

MODELLI MARKOVIANI

1. CATENE DI MARKOV

Sia S un insieme finito o numerabile. Se $X_t \in S$ ($t = 0, 1, \dots$) è una variabile aleatoria che soddisfa la seguente legge di evoluzione

$$\Pr \{X_{t+1} = j \mid X_t = i, X_{t-1} = k, X_{t-2} = h, \dots\} = \Pr \{X_{t+1} = j \mid X_t = i\} =: P_t(i, j), \quad (1)$$

l'insieme di variabili aleatorie $\{X_t\}_{t \geq 0}$ prende il nome di *catena di Markov* e gli elementi di S vengono detti *stati*. Se $X_t = i$, diciamo che la catena si trova nello stato i al tempo t (o nell'istante t). L'evento $X_t \mapsto X_{t+1}$ viene detto *transizione*. La matrice (eventualmente infinita) P_t di elementi $P_t(i, j)$ viene pertanto detta *matrice di transizione*. Per definizione si deve avere $\sum_j P_t(i, j) = 1$ per ogni i , ovvero $\mathbf{1} = P_t \mathbf{1}$ con $\mathbf{1}$ vettore colonna di tutti 1. Matrici non negative con somma 1 su ogni riga vengono dette *stocastiche* e quindi le matrici di transizione sono matrici stocastiche. Se $P_t(i, j) =: P(i, j)$ per ogni t la catena si dice *stazionaria* (oppure invariante o anche omogenea). Ci riferiremo solo a catene stazionarie.

Esempio 1: Sia $S := \{0, 1\}$ e sia $X_t \in S$ una variabile aleatoria le cui 8 possibili realizzazioni per $t = 0, 1, 2$ abbiano probabilità:

$$\begin{aligned} \Pr \{X_0 = 0, X_1 = 0, X_2 = 0\} &= 0.2, & \Pr \{X_0 = 1, X_1 = 0, X_2 = 0\} &= 0.1, \\ \Pr \{X_0 = 0, X_1 = 0, X_2 = 1\} &= 0.1, & \Pr \{X_0 = 1, X_1 = 0, X_2 = 1\} &= 0.1, \\ \Pr \{X_0 = 0, X_1 = 1, X_2 = 0\} &= 0.1, & \Pr \{X_0 = 1, X_1 = 1, X_2 = 0\} &= 0.1, \\ \Pr \{X_0 = 0, X_1 = 1, X_2 = 1\} &= 0.1, & \Pr \{X_0 = 1, X_1 = 1, X_2 = 1\} &= 0.2, \end{aligned}$$

e verifichiamo se si tratta di una catena di Markov. Calcoliamo ad esempio:

$$\Pr \{X_2 = 0 \mid X_1 = 0, X_0 = 0\} = \frac{\Pr \{X_2 = 0, X_1 = 0, X_0 = 0\}}{\Pr \{X_1 = 0, X_0 = 0\}} = \frac{0.2}{0.2 + 0.1} = \frac{2}{3}$$

mentre

$$\Pr \{X_2 = 0 \mid X_1 = 0\} = \frac{\Pr \{X_2 = 0, X_1 = 0\}}{\Pr \{X_1 = 0\}} = \frac{0.2 + 0.1}{0.2 + 0.1 + 0.1 + 0.1} = \frac{3}{5}$$

e quindi X_t non è una catena di Markov. Si può invece verificare che le seguenti realizzazioni (dove $q_1, q_2 \geq 0$ e $q_1 + q_2 = 1$) corrispondono ad una catena di Markov:

$$\begin{aligned} \Pr \{X_0 = 0, X_1 = 0, X_2 = 0\} &= 0.36 q_1, & \Pr \{X_0 = 1, X_1 = 0, X_2 = 0\} &= 0.24 q_2, \\ \Pr \{X_0 = 0, X_1 = 0, X_2 = 1\} &= 0.24 q_1, & \Pr \{X_0 = 1, X_1 = 0, X_2 = 1\} &= 0.16 q_2, \\ \Pr \{X_0 = 0, X_1 = 1, X_2 = 0\} &= 0.16 q_1, & \Pr \{X_0 = 1, X_1 = 1, X_2 = 0\} &= 0.24 q_2, \\ \Pr \{X_0 = 0, X_1 = 1, X_2 = 1\} &= 0.24 q_1, & \Pr \{X_0 = 1, X_1 = 1, X_2 = 1\} &= 0.36 q_2, \end{aligned}$$

Si calcolino per esercizio $P(0, 0)$, $P(0, 1)$, $P(1, 0)$ e $P(1, 1)$. ■

Sia q^0 un vettore (riga) tale che $q_i^0 := \Pr\{X_0 = i\}$ (distribuzione iniziale di probabilità sugli stati). Allora

$$q_j^1 := \Pr\{X_1 = j\} = \sum_{i \in S} \Pr\{X_1 = j | X_0 = i\} \Pr\{X_0 = i\} = \sum_{i \in S} q_i^0 P(i, j)$$

ovvero $q^1 = q^0 P$, da cui ricorsivamente $q^n = q^0 P^n$ (con $q_i^n := \Pr\{X_n = i\}$ e P^n la matrice P all' n -ma potenza). Allora $P^n(i, j)$ (l'elemento (i, j) di P^n) è la probabilità che la catena sia in j dopo n transizioni se si trova inizialmente in i . Si noti che $q^1 \mathbf{1} = q^0 P \mathbf{1} = q^0 \mathbf{1} = 1$ e quindi q^1 è effettivamente una distribuzione discreta di probabilità (se lo è q^0 ovviamente) e ricorsivamente la proprietà vale per ogni q^n .

Una catena di Markov viene normalmente rappresentata con un grafo orientato (ammettendo anche archi da e verso lo stesso nodo) dove i nodi corrispondono agli stati e gli archi alle transizioni con probabilità positiva.

Si consideri ora la variabile aleatoria $\tau(i) := \inf\{t > 0 : X_t = i\}$, che corrisponde all'istante della prima visita nello stato i esclusa una eventuale visita al tempo $t = 0$. Se $\Pr\{\tau(i) = \infty | X_0 = j\} > 0$ (cioè può succedere che lo stato i non venga mai visitato) allora ovviamente $E[\tau(i) | X_0 = j] = \infty$ (ma l'implicazione inversa non vale come si vedrà subito).

Esempio 2:

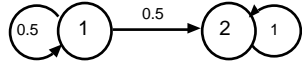


Figura 1

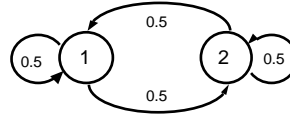


Figura 2

Sia assegnata la catena di Markov in Figura 1 e si supponga $X_0 = 1$. Per $t = 0, 1, 2, 3$ le possibili realizzazioni della catena e le rispettive probabilità sono

$$\begin{array}{ll} 1 \rightarrow 2 \rightarrow 2 \rightarrow 2 & 1/2 \\ 1 \rightarrow 1 \rightarrow 2 \rightarrow 2 & 1/2^2 \\ 1 \rightarrow 1 \rightarrow 1 \rightarrow 2 & 1/2^3 \\ 1 \rightarrow 1 \rightarrow 1 \rightarrow 1 & 1/2^3 \end{array}$$

Quindi $\Pr\{\tau(1) = 1 | X_0 = 1\} = 1/2$ e $\Pr\{\tau(1) = \infty | X_0 = 1\} = 1/2 > 0$, mentre $\Pr\{\tau(2) = k | X_0 = 1\} = 1/2^k$, da cui $\Pr\{\tau(2) = \infty | X_0 = 1\} = 0$. Si ha inoltre $E[\tau(2) | X_0 = 1] = \sum_{k \geq 1} k/2^k = 2$.

Per la catena di Markov in Figura 2 con $X_0 = 1$ si hanno le realizzazioni:

$$\begin{array}{llll} 1 \rightarrow 1 \rightarrow 1 \rightarrow 1 & 1/2^3; & 1 \rightarrow 1 \rightarrow 1 \rightarrow 2 & 1/2^3 \\ 1 \rightarrow 1 \rightarrow 2 \rightarrow 1 & 1/2^3; & 1 \rightarrow 1 \rightarrow 2 \rightarrow 2 & 1/2^3 \\ 1 \rightarrow 2 \rightarrow 1 \rightarrow 1 & 1/2^3; & 1 \rightarrow 2 \rightarrow 1 \rightarrow 2 & 1/2^3 \\ 1 \rightarrow 2 \rightarrow 2 \rightarrow 1 & 1/2^3; & 1 \rightarrow 2 \rightarrow 2 \rightarrow 2 & 1/2^3 \end{array}$$

e si vede che $\Pr\{\tau(1) = k | X_0 = 1\} = 1/2^k$ da cui $\Pr\{\tau(1) = \infty | X_0 = 1\} = 0$. ■

Gli stati vengono classificati nel seguente modo:

- $\Pr\{\tau(i) = \infty | X_0 = i\} > 0 \rightarrow i$ è uno stato *transiente*;
- $\Pr\{\tau(i) = \infty | X_0 = i\} = 0 \rightarrow i$ è uno stato *ricorrente*;

Inoltre gli stati ricorrenti vengono classificati come:

- $E[\tau(i) | X_0 = i] = \infty \rightarrow i$ è *ricorrente nullo*;
- $E[\tau(i) | X_0 = i] < \infty \rightarrow i$ è *ricorrente positivo*.

Alternativamente si possono classificare gli stati tramite la variabile aleatoria $\nu(i) := |\{t \geq 0 : X_t = i\}|$ che rappresenta il numero (eventualmente infinito) di visite allo stato i . La variabile $\nu(i)$ può essere espressa tramite la variabile aleatoria $\delta_t(i)$ definita uguale a 1 se $X_t = i$ e 0 altrimenti. Quindi $\nu(i) = \sum_{t \geq 0} \delta_t(i)$ e

$$E[\nu(j) | X_0 = i] = \sum_{t \geq 0} E[\delta_t(j) | X_0 = i] = \sum_{t \geq 0} P^t(i, j).$$

Inoltre, se $X_0 = i$, si ha $\nu(i) = 1 + \sum_{t \geq \tau(i)} \delta(i)$ e siccome, essendo la catena stazionaria, vale

$$E[\sum_{t \geq 0} \delta(i) | X_0 = i] = E[\sum_{t \geq k} \delta(i) | X_k = i],$$

si ha

$$E[\nu(i) | X_0 = i] = 1 + \Pr\{\tau(i) < \infty | X_0 = i\} E[\nu(i) | X_0 = i]$$

cioè

$$E[\nu(i) | X_0 = i] = \frac{1}{1 - \Pr\{\tau(i) < \infty | X_0 = i\}} \quad (2)$$

o anche

$$\Pr\{\tau(i) < \infty | X_0 = i\} = \frac{E[\nu(i) | X_0 = i] - 1}{E[\nu(i) | X_0 = i]} = \frac{\sum_{t \geq 0} P^t(i, i) - 1}{\sum_{t \geq 0} P^t(i, i)}$$

Se invece consideriamo $\nu(j)$ rispetto ad uno stato iniziale $X_0 = i \neq j$, si ha $\nu(j) = \sum_{t \geq \tau(j)} \delta(j)$ e quindi

$$E[\nu(j) | X_0 = i] = \Pr\{\tau(j) < \infty | X_0 = i\} E[\nu(j) | X_0 = j]$$

o anche

$$\Pr\{\tau(j) < \infty | X_0 = i\} = \frac{E[\nu(j) | X_0 = i]}{E[\nu(j) | X_0 = j]} = \frac{\sum_{t \geq 0} P^t(i, j)}{\sum_{t \geq 0} P^t(i, i)}$$

Da (2) si ha $E[\nu(i) | X_0 = i] < \infty \iff \Pr\{\tau(i) = \infty | X_0 = i\} > 0$. Quindi uno stato è transiente se e solo se $E[\nu(i) | X_0 = i] < \infty$ ed è ricorrente se e solo se $E[\nu(i) | X_0 = i] = \infty$.

Riassumendo, gli stati transienti sono caratterizzati da un numero atteso di visite finito e conseguentemente da un tempo atteso fra due visite infinito e gli stati ricorrenti positivi sono caratterizzati da un tempo atteso fra due visite finito e quindi da un numero atteso di visite infinito. Gli stati ricorrenti nulli si situano in una posizione limite fra quelli transienti e quelli ricorrenti positivi, in quanto sono caratterizzati da un numero atteso di visite infinito pur essendo infinito il tempo atteso fra due visite.

Gli stati ricorrenti positivi si classificano a loro volta in periodici e aperiodici. Si consideri il massimo comun divisore δ dell'insieme di interi $\{k : P^k(i, i) > 0\}$. Se $\delta \geq 2$ lo stato i si dice *periodico* e δ viene detto periodo dello stato, altrimenti lo stato viene detto *aperiodico*.

Una catena si dice *irriducibile* se per ogni coppia ordinata di stati i e j esiste un intero n (dipendente dalla coppia) tale che $P^n(i, j) > 0$. Alternativamente la catena è irriducibile se e solo se il grafo associato è fortemente connesso.

Teorema 1: *Se la catena è irriducibile, tutti gli stati appartengono alla stessa classe (transiente, ricorrente nulla, ricorrente positiva periodica oppure ricorrente positiva aperiodica).* ■

Per catene irriducibili si possono classificare gli stati in base ai seguenti criteri:

Teorema 2: *Sia la catena irriducibile. Allora tutti gli stati sono ricorrenti positivi se e solo se esiste una distribuzione di probabilità \bar{q} sugli stati, detta probabilità stazionaria, tale che $\bar{q} = \bar{q}P$.* ■

Teorema 3: *Sia la catena irriducibile. Sia k uno stato fissato. Allora tutti gli stati sono transienti se e solo se esiste una funzione limitata h sugli stati tale che $h(i) = \sum_{j \neq k} P(i, j) h(j)$ per $i \neq k$.* ■

Teorema 4: *Sia la catena irriducibile, ricorrente positiva e aperiodica. Allora esiste $P^* := \lim_{n \rightarrow \infty} P^n$ con $P^*(i, j) = \bar{q}(j)$, $\forall i$, dove \bar{q} viene detta probabilità limite ed è l'unica probabilità stazionaria.* ■

Se la catena non è irriducibile valgono i seguenti risultati:

Teorema 5: *Se uno stato j è transiente o ricorrente nullo $\lim_{k \rightarrow \infty} P^k(i, j) = 0$ per ogni stato i e quindi esiste ed è nulla la probabilità limite $\bar{q}(j) := \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_i q^0 P^k(i, j)$ per qualsiasi distribuzione iniziale q^0 .* ■

Teorema 6: *Se uno stato j è ricorrente positivo aperiodico esiste ed è positiva la probabilità limite $\bar{q}(j) := \lim_{k \rightarrow \infty} P^k(j, j)$ a partire dallo stesso stato j . Inoltre $\bar{q}(j) = 1/E[\tau(j) | X_0 = j]$.* ■

In base a questi risultati e alla formula $E[\nu(j) | X_0 = i] = \sum_{k \geq 0} P^k(i, j)$, si vede che

- se i è transiente $\sum_{k \geq 0} P^k(i, i) < \infty$ (per definizione) e quindi $P^k(i, i) \rightarrow 0$;
- se i è ricorrente positivo aperiodico $\lim_{k \rightarrow \infty} P^k(i, i) > 0$ e quindi $\sum_{k \geq 0} P^k(i, i) = \infty$;
- se i è ricorrente nullo allora $\sum_{k \geq 0} P^k(i, i) = \infty$ pur essendo anche $P^k(i, i) \rightarrow 0$.

