicità che G sia connesso; sia T l'insieme di archi di un albero di supporto di G e sia e una corda di T . Sia C_e l'unico circuito contenuto in $T \cup e$ (orientato come e). Si noti che $e \in C_e$ e $e \notin C_{e'}$, $\forall e' \in E \setminus T$, $e' \neq e$. Quindi i vettori $e(C_e)$ sono linearmente indipendenti. Siccome $\dim \mathcal{N}(A) = |E| - |N| + 1 = |E \setminus T|$ si deduce che $\mathcal{C} = \mathcal{N}(A)$ e che i vettori $e(C_e)$ costituiscono una base di \mathcal{C} , che prende il nome di *base fondamentale dei circuiti*. Inoltre la matrice M_C ottenuta aggregando i vettori riga $e(C_e)$ prende il nome di *matrice fondamentale dei circuiti*.

Sia ora e un ramo di T . Il sottografo $T \setminus e$ induce una partizione $(S_e, N \setminus S_e)$ dei nodi e un taglio $Q_e := Q(S_e)$. Si noti che $e \in Q_e$ e $e \notin Q_{e'}$, $\forall e' \in T$, $e' \neq e$. Quindi i vettori $e(Q_e)$ sono linearmente indipendenti. Siccome $\dim \mathcal{R}(A') = |N| - 1 = |T|$ si deduce che $\mathcal{Q} = \mathcal{R}(A')$ e che i vettori $e(Q_e)$ costituiscono una base di \mathcal{Q} , che prende il nome di *base fondamentale dei tagli*. Inoltre la matrice M_Q ottenuta aggregando i vettori riga $e(Q_e)$ prende il nome di *matrice fondamentale dei tagli*. Si veda un esempio in figura 2.26.

Sia la matrice fondamentale dei circuiti che quella dei tagli sono totalmente unimodulari. Dimostreremo ora la proprietà solo per la matrice dei circuiti. Il lettore può per esercizio dimostrarla per la matrice fondamentale dei tagli.

2.52 TEOREMA. *Una matrice fondamentale dei circuiti è totalmente unimodulare.*

DIMOSTRAZIONE. Ci limitiamo a fornire uno schema di dimostrazione. Il lettore può per esercizio completare con i dettagli.

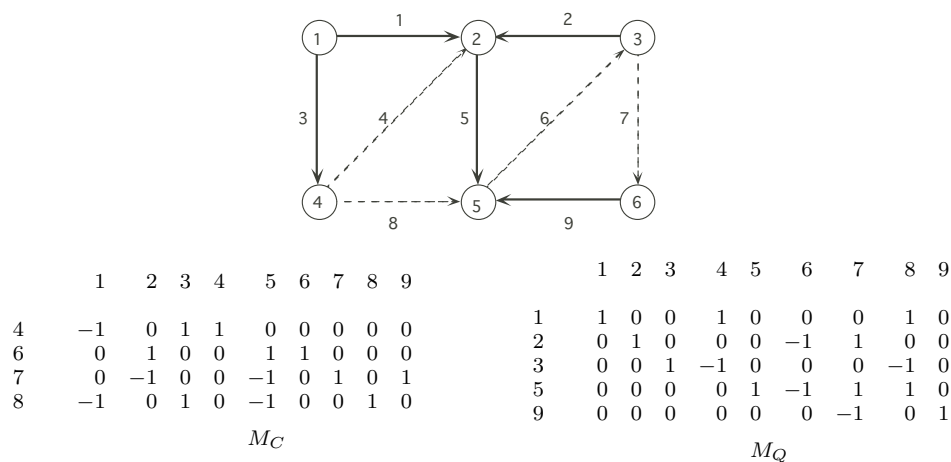


FIGURA 2.26

Sia B la sottomatrice quadrata e sia E_c l'insieme delle corde che generano i circuiti delle righe di B e sia E_a l'insieme degli archi delle colonne di B . Ora si aggiunga all'albero T l'insieme E_c e poi si tolga l'insieme E_a (alcune corde possono venire aggiunte e subito dopo rimosse se si trovano sia in E_c che in E_a) formando l'insieme $F := (T \cup E_c) \setminus E_a$. Se F è sconnesso (e in questo caso necessariamente contiene almeno un circuito) significa che un sottoinsieme $E'_a \subset E_a$ genera un taglio. Siccome i tagli sono ortogonali ai circuiti si ha $B e(E'_a) = 0$ e quindi B è singolare.

Se invece F non è sconnesso è necessariamente un albero. Gli archi di E_a sono corde di F e quindi, insieme agli archi F , generano un insieme \mathcal{C}_a di circuiti. Ognuno di questi circuiti deve necessariamente contenere almeno una corda E_c . Il lettore può verificare che il vettore d'incidenza $e(C)$ di ogni circuito C si può anche ottenere considerando i vettori d'incidenza dei circuiti elementari (in T) corrispondenti alle corde in E_c contenute in C , sommando quelli concordi con C e sottraendo quelli discordi.

Se applichiamo questa procedura ai circuiti in \mathcal{C}_a otteniamo dei vettori che contengono a turno un solo ± 1 per ogni colonna di B , cioè una matrice diagonale (a meno di permutazioni) unimodulare, ottenuta da B solo con somme e sottrazioni di righe e quindi $|\det B| = 1$. ■