Interpretando la connessione forte come relazione di equivalenza fra gli stati ed introducendo un arco fra due classi di equivalenza se esiste un arco fra un elemento di una classe ad un elemento dell'altra classe, l'insieme quoziente risulta essere un grafo orientato aciclico. Le classi con archi uscenti sono formate da stati transienti. Le classi senza archi uscenti formano delle sottocatene irriducibili. Se tale classe è formata da un solo stato, lo stato prende il nome di stato *assorbente*.

Teorema 7: *Se S è finito, non vi sono stati ricorrenti nulli ed esiste almeno uno stato ricorrente positivo.* ■

Esempio 3: Sia $S = Z$,

$$P(i, j) = \begin{cases} p & \text{se } j = i + 1 \\ 1 - p & \text{se } j = i - 1 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Non è difficile calcolare

$$P^{2n}(i, i) = \binom{2n}{n} p^n (1 - p)^n \quad \text{e} \quad P^{2n-1}(i, i) = 0$$

Dalla teoria delle funzioni generatrici si sa che

$$\sum_{n \geq 0} \binom{2n}{n} z^n = \frac{1}{\sqrt{1-4z}}$$

e quindi

$$\sum_{n \geq 0} P^{2n}(i, i) = \frac{1}{\sqrt{1-4p(1-p)}} = E[\nu(i) | X_0 = i]$$

Allora se $p \neq 1/2$, si ha $1-4p(1-p) > 0$ e la serie è convergente e la catena è formata tutta da stati transienti, dato che è irriducibile. Se $p = 1/2$ la serie è divergente e gli stati non sono transienti. Usando la formula di Stirling ($n! \asymp n^n e^{-n} \sqrt{2\pi n}$) si ha

$$\binom{2n}{n} \asymp \frac{2^{2n}}{\sqrt{\pi n}}$$

e quindi

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P^{2n}(i, i) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^{2n}}{\sqrt{\pi n}} p^n (1-p)^n \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{\pi n}} = 0$$

da cui si ha che gli stati sono ricorrenti nulli per $p = 1/2$. Per quel che riguarda la variabile $\tau(i)$ (prima visita nello stato i) si ottiene

$$\Pr\{\tau(i) = 2n | X_0 = i\} = 2C_{n-1} p^n (1-p)^n =: a_n$$

dove $C_n = \binom{2n}{n} \frac{1}{n+1}$ sono i numeri di Catalan, corrispondenti al numero di modi possibili in cui $2(n+1)$ transizioni a partire da i ritornano in i ma visitando solo stati $j > i$. Si sa che

$$\sum_{n \geq 0} C_n z^n = \frac{1 - \sqrt{1-4z}}{2z}$$

e quindi

$$\sum_{n \geq 1} a_n = 2p(1-p) \sum_{n \geq 0} C_n p^n (1-p)^n = 1 - \sqrt{1-4p(1-p)}$$

da cui si verifica che $\Pr\{\tau(i) = \infty | X_0 = i\} > 0$ se $p \neq 1/2$. Inoltre, se $p = 1/2$ si ha

$$E[\tau(i) | X_0 = i] = \sum_{n \geq 1} 2n a_n = \sum_{n \geq 0} C_n (n+1) \frac{1}{4^n} = \sum_{n \geq 0} \binom{2n}{n} \frac{1}{4^n} = \frac{1}{\sqrt{1-4 \cdot \frac{1}{4}}} = \infty$$

e ritroviamo che gli stati sono ricorrenti nulli.

Alternativamente, applicando il Teorema 3 e scegliendo lo stato $k = 0$, si ottengono le formule

$$h(1) = p h(2), \quad h(-1) = (1-p) h(-2)$$

$$h(i) = p h(i+1) + (1-p) h(i-1) \quad \text{per } |i| \geq 2$$

Se $p > 1/2$ si ponga $h(i) = 0$ per $i < 0$ e per $i > 0$ si calcoli la ricorsione:

$$h(1) = 1, \quad h(2) = \frac{1}{p} h(1), \quad h(i) = \frac{1}{p} h(i-1) - \frac{1-p}{p} h(i-2), \quad i \geq 3.$$

Definendo $h(0) = 0$, la funzione generatrice della successione è, ponendo $\alpha := (1-p)/p$,

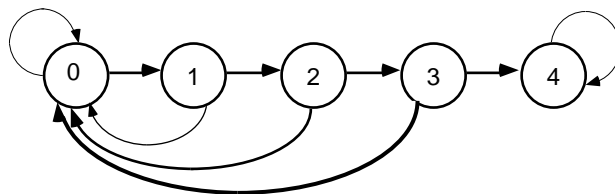
$$f(z) = \frac{z}{1 - (\alpha+1)z + \alpha z^2} = \frac{1}{(1-\alpha)(1-z)} - \frac{1}{(1-\alpha)(1-\alpha z)} = \sum_i \frac{1-\alpha^i}{1-\alpha} z^i$$

da cui

$$h(i) = \frac{1-\alpha^i}{1-\alpha}$$

che risulta limitata essendo $\alpha < 1$ se $p > 1/2$. ■

Esempio 4: Si consideri l'uscita del rosso o del nero al gioco della roulette. Si voglia calcolare la probabilità che all'interno di n puntate non si abbia una sequenza di k rossi consecutivi. Il calcolo può risultare utile se ad esempio si volesse adottare la seguente strategia di gioco: puntare a sul nero, se esce nero ritirare la vincita e puntare nuovamente a , se esce rosso puntare $2a$ sul nero, e procedere ricorsivamente raddoppiando la puntata finché non esce nero. Come si vede la vincita è sempre a ogni volta che esce il nero. Tuttavia le puntate crescono in modo esponenziale e se il rosso esce per k volte consecutive bisogna puntare $2^k a$. Sia $k - 1$ corrispondente alla massima somma disponibile. Se il rosso dovesse uscire k volte consecutive si deve rinunciare a puntare perdendo tutto. Vogliamo quindi calcolare la probabilità a priori di una sequenza di k rossi consecutivi. Il problema si può modellare con la seguente catena di Markov (esemplificata nel caso $k = 4$)



dove tutti gli archi hanno probabilità di transizione $1/2$, tranne l'arco uscente dallo stato 4 che ha probabilità 1. Ogni volta in cui si vince, cioè esce il nero, la catena va (o rimane) nello stato 0. Se esce il rosso e la catena si trova in i , lo stato successivo è $i + 1$. Quando la catena si trova nello stato k allora è uscita una sequenza di k rossi consecutivi e la catena rimane nello stato k in tutte le successive iterazioni. La probabilità cercata è pertanto data da $P^n(0, k)$. Ad esempio si trova:

$$P^{22}(0, 4) = 0.515\dots \quad \text{oppure per } k = 10 \quad P^{1421}(0, 10) = 0.5001\dots$$

Tutti gli stati, tranne lo stato k sono transienti e lo stato k è assorbente. ■

Esempio 5: (processo d'invecchiamento) Siano Y_1, Y_2, \dots variabili aleatorie a valori interi positivi, indipendenti ed identicamente distribuite con $f(i) := \Pr\{Y_k = i\}, \forall k$, e $\bar{F}(i) := \sum_{k=i}^{\infty} f(k)$. Le Y_i rappresentano le durate di sistemi sostituiti in successione, di vita media $\bar{Y} := \sum_{k=1}^{\infty} k f(k) = \sum_{k=1}^{\infty} \bar{F}(k)$. Quindi le variabili aleatorie $T_k := \sum_{i=1}^k Y_i$ costituiscono un processo di rinnovo a tempo discreto. Si definisca allora la seguente catena di Markov:

$$X_t = \begin{cases} t & \text{se } 0 \leq t < T_1 \\ t - T_k & \text{se } T_k \leq t < T_{k+1} \end{cases}$$

dove X_t rappresenta l'età del sistema in operazione al tempo t , ovvero il tempo dall'ultima sostituzione. La matrice di transizione è data, per $i \geq 1$, da

$$P(i-1, j) = \begin{cases} \bar{F}(i+1)/\bar{F}(i) & \text{se } j = i \\ f(i)/\bar{F}(i) & \text{se } j = 0 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

dove le probabilità di non rottura (rottura) al tempo t sono condizionate dal fatto che il sistema ha raggiunto l'età i . La catena è irriducibile e, applicando il Teorema 2 si ottiene:

$$\bar{q}_1 = \frac{\bar{F}(2)}{\bar{F}(1)} \bar{q}_0, \quad \bar{q}_2 = \frac{\bar{F}(3)}{\bar{F}(2)} \bar{q}_1, \quad \bar{q}_3 = \frac{\bar{F}(4)}{\bar{F}(3)} \bar{q}_2, \dots$$

da cui $\bar{q}_i = \bar{F}(i+1)\bar{q}_0$ (si noti che $\bar{F}(1) = 1$). Quindi $\bar{q}_0 = 1/\bar{Y}$ affinché $\sum_i \bar{q}_i = 1$. allora se la vita media \bar{Y} è finita esiste una probabilità stazionaria data da $\bar{q}_i = \bar{F}(i+1)/\bar{Y}$ e gli stati sono ricorrenti positivi.

Sia ad esempio $f(i) := (1-a)a^{i-1}$ con vita media $\bar{Y} = 1/(1-a)$. Allora

$$\begin{aligned}\bar{F}(i) &= \sum_{k=i}^{\infty} (1-a)a^{k-1} = 1 - \sum_{k=1}^{i-1} (1-a)a^{k-1} = \\ &= 1 - \sum_{k=0}^{i-2} (1-a)a^k = 1 - (1-a) \frac{1-a^{i-1}}{1-a} = a^{i-1}\end{aligned}$$

da cui $P(i, i+1) = a$, $P(i, 0) = 1-a$ e $\bar{q}_i = a^i(1-a)$. ■

Supponiamo S finito e quindi P è una matrice (finita). Siccome $\sum_j P(i, j) = 1$, $\|P\|_{\infty} = 1$ e siccome $\rho(P) \leq \|P\|$ per ogni norma, si ha $\rho(P) \leq 1$. Inoltre $\mathbf{1}$ è autovettore destro con autovalore 1 e quindi $\rho(P) = 1$. In corrispondenza dell'autovalore 1 vi è un autovettore sinistro \bar{q} tale che $\bar{q} = \bar{q}P$. Si può dimostrare che $\bar{q} \geq 0$ e quindi vale il seguente risultato:

Teorema 8: *Esiste sempre almeno una probabilità stazionaria per una catena a stati finiti.* ■

Per l'unicità della probabilità stazionaria bisogna invocare l'irriducibilità.

Teorema 9: *Se una catena di Markov a stati finiti è irriducibile allora l'autovalore 1 ha molteplicità 1 ed è quindi unica la probabilità stazionaria.* ■

Pur essendo unico l'autovalore 1, non è escluso che vi siano altri autovalori di valore assoluto pari a 1.

Teorema 10: *Se una catena di Markov a stati finiti è irriducibile e aperiodica allora l'autovalore 1 è l'unico di modulo 1.* ■

Quindi, se la catena è irriducibile e aperiodica, P si può scrivere come $P = \mathbf{1}\bar{q} + Q$. È immediato vedere che Q eredita tutti gli autovettori di P e eredita tutti gli autovalori tranne l'autovalore 1 che viene invece trasformato in 0. Inoltre si vede che $P^k = \mathbf{1}\bar{q} + Q^k$. Essendo $\rho(Q) < 1$, $Q^k \rightarrow 0$ e quindi $\lim_{k \rightarrow \infty} P^k = \mathbf{1}\bar{q}$ (come già espresso nel Teorema 4). Se la catena è irriducibile e periodica allora P ha una speciale struttura, qui esemplificata nel caso di periodo $\delta = 3$:

$$P = \begin{pmatrix} 0 & P_1 & 0 \\ 0 & 0 & P_2 \\ P_3 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad P^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & P_1 P_2 \\ P_2 P_3 & 0 & 0 \\ 0 & P_3 P_1 & 0 \end{pmatrix}, \quad P^3 = \begin{pmatrix} P_1 P_2 P_3 & 0 & 0 \\ 0 & P_2 P_3 P_1 & 0 \\ 0 & 0 & P_3 P_1 P_2 \end{pmatrix} \quad (3)$$

Se consideriamo la sottocatena indotta $X_0, X_{\delta}, X_{2\delta}, \dots$ si vede che questa si divide in δ catene indipendenti, irriducibili e aperiodiche con matrici di transizione $(P_1 P_2 \dots P_{\delta})$, $(P_2 P_3 \dots P_{\delta} P_1)$ eccetera. Essendo 1 autovettore di P^{δ} si ottiene che gli autovalori di P di modulo 1 sono le radici di $\lambda^{\delta} = 1$. È chiaro quindi che nel caso periodico non esiste $\lim_{k \rightarrow \infty} P^k$. In questo caso si definisce la seguente matrice, detta matrice limite, o anche limite di Cesaro:

$$P^* = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} P^k$$

È immediato vedere che $P^* = \lim_{k \rightarrow \infty} P^k$ quando il limite esiste. Nel caso periodico P^* ha la seguente struttura:

$$P^* = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{i=0}^{\delta-1} P^{k\delta+i} = \frac{1}{\delta} \sum_{i=0}^{\delta-1} P^i \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} (P^\delta)^k$$

P^δ è la matrice di transizione di δ catene indipendenti. Siano $\bar{q}_1, \dots, \bar{q}_\delta$ le corrispondenti probabilità stazionarie. Quindi:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} (P^\delta)^k = \begin{pmatrix} \mathbf{1} \bar{q}_1 & & & \\ & \mathbf{1} \bar{q}_2 & & \\ & & \dots & \\ & & & \mathbf{1} \bar{q}_\delta \end{pmatrix}$$

Le matrici P^i hanno la struttura evidenziata in (3) e si trova che:

$$P^* = \frac{1}{\delta} \begin{pmatrix} \mathbf{1} \bar{q}_1 & \mathbf{1} \bar{q}_2 & \dots & \mathbf{1} \bar{q}_\delta \\ \mathbf{1} \bar{q}_1 & \mathbf{1} \bar{q}_2 & \dots & \mathbf{1} \bar{q}_\delta \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \mathbf{1} \bar{q}_1 & \mathbf{1} \bar{q}_2 & \dots & \mathbf{1} \bar{q}_\delta \end{pmatrix}$$

e la probabilità stazionaria è data da

$$\bar{q} = \frac{1}{\delta} (\bar{q}_1 \quad \bar{q}_2 \quad \dots \quad \bar{q}_\delta)$$

Nel caso di catena riducibile la matrice di transizione può essere scritta nel seguente modo per un'opportuna permutazione degli stati:

$$P = \begin{pmatrix} R_1 & & & & \\ & R_2 & & & \\ & & \dots & & \\ & & & R_m & \\ T_1 & T_2 & \dots & T_m & W \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R & \\ T & W \end{pmatrix}$$

corrispondente a m classi irriducibili con matrici di transizione R_i e ad un insieme di stati transienti con transizioni T_i verso la classe i e W verso stati transienti. Si noti che da ogni stato transiente esiste un cammino verso uno stato ricorrente, per cui esiste un intero k tale che nella matrice

$$P^k = \begin{pmatrix} R^k & \\ \tilde{T} & W^k \end{pmatrix}$$

ogni riga di \tilde{T} ha almeno un valore strettamente positivo e quindi ogni riga di W^k ha somma strettamente minore di 1, cioè $\rho(W^k) < 1$, ovvero $\rho(W) < 1$ e quindi $W^k \rightarrow 0$ se $k \rightarrow \infty$. Quindi la matrice limite deve avere la seguente struttura:

$$P^* = \begin{pmatrix} R_1^* & & & & \\ & R_2^* & & & \\ & & \dots & & \\ & & & R_m^* & \\ T_1^* & T_2^* & \dots & T_m^* & 0 \end{pmatrix}$$

Dalla relazione $P P^* = P^*$ si ottiene $T_i R_i^* + W T_i^* = T_i^*$ per ogni i , da cui $T_i^* = (I - W)^{-1} T_i R_i^*$. La matrice $I - W$ è invertibile perché $\rho(W) < 1$ e R_i^* viene calcolato come esposto precedentemente.

Esempio 6:

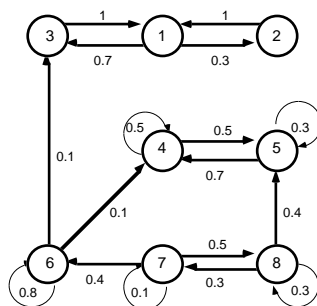


Figura 3

Si consideri la catena in Figura 3. Come si vede gli stati 1,2 e 3 costituiscono una classe irriducibile e periodica e gli stati 4 e 5 costituiscono una classe irriducibile e aperiodica. Gli stati 6, 7 e 8 sono transienti. La matrice di transizione è:

$$P = \begin{pmatrix} 0 & \frac{3}{10} & \frac{7}{10} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{7}{10} & \frac{3}{10} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{10} & \frac{1}{10} & 0 & \frac{4}{5} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{2}{5} & \frac{1}{10} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{2}{5} & 0 & \frac{3}{10} & \frac{3}{10} \end{pmatrix}$$

dove

$$R_1 = \begin{pmatrix} 0 & \frac{3}{10} & \frac{7}{10} \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad R_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{7}{10} & \frac{3}{10} \end{pmatrix}$$

$$T_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{10} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad T_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{10} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{5} \end{pmatrix}, \quad W = \begin{pmatrix} \frac{4}{5} & 0 & 0 \\ \frac{2}{5} & \frac{1}{10} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{3}{10} & \frac{3}{10} \end{pmatrix}$$

Tenendo conto che

$$R_1^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{10} & \frac{7}{10} \\ 0 & \frac{3}{10} & \frac{7}{10} \end{pmatrix}$$

si ha

$$R_1^* = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{3}{20} & \frac{7}{20} \\ \frac{1}{2} & \frac{3}{20} & \frac{7}{20} \\ \frac{1}{2} & \frac{3}{20} & \frac{7}{20} \end{pmatrix}, \quad R_2^* = \begin{pmatrix} \frac{7}{12} & \frac{5}{12} \\ \frac{7}{12} & \frac{5}{12} \end{pmatrix}$$

Si trova che

$$(I - W)^{-1} = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ \frac{35}{12} & \frac{35}{24} & \frac{25}{24} \\ \frac{5}{4} & \frac{5}{8} & \frac{15}{8} \end{pmatrix}$$

e quindi

$$T_1^* = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{3}{40} & \frac{7}{40} \\ \frac{7}{48} & \frac{7}{160} & \frac{49}{480} \\ \frac{1}{16} & \frac{3}{160} & \frac{7}{160} \end{pmatrix} \quad T_2^* = \begin{pmatrix} \frac{7}{24} & \frac{5}{24} \\ \frac{119}{288} & \frac{85}{288} \\ \frac{49}{96} & \frac{35}{96} \end{pmatrix}$$

da cui

$$P^* = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{3}{20} & \frac{7}{20} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{3}{20} & \frac{7}{20} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{3}{20} & \frac{7}{20} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{7}{12} & \frac{5}{12} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{7}{12} & \frac{5}{12} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{3}{40} & \frac{7}{40} & \frac{7}{24} & \frac{5}{24} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{7}{48} & \frac{7}{160} & \frac{49}{480} & \frac{119}{288} & \frac{85}{288} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{16} & \frac{3}{160} & \frac{7}{160} & \frac{49}{96} & \frac{35}{96} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

L'elemento $P^*(i, j)$ è la probabilità che, dopo un tempo "sufficientemente lungo", la catena si trovi in j a partire dallo stato i .

Un'importante proprietà delle catene irriducibili, che rende le catene di Markov un utile modello matematico, è contenuta nel seguente teorema.

Teorema 11: *Sia X una catena di Markov irriducibile, ricorrente positiva e aperiodica su uno spazio di stati finito S con distribuzione limite \bar{q} e sia f una funzione $S \rightarrow R$. Allora*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f(X_k) = \sum_{i \in S} \bar{q}_i f(i)$$

■

In altre parole la media temporale di una generica funzione sugli stati si ottiene tramite la media pesata sugli stati dei valori della funzione.

La proprietà Markoviana espressa in (1) stabilisce che, per ogni t , una volta noto X_t , il passato X_0, X_1, \dots, X_{t-1} non aggiunge informazione utile per la predizione del futuro X_{t+1}, X_{t+2}, \dots . Analogamente, noto X_t , la conoscenza degli stati futuri non fornisce informazione aggiuntiva sugli stati passati che hanno 'causato' lo stato X_t . Quindi passato e futuro sono condizionalmente indipendenti dato il presente e una catena di Markov presenta un comportamento simmetrico rispetto al tempo nel senso che possiamo anche scrivere

$$\Pr \{X_{t-1} = j \mid X_t = i, X_{t+1} = k, X_{t+2} = h, \dots\} = \Pr \{X_{t-1} = j \mid X_t = i\} =: \tilde{P}(i, j), \quad (4)$$

La proprietà (4) può anche essere dimostrata facendo uso della matrice di transizione. Infatti, per una assegnata distribuzione iniziale q^0 sugli stati si ha

$$\begin{aligned} \Pr \{X_{t-1} = j \mid X_t = i, X_{t+1} = k\} &= \frac{\Pr \{X_{t-1} = j, X_t = i, X_{t+1} = k\}}{\Pr \{X_t = i, X_{t+1} = k\}} = \\ &= \frac{(\sum_h q_h^0 P^{t-1}(h, j)) P(j, i) P(i, k)}{(\sum_h q_h^0 P^t(h, i)) P(i, k)} = \frac{(\sum_h q_h^0 P^{t-1}(h, j)) P(j, i)}{\sum_h q_h^0 P^t(h, i)} = \\ &= \frac{\Pr \{X_{t-1} = j, X_t = i\}}{\Pr \{X_t = i\}} = \Pr \{X_{t-1} = j \mid X_t = i\} \end{aligned}$$

In altre parole il processo temporale inverso è anch'esso una catena di Markov, anche se in generale la catena inversa non è stazionaria (mentre quella originaria lo è). Per avere una catena inversa stazionaria bisogna che l'espressione (probabilità della transizione inversa)

$$\frac{(\sum_h q_h^0 P^{t-1}(h, j)) P(j, i)}{\sum_h q_h^0 P^t(h, i)}$$

sia invariante rispetto a t . A questo scopo si assume che la distribuzione iniziale q^0 corrisponda alla probabilità di osservare uno stato se la catena è rimasta in evoluzione per un tempo sufficientemente lungo (e casuale) da una precedente osservazione. Se esiste una probabilità stazionaria e q^0 è tale probabilità si ha

$$\frac{(\sum_h q_h^0 P^{t-1}(h, j)) P(j, i)}{\sum_h q_h^0 P^t(h, i)} = \frac{q_j^0 P(j, i)}{q_i^0}$$

Quindi, se assumiamo l'irriducibilità e l'esistenza di una probabilità stazionaria \bar{q} , possiamo definire la matrice di transizione della catena inversa (e stazionaria) come

$$\tilde{P}(i, j) := \Pr \{X_{t-1} = j \mid X_t = i\} = \frac{\bar{q}_j P(j, i)}{\bar{q}_i}$$

Se in particolare la catena inversa presenta la medesima distribuzione di quella originaria (cosicché anche una realizzazione inversa potrebbe essere stata generata dalla stessa catena) si fa uso della seguente

Definizione: Una catena si dice invertibile se $\{X_0, \dots, X_t\}$ e $\{X_t, \dots, X_0\}$ hanno la medesima distribuzione per ogni t . ■

Si noti, ad esempio, che una catena non irriducibile non può essere invertibile. Se la catena è irriducibile con probabilità stazionaria \bar{q} basta porre $\tilde{P}(i, j) = P(i, j)$ ovvero

$$\bar{q}_i P(i, j) = \bar{q}_j P(j, i) \tag{5}$$

Teorema 12: Una catena di Markov è invertibile se e solo se P ammette una distribuzione stazionaria unica \bar{q} che soddisfa l'equazione (5). ■

L'equazione (5) prende il nome di *equazione dettagliata di bilancio*, e, se esiste \bar{q} che la soddisfa, necessariamente tale \bar{q} è una probabilità stazionaria. Ad esempio si abbia $S = \{1, 2, 3\}$,

$$P = \begin{pmatrix} 1-p-q & p & q \\ q & 1-p-q & p \\ p & q & 1-p-q \end{pmatrix}$$

È immediato calcolare $\bar{q} = (1/3, 1/3, 1/3)$. Quindi $\tilde{P}(i, j) = P(j, i)$ e la catena è invertibile se e solo se $p = q$. In generale una catena è invertibile se il grafo associato è un albero (contando come un arco unico le transizioni $i \rightarrow j$ e $j \rightarrow i$ che devono essere entrambe presenti se la catena è irriducibile).

2. PROCESSI DI MARKOV

In un processo di Markov il tempo è continuo e la proprietà Markoviana espressa da (1) nel caso di tempo discreto diventa:

$$\Pr \{X_{t+s} = j \mid X_u, u \leq t\} = \Pr \{X_{t+s} = j \mid X_t\} \quad (6)$$

e indicando con

$$P(t)(i, j) = \Pr \{X_t = j \mid X_0 = i\}$$

si vede che (6) implica

$$P(0) = I; \quad P(t+s) = P(t)P(s), \quad t, s \geq 0 \quad (7)$$

Si assume che per ogni realizzazione $X_t(\omega)$ la funzione $t \mapsto X_t(\omega)$ sia continua dalla destra con limiti dalla sinistra, cosicché le uniche discontinuità sono costituite dalle transizioni da uno stato ad un altro stato. Tuttavia, anche con questa precauzione, un processo di Markov può avere un numero infinito di transizioni in un intervallo finito di tempo. Se ciò non avviene il processo viene detto *regolare*. Se S è finito ogni processo di Markov è regolare. Vedremo più avanti altre condizioni che assicurano la regolarità di un processo quando S ha infiniti elementi. Per il momento assumiamo la regolarità dei processi.

La proprietà (7) definisce un semigruppato di operatori. È noto che il limite

$$\lim_{t \downarrow 0} q \frac{P(t) - I}{t} = qQ$$

esiste per q appartenente ad un sottospazio denso. Quindi se $P(t)$ è una matrice il limite esiste sempre e la matrice Q prende il nome di *generatore infinitesimo*. I valori

$$Q(i, j) = \lim_{t \downarrow 0} \frac{P(t)(i, j)}{t}, \quad i \neq j$$

sono frequenze di transizioni. Infatti si supponga di effettuare il seguente esperimento: al tempo 0 si porta il processo nello stato i , si attende un tempo Δt , e, se il processo all'istante Δt si trova nello stato j , dichiariamo l'esperimento positivo. Il processo viene riportato in i e l'esperimento viene ripetuto. Il numero di esperimenti che vengono effettuati per unità di tempo è $1/\Delta t$. Il numero medio di esperimenti positivi per unità di tempo è dato dalla probabilità di successo di ciascun esperimento volte il numero di esperimenti, cioè $P(\Delta t)(i, j)/\Delta t$. Se Δt è finito non abbiamo la garanzia che il processo si trovi in j con una transizione direttamente da i . Ma se $\Delta t \rightarrow 0$ il successo dell'esperimento indica una transizione diretta $i \rightarrow j$. Quindi $Q(i, j)$ rappresenta il numero medio di transizioni nell'unità di tempo ed è normalmente il dato sperimentale da cui successivamente si calcola $P(t)$. I valori $Q(i, i)$ dipendono dai valori $Q(i, j)$, $i \neq j$, tramite l'immediata relazione $Q(i, i) = -\sum_{j \neq i} Q(i, j)$.

La distribuzione di probabilità sugli stati $q(t)$ evolve quindi secondo l'equazione differenziale

$$\dot{q}(t) = q(t)Q$$

come si ricava da

$$\dot{q}(t) = \lim_{s \downarrow t} \frac{q(s) - q(t)}{s - t} = q(t) \lim_{s \downarrow t} \frac{P(s-t) - I}{s-t} = q(t)Q$$

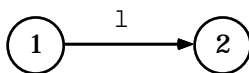
Si ha anche

$$\dot{P}(t) = P(t)Q, \quad \dot{P}(t) = QP(t)$$

I due sistemi ammettono soluzione unica se il processo è regolare e in questo caso la soluzione assume la seguente forma esponenziale

$$P(t) = e^{Qt} = I + Qt + \frac{Q^2 t^2}{2} + \frac{Q^3 t^3}{3!} + \frac{Q^4 t^4}{4!} + \dots$$

Consideriamo ora il modo in cui avviene una transizione da uno stato verso un altro stato. In particolare definiamo la variabile stocastica $T_i := \min \{t \geq 0 : X_t \neq i \mid X_0 = i\}$ che rappresenta il soggiorno del processo nello stato i . A tal fine consideriamo il seguente processo:



dove si effettua un'unica transizione da 1 a 2 con frequenza λ e quindi

$$\Pr \{T_1 \leq t\} = \Pr \{\exists s : X_s = 2, 0 \leq s \leq t \mid X_0 = 1\} = \Pr \{X_t = 2 \mid X_0 = 1\} = P(1, 2)(t).$$

Si ha

$$Q = \begin{pmatrix} -\lambda & \lambda \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = -\lambda \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} =: -\lambda \hat{Q}$$

e si verifica immediatamente che $Q^k = (-\lambda)^k \hat{Q}^k$, $k = 1, 2, \dots$, da cui

$$P(t) = I + \sum_{k \geq 1} \frac{Q^k t^k}{k!} = I + \hat{Q} \sum_{k \geq 1} \frac{(-\lambda)^k t^k}{k!} = I + \hat{Q} (e^{-\lambda t} - 1)$$

$$P(t) = \begin{pmatrix} e^{-\lambda t} & 1 - e^{-\lambda t} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

e allora $\Pr \{T_1 \leq t\} = 1 - e^{-\lambda t}$. Questo processo, con distribuzione esponenziale, ha l'importante proprietà di essere 'senza memoria', ovvero

$$\Pr \{T_1 \leq t + s \mid T_1 > t\} = \Pr \{T_1 \leq s\}$$

cioè, se al tempo t non ci sono state transizioni, la probabilità che la transizione avvenga nelle prossime s unità di tempo, è invariante rispetto a t , cioè al tempo trascorso. Per dimostrarlo consideriamo le probabilità condizionate

$$\Pr \{T_1 > t + s \mid T_1 > t\} = \Pr \{X_{t+s} = 1 \mid X_t = 1\} \quad \text{e} \quad \Pr \{T_1 > s\} = \Pr \{X_s = 1 \mid X_0 = 1\}$$

Infatti

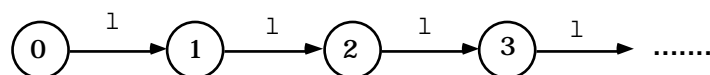
$$\Pr \{X_{t+s} = 1 \mid X_t = 1\} = \frac{\Pr \{X_{t+s} = 1; X_t = 1\}}{\Pr \{X_t = 1\}} = \frac{\Pr \{X_{t+s} = 1\}}{\Pr \{X_t = 1\}} = \frac{e^{-\lambda(t+s)}}{e^{-\lambda t}} = e^{-\lambda s}$$

Si verifica facilmente che $E[T_1] = 1/\lambda$, $E[T_1^2] = 2/\lambda^2$, $\sigma_{T_1}^2 = 1/\lambda^2$. Più in generale allora, se indichiamo $\lambda(i) = -Q(i, i)$ abbiamo che

$$\Pr \{T_i \leq t\} = 1 - e^{-\lambda(i)t}$$

e quindi il processo di Markov corrisponde a soggiorni nei vari stati distribuiti esponenzialmente seguiti da transizioni verso gli altri stati con probabilità proporzionali a $Q(i, j)$. Se ad ogni transizione facciamo seguire

un'altra transizione con la medesima distribuzione esponenziale abbiamo un processo che prende il nome di *processo di Poisson* e che possiamo rappresentare schematicamente come:



Per un processo di Poisson si ha

$$Q = \begin{pmatrix} -\lambda & \lambda & 0 & 0 & \dots \\ 0 & -\lambda & \lambda & 0 & \dots \\ 0 & 0 & -\lambda & \lambda & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}$$

e, integrando le equazioni differenziali

$$\dot{q}_0(t) = -\lambda q_0(t), \quad q_0(0) = 1; \quad \dot{q}_k(t) = \lambda(q_{k-1}(t) - q_k(t)), \quad q_k(0) = 0, \quad k = 1, 2, \dots,$$

si ottiene

$$q_k(t) = \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t} \quad (8)$$

che rappresenta la probabilità di avere k transizioni di frequenza λ in un intervallo di lunghezza t . L'importanza dei processi di Poisson risiede nel fatto che possono essere visti come la sovrapposizione di un numero molto grande di eventi indipendenti. Si considerino ad esempio n punti distribuiti uniformemente e indipendentemente su un segmento di lunghezza L . Dato un intervallo di lunghezza t la probabilità di non trovare nessuno degli n punti nell'intervallo è data da $(1 - t/L)^n$. Se ora facciamo tendere sia n e L ad infinito tenendo costante il rapporto $n/L =: \lambda$ otteniamo

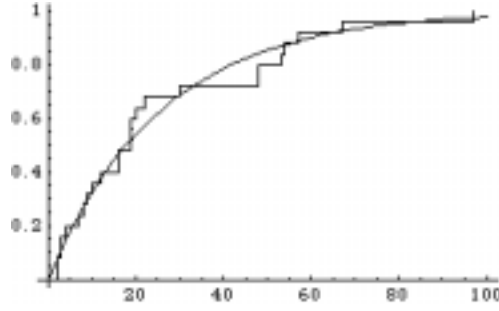
$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{t\lambda}{n}\right)^n = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{x}\right)^{x\lambda t} = e^{-\lambda t}$$

cioè la probabilità di non avere eventi (transizioni) nel tempo t .

Esempio 7: Molti fenomeni naturali possono essere modellati come processi di Poisson, soprattutto quando dipendono da un elevato numero di cause indipendenti fra loro. Ad esempio gli intertempi fra i passaggi di automobili su una strada con scarso traffico (scarso, altrimenti gli eventi si influenzano fra loro) possono essere considerati come variabili di Poisson. I seguenti dati si riferiscono ad una rilevazione effettuata su una strada poco trafficata e indicano i tempi in secondi fra il passaggio di un'automobile e di quella successiva.

$$d = \{3, 53, 9, 2, 97, 54, 20, 67, 12, 19, 16, 57, 30, 7, 48, 19, 48, 3, 22, 2, 19, 10, 16, 4, 8\}$$

Il valore di λ è dato da $0.0387597 = 25/645$. Si dispongano in ordine ascendente i dati e si costruisca una funzione a scalini $\hat{F}(t)$ che aumenta di un $1/25$ ad ogni valore (ovvero sia $\mu(t)$ una funzione definita come $\mu(t) = 0$ se $t < 0$ e $\mu(t) = 1$ se $t \geq 0$; allora $\hat{F}(t) = \sum_k (1/25) \mu(t - d_k)$). La funzione \hat{F} rappresenta la distribuzione di probabilità dei dati sperimentali. Sia $F(t) = 1 - e^{-\lambda t}$ la distribuzione di una variabile di Poisson. In figura sono riportate le due funzioni e si vede come l'ipotesi di processo di Poisson per i dati sperimentali sia in accordo con i valori teorici.



All'espressione (8) si può arrivare anche nel seguente modo. La densità di probabilità della somma di due variabili stocastiche X_1, X_2 si ottiene come convoluzione delle densità f_1, f_2 delle rispettive variabili:

$$\Pr \{t \leq X_1 + X_2 \leq t + dt\} = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(t - \tau) f_2(\tau) d\tau dt$$

e quindi la densità di due transizioni esponenziali di frequenza λ è

$$\int_0^t \lambda e^{-\lambda(t-\tau)} \lambda e^{-\lambda\tau} d\tau dt = \lambda^2 t e^{-\lambda t} dt$$

e in generale la densità di k transizioni in sequenza con la medesima frequenza λ è data da

$$f_k(t) := \lambda^k \frac{t^{k-1}}{(k-1)!} e^{-\lambda t} \quad (9)$$

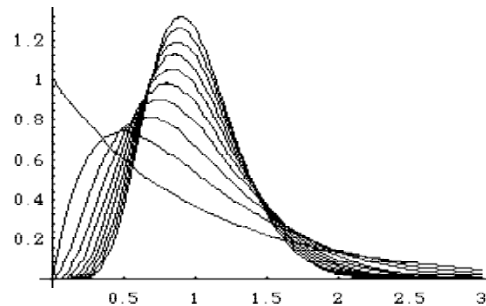
Il significato di (9) è che la probabilità che la k -ma transizione avvenga fra t e $t + dt$ è $f_k(t) dt$. Pertanto la probabilità di avere esattamente k transizioni da 0 a t si ottiene come convoluzione fra $f_k(\tau)$ e la probabilità di non avere transizioni fra τ e t , cioè

$$\int_0^t f_k(\tau) e^{-\lambda(t-\tau)} d\tau = \frac{\lambda^k e^{-\lambda t}}{(k-1)!} \int_0^t \tau^{k-1} d\tau = \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t}$$

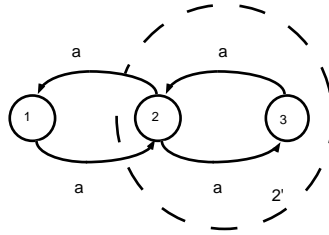
Il valor medio di $f_k(t)$ è ovviamente k/λ e $\sigma^2 = k/\lambda^2$. Se vogliamo che una variabile stocastica con densità $f_k(t)$ abbia valor medio $1/\lambda$ dobbiamo moltiplicare la frequenza per k e ottenere così la densità

$$E_k(t) := k^k \lambda^k \frac{t^{k-1}}{(k-1)!} e^{-k\lambda t} \quad (10)$$

Variabili stocastiche con densità $E_k(t)$ prendono il nome di processi di Erlang e hanno varianza decrescente al crescere di k . Infatti $\sigma^2 = 1/(k\lambda^2)$. Si vedano in figura le funzioni E_k per $k = 1, \dots, 10$.



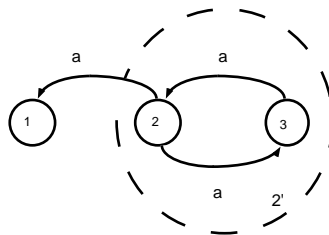
Esercizio 1: Sia dato il seguente processo Markoviano a tempo continuo, dove a rappresenta il tasso di transizione.



Si supponga che all'osservazione gli stati 2 e 3 siano indistinti, cioè quando il sistema si trova nello stato 2 o nello stato 3, un osservatore vede il sistema in un unico stato che indichiamo con $2'$. Un osservatore vede quindi soltanto le due transizioni $1 \rightarrow 2'$ e $2' \rightarrow 1$. Il processo visto dall'osservatore è ancora un processo Markoviano? Siano X_1 e X_2 due variabili aleatorie definite come il tempo di permanenza nello stato 1 e nello stato $2'$ rispettivamente. Si calcolino le distribuzioni di probabilità di X_1 e X_2 . Si calcolino inoltre le probabilità di trovare (in un istante generico) il sistema nello stato 1 o nello stato $2'$.

Soluzione

X_1 è ovviamente esponenziale con $F_1(t) = 1 - e^{-at}$. Per il calcolo di $F_2(t)$ si consideri il seguente processo Markoviano dove 1 è uno stato assorbente.



Allora si ha che $F_2(t) = p_{21}(t)$ dove $p_{ij}(t)$ è la componente generica della matrice di transizione $P(t)$ di questo processo il cui generatore infinitesimale è

$$Q = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ a & -2a & a \\ 0 & a & -a \end{pmatrix}$$

Gli autovalori di Q sono

$$0, \quad \frac{-3 + \sqrt{5}}{2} a =: \alpha, \quad \frac{-3 - \sqrt{5}}{2} a =: \beta$$

quindi ogni $p_{ij}(t)$ è combinazione lineare di $1 (= e^{0t})$, $e^{\alpha t}$ e $e^{\beta t}$. Siccome $p_{21}(0) = 0$ e $p_{21}(\infty) = 1$ si ha

$$p_{21}(t) = 1 - A e^{\alpha t} - (1 - A) e^{\beta t}.$$

Per determinare A bisogna usare l'equazione differenziale $\dot{P}(t) = Q P(t)$ oppure $\dot{P}(t) = P(t) Q$. In questo caso è più semplice usare la prima espressione riferita alla prima colonna di $P(t)$. Ovviamente $p_{11}(t) = 1$, mentre $p_{31} = 1 - B e^{\alpha t} - (1 - B) e^{\beta t}$, dato che $p_{31}(0) = 0$ e $p_{31}(\infty) = 1$, con B costante da determinare. Quindi

$$\dot{p}_{31}(t) = a p_{21}(t) - a p_{31}(t)$$

e, sostituendo,

$$-\alpha B e^{\alpha t} - \beta(1-B) e^{\beta t} = a(1-A e^{\alpha t} - (1-A) e^{\beta t}) - a(1-B e^{\alpha t} - (1-B) e^{\beta t})$$

cioè

$$(\alpha B - aA + aB) e^{\alpha t} + (\beta(1-B) - a(1-A) + a(1-B)) e^{\beta t} = 0 \quad \forall t$$

da cui si ricava il sistema

$$\begin{aligned} -aA + (a+\alpha)B &= 0 \\ aA - (a+\beta)B &= -\beta \end{aligned}$$

le cui soluzioni sono

$$A = \frac{\beta(a+\alpha)}{a(\beta-\alpha)} = \frac{5+\sqrt{5}}{10}, \quad B = \frac{\beta}{\beta-\alpha} = \frac{5+3\sqrt{5}}{10}$$

da cui

$$p_{21}(t) = F_2(t) = 1 + \frac{\beta(a+\alpha)}{a(\alpha-\beta)} e^{\alpha t} + \frac{\alpha(a+\beta)}{a(\beta-\alpha)} e^{\beta t} = 1 - \frac{5+\sqrt{5}}{10} e^{\alpha t} - \frac{5-\sqrt{5}}{10} e^{\beta t}$$

La transizione da 2' a 1 non è Markoviana. Infatti

$$\begin{aligned} \text{Prob}[X_2 \geq t+s | X_2 \geq t] &= \frac{\text{Prob}[X_2 \geq t+s, X_2 \geq t]}{\text{Prob}[X_2 \geq t]} = \frac{\text{Prob}[X_2 \geq t+s]}{\text{Prob}[X_2 \geq t]} = \\ &= \frac{A e^{\alpha(t+s)} + (1-A) e^{\beta(t+s)}}{A e^{\alpha t} + (1-A) e^{\beta t}} = e^{\alpha s} \frac{A + (1-A) e^{(\beta-\alpha)t} e^{(\beta-\alpha)s}}{A + (1-A) e^{(\beta-\alpha)t}} =: g(t, s) \end{aligned}$$

Il grafico di $g(t, 1)$ è riportato in figura 8. Come si vede $g(t, s)$ dipende anche da t e quindi la transizione non è Markoviana. Nel momento in cui il sistema si porta in 2' la probabilità di una transizione verso 1 è più elevata (nel grafico è riportata la probabilità di non avere la transizione), però all'aumentare di t la transizione tende ad essere Markoviana. Si noti appunto che $\lim_{t \rightarrow \infty} g(t, s) = e^{\alpha s}$ e quindi, per t grande, lo stato 2' si comporta come uno stato Markoviano con tasso d'uscita $-\alpha < a$.

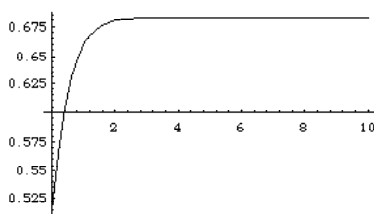


Figura 8

La probabilità di avere il sistema negli stati 1, 2 o 3 è $1/3$ per ogni stato come si calcola facilmente da $qQ = 0$ e quindi le probabilità di essere in 1 o 2' sono $1/3$ e $2/3$. Si possono calcolare questi valori per altra via, come verifica dei precedenti calcoli. Infatti si può trovare che il valor medio di X_2 è $2/a$, mentre X_1 ha valor medio $1/a$, e, dato che X_1 e X_2 si alternano costantemente, si ricavano gli stessi valori. ■

Esercizio 2: Si è visto che il soggiorno in uno stato è una variabile stocastica di tipo esponenziale. Lo è anche il soggiorno fuori dallo stato?

Soluzione: In generale la risposta è ovviamente negativa. Si veda l'esercizio precedente oppure si considerino n stati con transizioni circolari ($i \rightarrow i+1 \pmod n$) di medesima frequenza λ . Il soggiorno fuori da uno stato

particolare, ad esempio lo stato 1, è dato da una successione di $n - 1$ transizioni di tipo esponenziale e quindi è un processo di Erlang di ordine $n - 1$.

In alcuni casi però si ottiene un processo Markoviano. Si supponga che le transizioni verso lo stato 1 abbiano tutte la medesima frequenza λ e avvengano da tutti gli stati. Allora il soggiorno fuori dallo stato 1 è Markoviano con parametro λ . In altre parole l'insieme degli stati $(2, \dots, n)$, può essere visto come un macrostato $2'$ e il processo sugli stati $(1, 2')$ è Markoviano (diversamente dall'esercizio precedente).

Per dimostrare questa proprietà si proceda come nell'esercizio precedente costruendo un processo in cui togliamo le transizioni fuori dallo stato 1. Il generatore infinitesimo \hat{Q} di questo secondo processo è allora dato da

$$\hat{Q}(ij) = \begin{cases} Q(ij) & \text{se } i \neq 1 \\ 0 & \text{se } i = 1 \end{cases}$$

e inoltre $Q(i1) = \hat{Q}(i1) = \lambda$, $i \neq 1$. Vogliamo calcolare le potenze della matrice Q , limitatamente alle componenti $(i1)$ perché siamo interessati al calcolo di $\hat{P}(i1)(t)$ cioè alla distribuzione della probabilità di ritornare nello stato 1 dato che il sistema si trova in i . Preliminarmente dimostriamo per induzione che $\hat{Q}^k(i, 1) = -(-\lambda)^k$, $k \geq 1$, $i \neq 1$ (ovviamente $\hat{Q}^k(1, j) = 0$, $\forall j, k$).

$$\begin{aligned} \hat{Q}^{k+1}(i, 1) &= \sum_j \hat{Q}(i, j) \hat{Q}^k(j, 1) = \sum_{j>1} Q(i, j) \hat{Q}^k(j, 1) = \\ &= -(-\lambda)^k \sum_{j>1} Q(i, j) = -(-\lambda)^k (-Q(i, 1)) = -(-\lambda)^{k+1} \end{aligned}$$

Allora

$$\hat{P}(t)(i, 1) = \sum_{k \geq 1} \frac{\hat{Q}^k(i, 1) t^k}{k!} = 1 - \sum_{k \geq 0} \frac{(-\lambda)^k t^k}{k!} = 1 - e^{-\lambda t}$$

■

Dato un processo di poisson S_1 con parametro λ , si supponga di generare un processo S_2 semplicemente accettando gli eventi di S_1 con probabilità p . Dimostriamo che il processo S_2 è di Poisson con parametro $p\lambda$. Sia F_2 la distribuzione degli intertempi X di S_2 , cioè

$$1 - F_2(t) = \Pr \{X \geq t\}$$

La variabile stocastica X può essere maggiore di t perché: non vi sono stati eventi di S_1 entro t ; oppure vi è stato esattamente un evento entro t e questo è stato rigettato con probabilità $(1 - p)$; oppure vi sono stati esattamente due eventi entro t e sono stati entrambi rigettati con probabilità $(1 - p)^2$; ecc. Quindi

$$1 - F_2(t) = \sum_{k \geq 0} \frac{\lambda^k t^k}{k!} e^{-\lambda t} (1 - p)^k = e^{\lambda t(1-p)} e^{-\lambda t} = e^{-p\lambda t}$$

Si noti che se la sorgente S_2 è definita in altro modo non si ottiene una sorgente di Poisson. Ad esempio accettando un evento regolarmente ogni $k > 1$ eventi S_2 è una sorgente erlangiana. Questo fatto si può utilmente sfruttare per generare eventi non markoviani.

Un altro modo di generare sorgenti di Poisson consiste nel fondere assieme più sorgenti di Poisson. Si consideri dapprima il caso di due variabili stocastiche indipendenti X_1 e X_2 con distribuzione $F_i(t) = \Pr \{X_i \leq t\}$, e si voglia determinare la distribuzione della variabile $Y := \min \{X_1, X_2\}$. Allora

$$1 - F_Y(t) = \Pr \{Y > t\} = \Pr \{X_1 > t, X_2 > t\} = (1 - F_1(t))(1 - F_2(t))$$

Se X_1 e X_2 sono esponenziali con parametri λ_i si ottiene $F_Y(t) = 1 - e^{-(\lambda_1 + \lambda_2)t}$ cioè ancora una variabile markoviana con frequenza uguale alla somma delle frequenze. Nel caso di due sorgenti di Poisson i cui eventi vengano fusi assieme in un'unica successione di eventi, i tempi fra due eventi successivi, grazie alla proprietà markoviana di processo senza memoria, sono dati da $\min\{X_1, X_2\}$ e quindi si può applicare il risultato precedente. In generale n sorgenti esponenziali con frequenze λ_i fuse assieme sono equivalenti ad un'unica sorgente esponenziale di frequenza $\sum_i \lambda_i$.

Data una catena di Markov con matrice di transizione R si può generare un processo di Markov, detto *processo subordinato*, supponendo di generare le transizioni in dipendenza da un processo di Poisson con frequenza η , cioè

$$P(t)(i, j) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{e^{-\eta t} (\eta t)^k R^k(i, j)}{k!} \quad (11)$$

ovvero, in scrittura matriciale,

$$P(t) = e^{-\eta t I} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\eta t)^k R^k}{k!} = e^{-\eta t I} e^{\eta t R} = e^{\eta t (-I + R)}$$

(si noti che $e^{A+B} = e^A e^B$ se e solo se $AB = BA$, cioè A e B commutano, e infatti la matrice identica commuta con ogni matrice) da cui

$$Q = \eta(-I + R) \quad (12)$$

ovvero

$$Q(i, j) = \eta R(i, j) \quad i \neq j; \quad \lambda(i) = -Q(i, i) = \eta(1 - R(i, i)) \quad (13)$$

Si noti che la frequenza di transizioni dallo stato generico i è in generale minore di η perché le autotransizioni della catena diventano invisibili nel processo.

Da (12) si vede che si ottiene lo stesso processo con generatore infinitesimo Q per diversi valori di η e R purché $Q = \eta(-I + R)$, ponendo cioè

$$R = I + \frac{Q}{\eta} \quad (14)$$

Affinché R sia la matrice di transizione di una catena di Markov si richiede $\eta \geq \max_i -Q(i, i)$. Si noti che, a parte questo vincolo, il valore di η è arbitrario. Infatti anche se si aumenta la frequenza η del processo che innesca le transizioni, aumenta anche la probabilità $R(i, i) = 1 - \lambda(i)/\eta$ che la transizione avvenga verso il medesimo stato e quindi sia invisibile per il processo.

Viceversa dato un processo di Markov si può generare una catena di Markov campionando il processo agli istanti di transizione. Si ha così la cosiddetta *catena di Markov immersa*. Le probabilità di transizione verso gli altri stati sono proporzionali alle frequenze di transizione. Tuttavia non vi sono transizioni sullo stesso stato dato che queste non sono osservabili in un processo di Markov. Allora per una catena immersa la matrice di transizione è data da

$$R(i, j) = \frac{Q(i, j)}{\sum_{h \neq i} Q(i, h)} = -\frac{Q(i, j)}{Q(i, i)} \quad i \neq j \quad (15)$$

Pertanto, data una catena con matrice di transizione R , la catena immersa del processo subordinato ha matrice di transizione R' data da

$$R'(i, j) = \frac{R(i, j)}{1 - R(i, i)} \quad i \neq j, \quad R'(i, i) = 0$$

Una condizione sufficiente per la regolarità di un processo di Markov è che $\sup_i \lambda(i) \leq c < \infty$ e quindi se gli stati sono finiti ogni processo di Markov è regolare. Un'alternativa condizione sufficiente di regolarità fa uso della catena immersa: se tutti gli stati della catena immersa sono ricorrenti allora il processo è regolare. Gli stati di un processo di Markov vengono in parte classificati tramite la catena immersa.

- uno stato è transiente se è transiente per la catena immersa;
- uno stato è ricorrente se è ricorrente per la catena immersa;
- uno stato è stabile se $\lambda(i) > 0$;
- uno stato è assorbente se $\lambda(i) = 0$;
- un processo è irriducibile se la catena immersa è irriducibile.

Teorema 13: *Sia il processo irriducibile e ricorrente. Allora esiste $P^* := \lim_{t \rightarrow \infty} P(t)$ con $P^*(i, j) = \bar{p}(j)$, $\forall i$, dove \bar{p} viene detta probabilità limite. Inoltre, o vale $\bar{p} = 0$, nel qual caso tutti gli stati vengono detti nulli, oppure $\sum_i \bar{p}(i) = 1$ nel qual caso tutti gli stati vengono detti non-nulli. ■*

È importante notare che la distinzione fra stati nulli e non-nulli è indipendente dall'analoga distinzione fra gli stati della catena immersa. Tutti e quattro i casi sono infatti possibili. Come per le catene una distribuzione limite \bar{p} è invariante. Cioè $\bar{p} = \bar{p}P(t)$. Inoltre vale

Teorema 14: *Sia il processo ricorrente non-nullo con generatore infinitesimo Q . Allora la distribuzione limite \bar{p} è l'unica distribuzione su S che soddisfa $\bar{p}Q = 0$. ■*

La relazione $\bar{p}Q = 0$ può essere interpretata come un bilanciamento di flusso. Infatti è equivalente a

$$\bar{p}(i) \lambda(i) = \sum_{j \neq i} \bar{p}(j) Q(j, i) \quad (16)$$

dove si eguaglia il flusso di transizioni fuori dallo stato i con quello verso i . In generale il bilanciamento si può effettuare con un qualsiasi insieme di tagli indipendenti nel grafo associato alle transizioni. Sia $T \subset S$ un sottoinsieme di stati. Si deduce da (16) che

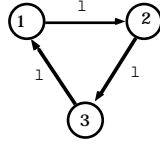
$$\sum_{i \in T} \sum_{j \notin T} \bar{p}(i) Q(i, j) = \sum_{i \in T} \sum_{j \notin T} \bar{p}(j) Q(j, i)$$

Si noti che la distribuzione invariante per il processo è anche invariante per la catena immersa solo se $\lambda(i)$ è costante per ogni stato. La relazione che lega la distribuzione invariante \bar{p} per il processo con quella \bar{q} per la catena immersa è la seguente. Sia $\Lambda = \text{diag}(\lambda(1), \lambda(2), \dots)$ e sia R come definita in (15). Quindi $Q = \Lambda(-I + R)$ e $\bar{p}Q = 0$ implica $\bar{p}\Lambda = \bar{p}\Lambda R$ cioè $\bar{p}\Lambda = k\bar{q}$ con k fattore di normalizzazione.

Dato il generatore infinitesimo Q , non è normalmente semplice ottenere l'espressione esplicita di $P(t)$. Questo è possibile solo per processi con pochi stati sfruttando la conoscenza degli autovalori e degli autovettori sinistri di Q , se esistono n autovettori (questo è garantito se ad esempio gli autovalori sono distinti). In questo caso si ha $Q = X^{-1}DX$, dove X è la matrice formata con gli autovettori sinistri (uno per riga) e D è la matrice diagonale formata con gli autovalori, e quindi si ha:

$$e^{Qt} = X^{-1}e^{Dt}X = X^{-1} \begin{pmatrix} e^{d_1 t} & & \\ & \ddots & \\ & & e^{d_n t} \end{pmatrix} X$$

Esempio 9: Sia



$$Q = \begin{pmatrix} -\lambda & \lambda & 0 \\ 0 & -\lambda & \lambda \\ \lambda & 0 & -\lambda \end{pmatrix}$$

Gli autovalori di Q sono

$$\alpha_0 = 0, \quad \alpha_{-1} = \left(-\frac{3}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)\lambda, \quad \alpha_1 = \left(-\frac{3}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)\lambda$$

e i corrispondenti autovettori sinistri

$$x_0 = (1, 1, 1), \quad x_{-1} = (-2, 1 - i\sqrt{3}, 1 + i\sqrt{3}), \quad x_1 = (-2, 1 + i\sqrt{3}, 1 - i\sqrt{3})$$

quindi ogni soluzione di $\dot{q}(t) = q(t)Q$ si esprime come

$$q(t) = \sum_{k=-1}^1 a_k x_k e^{\alpha_k t}$$

con coefficienti a_k da determinare in base alle condizioni iniziali. Poniamo $q_1(0) = 1, q_2(0) = 0, q_3(0) = 0$ (si noti che con questa scelta gli a_k corrispondono esattamente alla prima riga di X^{-1}). Quindi

$$(1 \ 0 \ 0) = (a_{-1} \ a_0 \ a_1) \begin{pmatrix} -2 & 1 - i\sqrt{3} & 1 + i\sqrt{3} \\ 1 & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ -2 & 1 + i\sqrt{3} & 1 - i\sqrt{3} \end{pmatrix}$$

che dà come soluzione

$$a_{-1} = -\frac{1}{6}, \quad a_0 = \frac{1}{3}, \quad a_1 = -\frac{1}{6}$$

e allora

$$q(t) = \frac{1}{3} \mathbf{1} - \frac{1}{6} (q_{-1} e^{\alpha_{-1}t} + q_1 e^{\alpha_1 t})$$

cioè

$$q(t) = \frac{1}{3} \mathbf{1} - \frac{1}{3} \operatorname{Re}(q_1 e^{\alpha_1 t})$$

$$q_1(t) = \frac{1}{3} + \frac{2}{3} e^{-\frac{3}{2}\lambda t} \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\lambda t\right)$$

$$q_2(t) = \frac{1}{3} - \frac{1}{3} e^{-\frac{3}{2}\lambda t} \left(\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\lambda t\right) - \sqrt{3} \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\lambda t\right)\right)$$

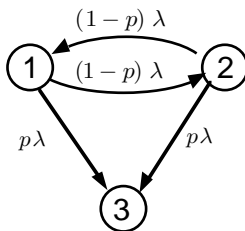
$$q_3(t) = \frac{1}{3} - \frac{1}{3} e^{-\frac{3}{2}\lambda t} \left(\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\lambda t\right) + \sqrt{3} \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\lambda t\right)\right)$$

Infine in base alla simmetria del processo:

$$P(t) = \begin{pmatrix} q_1(t) & q_2(t) & q_3(t) \\ q_3(t) & q_1(t) & q_2(t) \\ q_2(t) & q_3(t) & q_1(t) \end{pmatrix} \tag{17}$$

■

Esempio 10: Come secondo esempio vogliamo dimostrare in modo alternativo che una sorgente di Poisson con accettazione degli eventi con probabilità p è una sorgente di Poisson con parametro $p\lambda$. Il problema si può modellare con il seguente processo.



La distribuzione della nuova sorgente è data da $P_{13}(t)$ Il generatore infinitesimo è

$$Q = \begin{pmatrix} -\lambda & (1-p)\lambda & p\lambda \\ (1-p)\lambda & -\lambda & p\lambda \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} -1 & 1-p & p \\ 1-p & -1 & p \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

con autovalori dati da

$$0 \quad \lambda(-2+p) \quad -\lambda p$$

ed autovettori rispettivamente (righe della matrice)

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ -(\frac{1}{2}) & -(\frac{1}{2}) & 1 \end{pmatrix}$$

Il calcolo di $P_{13}(t)$ si effettua risolvendo l'equazione differenziale $\dot{q} = qQ$ con condizioni iniziale $q^0 = (1, 0, 0)$. Si trova

$$q(t) = (\frac{1}{2}(e^{-p\lambda t} + e^{-(2-p)\lambda t}), \frac{1}{2}(e^{-p\lambda t} - e^{-(2-p)\lambda t}), 1 - e^{-p\lambda t})$$

da cui $q_3(t) = P_{13}(t) = 1 - e^{-p\lambda t}$. ■

Non potendo ottenere una formula esplicita per $P(t)$ si potrebbe pensare di calcolare, per ogni valore di t , un opportuno troncamento della serie:

$$P(t) = \sum_{k \geq 0} \frac{Q^k t^k}{k!} \tag{18}$$

Tuttavia la presenza in Q di elementi negativi rende tale calcolo numericamente poco stabile. Inoltre Q^k può divergere. Un metodo più efficace di calcolo fa uso delle formule (11) e (18) per le quali

$$P(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{e^{-\eta t} (\eta t)^k (I + Q/\eta)^k}{k!} \tag{19}$$

Fissato $\eta \geq \max_i -Q(i, i)$ si tratta di calcolare (19) per diversi valori di t . Si noti che non ci sono sottrazioni e quindi questo metodo è stabile numericamente. Inoltre $(I + Q/\eta)^k$ non diverge e quindi la convergenza della serie (19) è più rapida della serie (18). La serie (19) converge tanto più rapidamente quanto più piccolo è η . Quindi il valore più conveniente è $\eta = \max_i -Q(i, i)$.

Esempio 11: Si riconsideri l'esempio precedente ponendo $\lambda = 1$. Quindi $\eta = \lambda = 1$ e

$$R = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Si suponga di eseguire il calcolo per $0 \leq t \leq 10/\lambda = 10$. Si discretizzi il tempo in intervalli di lunghezza $0.1/\lambda = 0.1$. Quindi, per $t := 0.1 h/\lambda = 0.1 h$, si tratta di calcolare

$$P(t) = P(0.1 h) = e^{-0.1 h} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(0.1 h)^k R^k}{k!} \quad h = 0, 1, \dots, 100$$

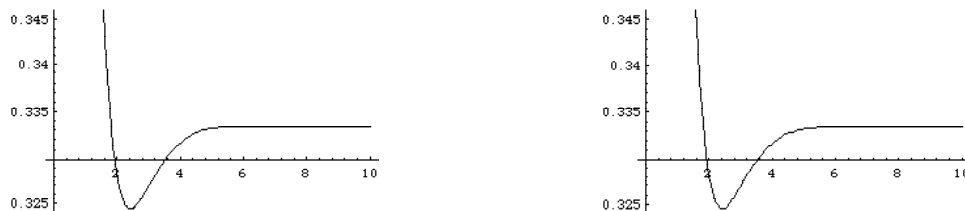
In questo caso si ha $10^k/k! < 10^{-5}$ per $k \geq 35$, quindi è sufficiente troncare la serie ai primi 35 termini. Indicando $S_k(h) = (0.1 h)^k R^k/k!$, si ha $S_{k+1}(h) = (0.1 h) R S_k(h)/(k+1)$ e quindi il calcolo viene eseguito come

```

for h := 0 to 100 do
begin
  S := I;
  P(h) := S;
  for k := 1 to 35 do
  begin
    S := (0.1 h) R S/k;
    P(h) := P(h) + S;
  end;
  P(h) := e-0.1 h P(h)
end

```

Nella figura a sinistra si vede l'andamento di $P(t)(1, 1)$ dato da (17) e in quella a destra quello calcolato come indicato sopra. Come si può notare i due grafici coincidono quasi esattamente (non è mostrata la curva per piccoli valori di t in modo da far notare meglio l'andamento periodico smorzato).



Esempio 12: Come esempio della maggiore difficoltà di calcolare $P(t)$ da (18) anziché (19) si consideri

$$Q = \begin{pmatrix} -1.61301 & 0.8312 & 0.781807 \\ 0.124634 & -0.724886 & 0.600252 \\ 0.758355 & 0.969089 & -1.72744 \end{pmatrix}$$

per $t = 12$ si ottiene da (18), troncando la serie al 1000-mo termine

$$P(12) = \begin{pmatrix} 0.170685 & 0.558204 & 0.271222 \\ 0.170633 & 0.558191 & 0.271164 \\ 0.170695 & 0.558254 & 0.271307 \end{pmatrix}$$

mentre (19) troncata al 100-mo termine fornisce il valore corretto

$$P(12) = \begin{pmatrix} 0.170627 & 0.558191 & 0.271182 \\ 0.170627 & 0.558191 & 0.271182 \\ 0.170627 & 0.558191 & 0.271182 \end{pmatrix}$$

e per $t = 15$ e $t = 18$ si ottiene da (18) (nel secondo caso vi sono valori negativi!)

$$P(15) = \begin{pmatrix} 0.210468 & 0.59563 & 0.348899 \\ 0.172748 & 0.565519 & 0.29216 \\ 0.13717 & 0.50498 & 0.282657 \end{pmatrix} \quad P(18) = \begin{pmatrix} -66.4928 & -142.861 & -113.585 \\ -116.74 & -83.259 & -64.186 \\ 209.722 & 75.8404 & -106.997 \end{pmatrix}$$

3. PROCESSI MARKOVIANI DI DECISIONE

In un processo markoviano di decisione si considera un insieme finito di stati S ed un insieme finito $\{0, 1, 2, \dots, T\}$ di istanti di tempo (*orizzonte finito*) oppure infinito numerabile $\{0, 1, 2, \dots\}$ (*orizzonte infinito*). Ad ogni stato $i \in S$ e ad ogni istante di tempo t è associato un insieme $D_t(i)$ di decisioni. Ogni decisione $d \in D_t(i)$ definisce una probabilità di transizione $P_t(i, j, d)$, per ogni stato j , e un guadagno $r_t(i, d)$. Spesso tale valore di guadagno è definito indirettamente da un insieme di guadagni $r_t(i, j, d)$ dipendenti anche dallo stato di arrivo della transizione. In tal caso $r_t(i, d) := \sum_{j \in S} r_t(i, j, d) P_t(i, j, d)$.

Una politica markoviana π è una scelta di una definita decisione $\bar{d}_\pi(i, t) \in D_t(i)$ per ogni i e ogni t . Una politica markoviana definisce una catena (non stazionaria) di Markov con transizioni $P_t(i, j, \bar{d}_\pi(i, t))$ (sia $P_{t,\pi}$ la matrice di transizione al tempo t dovuta alla politica π) e sia $X_t(\pi)$ la variabile aleatoria corrispondente. Sia $r_{t,\pi}$ il vettore $\{r_t(i, \bar{d}_\pi(i, t)) : i \in S\}$. Sia

$$v_\pi(i, t) := E \left[\sum_{\tau \geq t} r_\tau(X_\tau(\pi), \bar{d}_\pi(X_\tau(\pi), \tau)) \mid X_t = i \right]$$

Il valore di una politica markoviana π è dato dall'espressione

$$v_\pi(i, 0) := E \left[\sum_{t \geq 0} r_t(X_t(\pi), \bar{d}_\pi(X_t(\pi), t)) \mid X_0 = i \right] \quad (20)$$

valutata per ogni valore dello stato iniziale X_0 . Se l'orizzonte è infinito l'espressione (20) può divergere e in questi casi il valore di una politica richiede una diversa definizione, come si vedrà più avanti. Per ora si assuma la limitatezza di (20).

Si indichi con $v_\pi(t)$ il vettore $\{v_\pi(i, t) : i \in S\}$. In base alle proprietà markoviane del processo si ha

$$\begin{aligned} v_\pi(0) &= r_{0,\pi} + P_{0,\pi} r_{1,\pi} + P_{0,\pi} P_{1,\pi} r_{2,\pi} + P_{0,\pi} P_{1,\pi} P_{2,\pi} r_{3,\pi} + \dots = \\ &= r_{0,\pi} + P_{0,\pi} (r_{1,\pi} + P_{1,\pi} r_{2,\pi} + P_{1,\pi} P_{2,\pi} r_{3,\pi} + \dots) = r_{0,\pi} + P_{0,\pi} v_\pi(1) \end{aligned}$$

e in generale

$$v_\pi(t) = r_{t,\pi} + P_{t,\pi} v_\pi(t+1) \quad (21)$$

Scopo di un processo markoviano di decisione è la determinazione di una politica markoviana π^* che massimizza $v_\pi(i, 0)$. Si vedrà più avanti che la politica ottima è invariante rispetto allo stato iniziale X_0 e al tempo t , ovvero il valore v^* della politica ottima π^* è tale che

$$v^*(i, t) \geq v_\pi(i, t), \quad \forall i \in S, \quad \forall t \geq 0, \quad \forall \pi$$

e quindi ha senso scrivere, intendendo il 'sup' effettuato componente per componente,

$$v^*(t) = \sup_{\pi} v_\pi(t)$$

Può avvenire in diverse applicazioni che l'insieme degli stati dipenda da t . Questo fatto non presenta maggiori complicazioni concettuali né computazionali. Si possono definire politiche più generali di quelle markoviane. In una politica markoviana le decisioni vengono fatte dipendere dallo stato corrente e dall'istante corrente, mentre si potrebbero definire decisioni che dipendono dall'intera storia passata del processo. Tuttavia nella maggior parte dei casi una politica ottima è di tipo markoviano per cui ci limiteremo a considerare politiche markoviane.

Un'altra generalizzazione del tipo di politica consiste nel permettere una scelta stocastica della decisione. In tal caso si distingue fra politiche pure e randomizzate. Anche se normalmente una politica ottima è di tipo puro vi sono casi interessanti in cui la politica ottima è randomizzata.

3.1 Orizzonte finito

Consideriamo dapprima il problema di valutare una politica assegnata. Come già detto, assegnata una politica π il sistema evolve come una catena di Markov non stazionaria. L'espressione (21) è la base per determinare il valore di una politica. Se assumiamo, senza perdita di generalità, che in T non sia disponibile alcuna decisione (se così non fosse basta aumentare di una unità l'orizzonte) e che quindi $v_\pi(i, T) = 0 \forall(i, \pi)$, l'espressione (21) permette il calcolo ricorsivo all'indietro di tutti i valori $v_\pi(i, t)$. Il valore della politica π è quindi definito dai valori $v_\pi(i, 0)$ (in dipendenza dai valori dello stato iniziale).

Esempio 13: Si consideri un albergo che necessiti periodicamente di una manutenzione straordinaria. Si discretizzi il livello di qualità dell'albergo in 5 stati, numerati da 1 a 5 dove 1 è lo stato migliore e 5 il peggiore. Il tempo sia discretizzato in intervalli di un anno. Se in un anno non si esegue manutenzione non si hanno spese, però la qualità dell'albergo può peggiorare di uno stato con probabilità 0.2, oppure rimanere inalterata con probabilità 0.8. Si è stimato che i profitti annuali dipendono dalla qualità dell'albergo nel seguente modo: stato 1 \rightarrow profitto 10, stato 2 \rightarrow profitto 8, stato 3 \rightarrow profitto 5, stato 4 \rightarrow profitto 2, stato 5 \rightarrow profitto 1. Se invece si esegue la manutenzione si incorre in un costo che dipende dallo stato corrente, ma che porta in ogni caso l'albergo nello stato 1. Si è stimato che il costo della manutenzione (comprensivo dei mancati profitti dovuti ai lavori) dipenda nel seguente modo dallo stato corrente: stato 2 \rightarrow costo 2, stato 3 \rightarrow costo 4, stato 4 \rightarrow costo 6, stato 5 \rightarrow costo 9. L'orizzonte temporale sia di 10 anni.

Gli stati sono quindi i 5 livelli di qualità dell'albergo e in ogni stato e in ogni istante vi sono due decisioni possibili: eseguire la manutenzione oppure non fare niente. Le probabilità di transizione sono rispettivamente

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0.8 & 0.2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.8 & 0.2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.8 & 0.2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.8 & 0.2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

e i guadagni sono

$$\{0, -2, -3, -5, -9\} \quad \{10, 8, 5, 2, 1\}$$

Si definisca una politica π che prevede di eseguire la manutenzione solo quando la qualità dell'albergo sia scesa allo stato 4 o 5. Questa politica induce una catena di Markov con matrice di transizione

$$P_\pi = \begin{pmatrix} 0.8 & 0.2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.8 & 0.2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.8 & 0.2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

e con guadagni

$$r_\pi = \{10, 8, 5, -5, -9\}$$

Ponendo $t = T = 10$ il valore della politica $v_\pi(i, T) = v_\pi(i, 10) = 0$ per definizione. Allora

$$v_\pi(T - 1) = v_\pi(9) = r_\pi = \{10, 8, 5, -5, -9\}$$

e

$$v_\pi(8) = r_\pi + P_\pi v_\pi(9) = \{19.6, 15.4, 8., 5., 1.\}$$

Continuando ricorsivamente si ottiene

$$v_\pi(7) = \{28.7, 21.9, 12.4, 14.6, 10.6\}$$

$$v_\pi(6) = \{37.3, 28.0, 17.8, 23.7, 19.7\}$$

$$v_\pi(5) = \{45.5, 33.9, 24.0, 32.3, 28.3\}$$

$$v_\pi(4) = \{53.2, 39.9, 30.6, 40.5, 36.5\}$$

$$v_\pi(3) = \{60.5, 46.1, 37.6, 48.2, 44.2\}$$

$$v_\pi(2) = \{67.6, 52.4, 44.7, 55.5, 51.5\}$$

$$v_\pi(1) = \{74.6, 58.9, 51.9, 62.6, 58.6\}$$

$$v_\pi(0) = \{81.4, 65.5, 59.0, 69.6, 65.6\}$$

Quindi questa politica garantisce un profitto atteso in 10 anni di 81.4 se si inizia dallo stato 1 (ad esempio con un albergo nuovo). Si noti che la politica non prevede un particolare istante temporale in cui si debba eseguire la manutenzione. Questo è definito dalla particolare realizzazione del processo. Si vedano ad esempio 20 simulazioni del processo con la politica π . In ogni riga è elencata la successione degli stati e il guadagno ottenuto. Il valor medio dei guadagni simulati è 83.35. Si noti che per due volte il processo rimane costantemente nello stato 1 (del resto la probabilità di tale evento è $0.8^{10} = 0.107374$) e che solo 4 volte viene richiesta la manutenzione (lo stato 4 che compare come ultimo stato in una simulazione non induce nessuna decisione perché è lo stato finale).

1	1	1	1	1	1	1	1	2	2	2	2	94
1	1	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	84
1	1	1	1	1	2	2	2	2	2	3		90
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	100
1	2	2	3	4	1	2	2	2	2	2		68
1	1	1	2	2	3	3	3	4	1	1		66
1	1	1	1	1	1	1	1	2	3	3		93
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	100
1	1	1	1	1	1	1	1	1	2	3		98
1	1	1	2	2	2	2	2	2	2	2		86
1	1	1	2	3	3	3	3	4	1	2		63
1	1	1	1	1	1	1	1	1	2	2		98
1	1	1	1	2	2	2	2	3	3	3		82
1	1	2	3	3	3	3	3	3	3	3		63
1	1	1	1	1	1	2	2	2	2	2		92
1	1	2	2	2	2	3	3	3	3	3		72
1	1	1	1	1	2	2	3	3	3	4		81
1	1	1	1	1	2	2	2	3	3	3		84
1	2	2	2	2	3	3	4	1	2	2		65
1	1	1	1	2	2	2	2	2	2	2		88

■

Per il calcolo della politica ottima si sfrutta la programmazione dinamica nella formulazione all'indietro. Si definisca $v^*(i, t)$ il valore atteso ottimo dei rimanenti istanti di tempo da t in poi (incluso t). Allora, per definizione $v^*(i, T) = 0$ e, per gli altri istanti di tempo, il principio di ottimalità di Bellman fornisce l'equazione ricorsiva

$$v^*(i, t) = \max_{d \in D_t(i)} r_t(i, d) + \sum_{j \in S_{t+1}} P_t(i, j, d) v^*(j, t + 1) \quad (22)$$

con decisioni ottime date da

$$\hat{d}(i, t) := \operatorname{argmax}_{d \in D_t(i)} r_t(i, d) + \sum_{j \in S_{t+1}} P_t(i, j, d) v^*(j, t + 1)$$

Si noti anche che il principio di ottimalità fornisce anche il risultato che in (20) la medesima politica è ottima rispetto a qualsiasi stato iniziale.

Esempio 14: (continuazione dell'esempio precedente) Applicando la formula (22) si ottiene la seguente politica ottima (le righe sono gli stati e le colonne i tempi da 0 a 9; in 10 non ci sono decisioni). Si noti come non valga la pena fare manutenzione all'avvicinarsi della fine dell'orizzonte temporale. Tuttavia negli istanti iniziali conviene fare manutenzione non appena la qualità si abbassa dal valore più alto.

1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
2	2	2	2	1	1	1	1	1	1
2	2	2	2	2	2	2	2	2	1
2	2	2	2	2	2	2	2	2	2
2	2	2	2	2	2	2	2	2	1

I valori ottimi al tempo 0 per i vari stati sono

$$V(0) = \{85.9, 75.9, 74.9, 72.9, 68.9\}$$

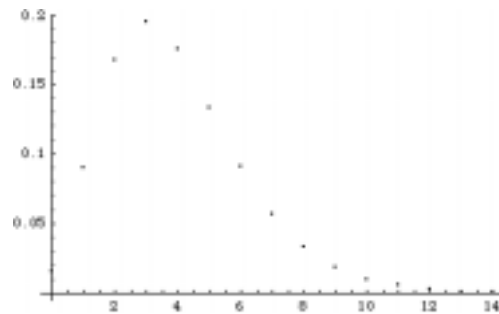
Qui di seguito sono riportate 20 simulazioni della politica ottima. Per 8 volte non è necessaria alcuna manutenzione, per 9 volte si esegue una manutenzione mentre per 3 volte è necessaria una seconda manutenzione. Il valore medio delle simulazioni è 85.9, sorprendentemente uguale al valore ottimo indicato. Tuttavia tale valore è in realtà arrotondato dal vero valore 85.9226.

1	1	1	1	1	2	2	2	2	2	2	90
1	1	1	1	2	2	3	1	1	1	1	83
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	100
1	1	1	2	1	1	1	1	1	1	1	88
1	2	1	1	1	1	1	1	2	2	2	84
1	1	1	1	2	3	1	1	1	2	2	83
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	100
1	2	1	1	2	2	2	2	2	2	2	76
1	2	1	1	2	2	2	2	2	2	3	76
1	1	2	1	1	1	1	1	1	1	1	88
1	1	1	1	1	1	2	2	2	2	2	92
1	2	1	1	2	3	1	1	1	2	3	71
1	1	1	1	1	1	1	1	1	2	2	98
1	1	1	1	1	1	1	2	2	3	3	91
1	1	1	2	1	1	1	1	1	1	1	88
1	2	1	1	1	1	1	2	2	2	2	82
1	2	1	1	2	2	2	3	1	1	1	69
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	100
1	2	1	1	1	2	2	3	1	1	2	71
1	1	1	1	1	1	1	2	3	3	3	88

■

Esempio 15: Si tratta di una tipica applicazione dei processi markoviani di decisione e cioè la gestione del magazzino di un centro di vendita. Il livello di magazzino viene discretizzato in questo esempio a 11 valori da 0 a 10. Il tempo viene discretizzato in settimane, in modo che le decisioni vanno prese all'inizio di ogni settimana. Il costo settimanale $c(m)$ di mantenere il magazzino al livello m è pari a m (cioè $c(m) = m$).

Il magazzino si svuota per effetto delle vendite. Per ogni settimana la domanda d'acquisto a è una variabile stocastica che viene discretizzata agli stessi valori del magazzino più alcuni valori aggiuntivi per tener conto di picchi eccezionali di domanda. Si ipotizza che la probabilità $p(i) = \Pr\{a = i\}$ abbia il seguente andamento e i seguenti valori



$$\{0.0153, 0.0903, 0.1681, 0.1955, 0.1755, 0.1339, 0.0913, 0.0573, \\ 0.0338, 0.0189, 0.0102, 0.0053, 0.0027, 0.0013, 0.0006\}$$

Il ricavo $f(v)$ da una vendita v è $8v$. Se la domanda supera la quantità disponibile in magazzino (cioè $a > m$), viene venduta tutta la merce in magazzino ($v = m$) ma i mancati guadagni futuri dovuti alla parziale domanda insoddisfatta ($t = a - m$) vengono modellati come una penalizzazione monetaria $s(t)$ pari a $2t$ se $t \geq 0$ e 0 altrimenti.

Il magazzino si riempie per effetto degli ordini d'acquisto. Accanto al costo intrinseco della merce vi è un costo fisso dovuto all'evasione dell'ordine. Il costo $o(d)$ di acquistare una quantità d è pari a $3 + 2d$ se $d > 0$, altrimenti è uguale a 0.

La decisione da prendere ogni settimana consiste nell'ordinare o meno una certa quantità d di merce in presenza di una giacenza m in magazzino della settimana precedente. Ovviamente non può essere ordinata merce tale da superare la capacità del magazzino ($d + m \leq 10$ in questo esempio). In questo caso il problema viene modellato pensando che l'ordine venga effettuato all'inizio della settimana e che la merce ordinata sia immediatamente disponibile. Pertanto il costo di magazzino viene imputato sulla quantità $d + m$. Tutta questa merce è disponibile per la vendita. Se viene venduta la quantità v , la giacenza disponibile per la settimana successiva è $d + m - v$.

La modellizzazione del problema come un processo markoviano di decisione consiste nel definire come stato la giacenza m . Le probabilità di transizione (a seconda della decisione d e stazionarie) sono allora definite da

$$P(i, j, d) := \begin{cases} 0 & \text{se } i + d < j \\ p(i + d - j) & \text{se } i + d \geq j \text{ e } j > 0 \\ \sum_{k \geq d} p(i + k) & \text{se } j = 0 \end{cases}$$

Il guadagno dipende da alcuni fattori noti (costo di magazzino e di ordine) e dalle vendite, non note al

momento della decisione. Pertanto questa parte del guadagno va calcolata come valore atteso. Quindi

$$r(i, d) := -c(i + d) - o(d) + \sum_{a \leq i+d} p(a) f(a) + \sum_{a > i+d} p(a) (f(i + d) - s(a - i - d))$$

Applicando la formula (22) per un orizzonte temporale di 10 settimane, si ottiene la seguente politica ottima dove le righe corrispondono agli stati (livello 0 in prima riga, livello 1 nella seconda ecc.) e le colonne al tempo (prima colonna settimana iniziale, seconda colonna seconda settimana ecc.) con l'ultima colonna i valori attesi ottimi stato per stato.

8	8	8	8	8	8	8	8	7	5	129.929
7	7	7	7	7	7	7	7	6	4	131.929
6	6	6	6	6	6	6	6	5	3	133.929
5	5	5	5	5	5	5	5	4	0	135.929
4	4	4	4	4	4	4	4	3	0	137.929
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	141.517
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	144.445
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	146.843
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	148.929
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	150.775
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	152.384

Aumentando i costi di magazzino ($c(m) = 2m$) si ottiene la seguente politica

6	6	6	6	6	6	6	6	6	4	70.715
5	5	5	5	5	5	5	5	5	3	72.715
4	4	4	4	4	4	4	4	4	2	74.715
3	3	3	3	3	3	3	3	3	0	76.715
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	80.524
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	83.545
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	85.715
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	87.290
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	88.366
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	88.957
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	89.056

mentre ripristinando i costi di magazzino ai valori iniziali ($c(m) = m$) e aumentando il fattore di penalità per la domanda insoddisfatta da 2 a 10 si ottiene

9	9	9	9	9	9	9	9	8	6	117.118
8	8	8	8	8	8	8	8	7	5	119.118
7	7	7	7	7	7	7	7	6	4	121.118
6	6	6	6	6	6	6	6	5	3	123.118
5	5	5	5	5	5	5	5	4	2	125.118
4	4	4	4	4	4	4	4	3	0	127.118
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	130.317
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	133.526
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	136.010
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	138.118
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	139.976

Si noti che in ogni caso, a parte le ultime settimane dove si fa sentire l'effetto dovuto alla terminazione del processo, la struttura della politica ottima è molto semplice e si può definire semplicemente con due parametri corrispondenti a due livelli di magazzino s_1 e $s_2 \geq s_1$: se il magazzino scende sotto s_1 lo si porta

al livello s_2 . Nella prima delle tre politiche ottime si ha $s_1 = 5$ e $s_2 = 8$, nella seconda $s_1 = 4$ e $s_2 = 6$ e nella terza $s_1 = 6$ e $s_2 = 9$.

Simulando il comportamento della prima delle tre politiche ottime partendo dal magazzino vuoto si ottengono le seguenti 20 realizzazioni (una per riga), dove ogni tripla rappresenta lo stato, la decisione e la domanda nella settimana corrispondente alla colonna. All'istante finale si riporta solo lo stato finale. L'ultima colonna fornisce il guadagno della particolare realizzazione. Il valore medio delle 20 realizzazioni è 129.45.

{0, 8, 7}	{1, 7, 2}	{6, 0, 2}	{4, 4, 11}	{0, 8, 3}	{5, 0, 4}	{1, 7, 9}	{0, 8, 2}	{6, 0, 5}	{1, 4, 2}	3	153.
{0, 8, 2}	{6, 0, 8}	{0, 8, 5}	{3, 5, 10}	{0, 8, 4}	{4, 4, 3}	{5, 0, 1}	{4, 4, 6}	{2, 5, 5}	{2, 3, 3}	2	151.
{0, 8, 5}	{3, 5, 6}	{2, 6, 10}	{0, 8, 6}	{2, 6, 6}	{2, 6, 4}	{4, 4, 5}	{3, 5, 6}	{2, 5, 4}	{3, 0, 10}	0	199.
{0, 8, 5}	{3, 5, 4}	{4, 4, 6}	{2, 6, 6}	{2, 6, 4}	{4, 4, 5}	{3, 5, 1}	{7, 0, 7}	{0, 7, 9}	{0, 5, 3}	2	178.
{0, 8, 11}	{0, 8, 1}	{7, 0, 2}	{5, 0, 7}	{0, 8, 2}	{6, 0, 2}	{4, 4, 2}	{6, 0, 1}	{5, 0, 3}	{2, 3, 4}	1	87.
{0, 8, 4}	{4, 4, 2}	{6, 0, 6}	{0, 8, 4}	{4, 4, 5}	{3, 5, 4}	{4, 4, 9}	{0, 8, 5}	{3, 4, 2}	{5, 0, 8}	0	164.
{0, 8, 7}	{1, 7, 7}	{1, 7, 2}	{6, 0, 4}	{2, 6, 8}	{0, 8, 6}	{2, 6, 0}	{8, 0, 5}	{3, 4, 5}	{2, 3, 4}	1	188.
{0, 8, 5}	{3, 5, 4}	{4, 4, 3}	{5, 0, 8}	{0, 8, 2}	{6, 0, 3}	{3, 5, 4}	{4, 4, 3}	{5, 0, 4}	{1, 4, 6}	0	130.
{0, 8, 4}	{4, 4, 4}	{4, 4, 3}	{5, 0, 7}	{0, 8, 5}	{3, 5, 4}	{4, 4, 1}	{7, 0, 3}	{4, 3, 5}	{2, 3, 6}	0	132.
{0, 8, 1}	{7, 0, 4}	{3, 5, 1}	{7, 0, 2}	{5, 0, 3}	{2, 6, 9}	{0, 8, 5}	{3, 5, 3}	{5, 0, 1}	{4, 0, 4}	0	107.
{0, 8, 1}	{7, 0, 1}	{6, 0, 4}	{2, 6, 5}	{3, 5, 4}	{4, 4, 4}	{4, 4, 2}	{6, 0, 6}	{0, 7, 6}	{1, 4, 7}	0	132.
{0, 8, 1}	{7, 0, 4}	{3, 5, 1}	{7, 0, 1}	{6, 0, 1}	{5, 0, 7}	{0, 8, 1}	{7, 0, 6}	{1, 6, 5}	{2, 3, 7}	0	89.
{0, 8, 3}	{5, 0, 4}	{1, 7, 5}	{3, 5, 3}	{5, 0, 2}	{3, 5, 4}	{4, 4, 2}	{6, 0, 5}	{1, 6, 5}	{3, 3, 0}	5	99.
{0, 8, 0}	{8, 0, 6}	{2, 6, 8}	{0, 8, 2}	{6, 0, 7}	{0, 8, 3}	{5, 0, 7}	{0, 8, 1}	{7, 0, 6}	{1, 4, 3}	2	141.
{0, 8, 6}	{2, 6, 2}	{6, 0, 2}	{4, 4, 4}	{4, 4, 4}	{4, 4, 4}	{4, 4, 3}	{5, 0, 2}	{3, 4, 2}	{5, 0, 1}	4	80.
{0, 8, 2}	{6, 0, 3}	{3, 5, 3}	{5, 0, 1}	{4, 4, 2}	{6, 0, 4}	{2, 6, 4}	{4, 4, 8}	{0, 7, 3}	{4, 0, 3}	1	110.
{0, 8, 4}	{4, 4, 8}	{0, 8, 4}	{4, 4, 6}	{2, 6, 6}	{2, 6, 5}	{3, 5, 3}	{5, 0, 3}	{2, 5, 3}	{4, 0, 2}	2	164.
{0, 8, 7}	{1, 7, 2}	{6, 0, 2}	{4, 4, 1}	{7, 0, 5}	{2, 6, 6}	{2, 6, 5}	{3, 5, 1}	{7, 0, 3}	{4, 0, 2}	2	110.
{0, 8, 2}	{6, 0, 1}	{5, 0, 1}	{4, 4, 7}	{1, 7, 4}	{4, 4, 2}	{6, 0, 4}	{2, 6, 1}	{7, 0, 5}	{2, 3, 3}	2	89.
{0, 8, 2}	{6, 0, 5}	{1, 7, 3}	{5, 0, 2}	{3, 5, 2}	{6, 0, 3}	{3, 5, 2}	{6, 0, 1}	{5, 0, 4}	{1, 4, 4}	1	86.

■

Esempio 16: Si supponga di dover esaminare m offerte. Le offerte vengono presentate in successione, una alla volta, e, prima di passare all'offerta successiva, bisogna decidere se accettare l'offerta corrente o meno. Se l'offerta viene scartata non può più essere presa in considerazione. Questo problema può essere risolto in vari modi a seconda delle ipotesi che si fanno sulla conoscenza a priori delle offerte e anche a seconda di come si modella l'obiettivo.

Inizialmente supponiamo di conoscere la distribuzione di probabilità delle offerte (cioè le offerte sono variabili aleatorie indipendenti X_1, \dots, X_m con medesima distribuzione $F(x)$ e densità $f(x)$) e supponiamo di voler massimizzare il valore atteso dell'offerta che viene accettata. Con queste ipotesi il problema può essere impostato come un processo markoviano di decisione ad orizzonte finito. Gli stati possono corrispondere ai valori assunti da X_t , che dovrebbero allora essere discretizzati. Tuttavia, data la semplicità del problema, possiamo operare analiticamente con un insieme di stati continuo.

Se $t := m$ non resta che accettare l'offerta X_m qualunque essa sia. Pertanto, indicando con $v^*(t, x)$ il valore atteso ottimo quando si esamina l'offerta t -ma e questa vale x , si ha

$$v^*(m, x) = x$$

Per $t := m - 1$ con $X_{m-1} = x$ si può decidere di accettare l'offerta, nel qual caso il valore atteso (in realtà il valore certo) dell'offerta è x , oppure di scartare l'offerta. In questo secondo caso il valore atteso è

$$\int_0^\infty v^*(m, x) f(x) dx = \int_0^\infty x f(x) dx = E[X] =: \hat{v}_{m-1}$$

Da cui

$$v^*(m - 1, x) = \max \{ x, \hat{v}_{m-1} \}$$

e la decisione ottima d^* è

$$d^*(m-1, x) = \begin{cases} \text{accettare} & \text{se } x \geq \hat{v}_{m-1} \\ \text{scartare} & \text{se } x < \hat{v}_{m-1} \end{cases}$$

In modo analogo si ha per $t := m-2$

$$v^*(m-2, x) = \max \left\{ x, \int_0^\infty v^*(m-1, y) f(y) dy \right\}$$

Possiamo porre

$$\hat{v}_{m-2} := \int_0^\infty v^*(m-1, y) f(y) dy = \hat{v}_{m-1} \int_0^{\hat{v}_{m-1}} f(y) dy + \int_{\hat{v}_{m-1}}^\infty y f(y) dy =$$

$$\hat{v}_{m-1} F(\hat{v}_{m-1}) + \int_{\hat{v}_{m-1}}^\infty y f(y) dy = \hat{v}_{m-1} + \int_{\hat{v}_{m-1}}^\infty (1 - F(y)) dy$$

e la formula può essere ricorsivamente estesa a tutti i t

$$v^*(t, x) = \max \{ x, \hat{v}_t \}$$

$$d^*(t, x) = \begin{cases} \text{accettare} & \text{se } x \geq \hat{v}_t \\ \text{scartare} & \text{se } x < \hat{v}_t \end{cases}$$

$$\hat{v}_{t-1} := \hat{v}_t F(\hat{v}_t) + \int_{\hat{v}_t}^\infty y f(y) dy = \hat{v}_t + \int_{\hat{v}_t}^\infty (1 - F(y)) dy > \hat{v}_t \quad (23)$$

quindi la politica ottima è definita da una successione decrescente di valori di soglia $\hat{v}_1, \dots, \hat{v}_{m-1}$ e l'offerta X_t viene confrontata con \hat{v}_t . Il calcolo effettivo dei valori di soglia dipende dalla distribuzione di probabilità. Ad esempio con distribuzione uniforme fra 0 e 1 si ottiene

$$\hat{v}_{t-1} := (\hat{v}_t)^2 + \int_{\hat{v}_t}^1 y dy = (\hat{v}_t)^2 + \left[\frac{y^2}{2} \right]_{\hat{v}_t}^1 = (\hat{v}_t)^2 + \frac{1}{2} - \frac{(\hat{v}_t)^2}{2} = \frac{1 + (\hat{v}_t)^2}{2}$$

da cui, con $m = 10$

$$\hat{v} = \{0.861098, 0.849821, 0.836447, 0.820301, 0.800376, 0.775082, 0.74173, 0.695313, 0.625, 0.5\}$$

Con una distribuzione di Poisson la ricorsione (23) diventa

$$\hat{v}_{t-1} := \frac{\lambda \hat{v}_t + e^{-\lambda \hat{v}_t}}{\lambda}$$

$$\hat{v} = \{1.2645, 1.22101, 1.17315, 1.11991, 1.05988, 0.990982, 0.909963, 0.811263, 0.68394, 0.5\}$$

■

Esempio 17: Si consideri lo stesso problema ma con un diverso obiettivo. Si voglia ad esempio massimizzare la probabilità di accettare l'offerta più alta. Lo stato è dato dalla coppia (x, y) con x offerta corrente e y massima offerta scartata. Sia $v^*(t, x, y)$ la probabilità ottima di accettare l'offerta massima quando la t -ma offerta vale x e la migliore offerta precedente valeva y . Allora l'equazione ricorsiva è

$$v^*(t-1, x, y) = \begin{cases} \max \left\{ 0, \int_0^\infty v^*(t, z, y) f(z) dz \right\} & \text{se } x \leq y \\ \max \left\{ F(x)^{m-t+1}, \int_0^\infty v^*(t, z, x) f(z) dz \right\} & \text{se } x > y \end{cases} \quad (24)$$

L'equazione (24) si spiega nel seguente modo: se l'offerta corrente x è minore della migliore delle offerte precedenti, è certo che non può essere l'offerta più alta e accettandola si ottiene una probabilità nulla di accettare l'offerta più alta. Se invece l'offerta viene scartata (come sarà sempre conveniente fare se $t < m$) la probabilità dovrà essere valutata sulla base dell'offerta futura z con una media probabilistica sui valori che z potrà assumere. Per comodità di notazione si definisca questa quantità come

$$V(t, y) := \int_0^\infty v^*(t, z, y) f(z) dz \quad (25)$$

Se invece x è maggiore o uguale a y , x potrebbe essere l'offerta più alta. Lo sarà certamente se le successive offerte saranno non maggiori di x . Siccome al tempo $t-1$ vi sono $m-t+1$ offerte successive, la probabilità che nessuna di queste sia maggiore di x è data da $F(x)^{m-t+1}$ e questo è il valore di probabilità in caso di accettazione. In caso di non accettazione la probabilità dovrà essere valutata sulla base dell'offerta futura z , tenendo conto che ora il valore della migliore offerta scartata non è più y ma x . I valori iniziali di (24) sono

$$v^*(m, x, y) = \begin{cases} 0 & \text{se } x < y \\ 1 & \text{se } x \geq y \end{cases}$$

Si riscriva (24) come

$$v^*(t-1, x, y) = \begin{cases} \max \{0, V(t, y)\} & \text{se } x \leq y \\ \max \{F(x)^{m-t+1}, V(t, x)\} & \text{se } x > y \end{cases}$$

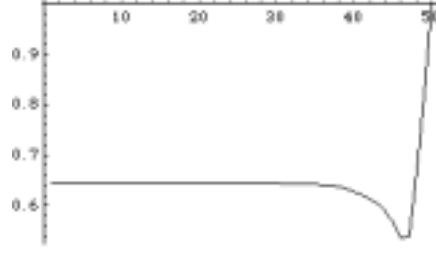
Facciamo notare che $V(t, y)$ è funzione non crescente di y . Infatti da (25) si vede che, se $v^*(t, x, y)$ è funzione non crescente di y , lo è anche $V(t, y)$. Inoltre (24) implica che $v^*(t-1, x, y)$ è dapprima funzione costante in y (fino al valore $y = x$) e poi prosegue come $V(t, y)$. Quindi $v^*(t-1, x, y)$ è funzione non crescente di y , se lo è $V(t, y)$. Siccome $v^*(m, x, y)$ è funzione non crescente di y , segue per induzione la tesi. Il significato intuitivo di questa proprietà è abbastanza evidente: più elevate sono le offerte scartate tanto meno probabile è di avere l'offerta massima fra quelle future. Si noti ancora che $F(x)^{m-t+1}$ è funzione non decrescente di x .

Allora, se $x > y$ il valore discriminante se accettare o meno l'offerta corrente è quel valore \bar{x} (potrebbe non essere unico) per cui

$$F(\bar{x})^{m-t+1} = V(t, \bar{x})$$

La funzione $v^*(t, x, y)$ non ha invece in generale un andamento monotono in x . Da (24) si vede che è dapprima costante (fino al valore $x = y$). Poi, se $y < \bar{x}$, è non crescente come $V(t, x)$ nell'intervallo $y < x < \bar{x}$ e successivamente è non decrescente come $F(\bar{x})^{m-t+1}$. Anche questa proprietà si può spiegare: la situazione è meno incerta se l'offerta corrente è bassa oppure alta, perché in entrambi i casi la decisione si effettua con minore rischio (scartare nel primo caso e accettare nel secondo)

Risolvendo (24) nel caso di distribuzione uniforme fra 1 e 50, discretizzata sui valori interi, si ottengono i valori di $v^*(1, x, 0)$ riportati in grafico (reso con linea continua). Il valore $v^*(1, x, 0)$ rappresenta la probabilità ottima di accettare (in una delle m offerte) l'offerta massima se la prima offerta vale x .



I valori discriminanti \bar{x} per $t = 1, \dots, 10$ sono dati da:

$$\{47, 47, 46, 46, 45, 44, 42, 40, 35, 26\}$$

■

Esempio 18: Si supponga ora di non avere alcuna informazione sulle offerte. Quindi non siamo in grado di modellare valori attesi e possiamo solo valutare la probabilità di accettare l'offerta più alta sulla base di considerazioni combinatorie. Gli unici elementi disponibili su cui effettuare la decisione sono il tempo corrente t , il valore dell'offerta corrente X_t e il valore della migliore offerta passata $Y_t := \max\{X_1, \dots, X_{t-1}\}$.

Se $X_t < Y_t$ certamente non bisogna accettare X_t perché si riduce a zero la probabilità di accettare l'offerta più alta. Supponiamo allora che $X_t \geq Y_t$. La decisione di accettare l'offerta dovrà basarsi su t (non sui valori effettivi di X_t e Y_t perché la distribuzione di probabilità delle offerte è ignota e non possiamo stimare se X_t sia o no un valore 'buono'). Quindi si tratta di valutare per quali valori di t un'offerta $X_t \geq Y_t$ va accettata e per quali invece non va accettata.

Sia \hat{t} un tempo particolare tale che le offerte X_t , $t \leq \hat{t}$ non vengono accettate e di quelle successive viene accettata l'offerta $X_{\hat{t}}$ con $\tilde{t} := \min\{t > \hat{t} : X_t \geq Y_t\}$. Si noti che (per definizione di Y_t) $Y_{\hat{t}} \geq X_t$ per ogni $1 \leq t \leq \hat{t}$ e che (per definizione di \tilde{t}) $Y_{\hat{t}} \geq X_t$ per ogni $\hat{t} < t < \tilde{t}$. Quindi $Y_{\hat{t}} \geq X_t$ per $1 \leq t < \tilde{t}$.

Allora, nell'ipotesi che l'offerta più alta sia in posizione t^* dobbiamo chiederci con quale probabilità avviene $\tilde{t} = t^*$ (ovvero l'offerta più alta viene accettata). Dalla relazione precedente è necessario che la migliore offerta da 1 a $t^* - 1$ sia apparsa nell'intervallo da 1 a \hat{t} . Questo avviene con probabilità $\hat{t}/(t^* - 1)$. Dobbiamo ora considerare tutti i valori che può assumere t^* . Questi vanno da $\hat{t} + 1$ fino a m e ognuno di questi casi ha probabilità $1/m$ (se t^* è nell'intervallo da 1 a \hat{t} l'offerta più alta viene necessariamente 'persa' e quindi la probabilità di accettarla diventa nulla). Quindi la probabilità $q(\hat{t})$ di ottenere l'offerta più alta fissando a $\hat{t} + 1$ il momento di poter accettare le offerte (se ovviamente $X_t \geq Y_t$) è

$$q(\hat{t}) = \frac{1}{m} \sum_{t^*=\hat{t}+1}^m \frac{\hat{t}}{t^* - 1} = \frac{\hat{t}}{m} \sum_{t^*=\hat{t}}^{m-1} \frac{1}{t^*} = \frac{\hat{t}}{m} \left(\sum_{k=1}^{m-1} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{\hat{t}-1} \frac{1}{k} \right) = \frac{\hat{t}}{m} (H_{m-1} - H_{\hat{t}-1})$$

dove $H_k := \sum_{i=1}^k (1/i)$ (numeri armonici). Si valuti la differenza

$$q(t+1) - q(t) = \frac{t+1}{m} (H_{m-1} - H_t) - \frac{t}{m} (H_{m-1} - H_{t-1}) = \frac{H_{m-1} - H_t - 1}{m} = \frac{H_m - H_t - (1/m) - 1}{m} \quad (26)$$

Siamo interessati a valutare il segno di (26). Dalla relazione

$$H(n) = \ln n + \gamma + o(n^2)$$

con $\gamma = 0.58\dots$ costante di Eulero, (26) è equivalente (a meno di infinitesimi) a

$$\ln m - \ln t - (1/m) - 1 = \ln \frac{m}{t} - \left(1 + \frac{1}{m}\right)$$

e

$$q(t+1) - q(t) \geq 0 \implies \ln \frac{m}{t} - \left(1 + \frac{1}{m}\right) \geq 0 \implies \frac{m}{t} \geq e^{1+1/m}$$

Allora per $t < m e^{-1-1/m}$ la probabilità cresce e il valore ottimo di \hat{t} si ha per

$$\hat{t} = \min \left\{ t : t \geq m e^{-1-1/m} \right\} = \left\lceil m e^{-1-1/m} \right\rceil \asymp m e^{-1}$$

e si ottiene

$$q(\hat{t}) \asymp e^{-1} (H_{m-1} - H_{\hat{t}-1}) \asymp e^{-1} \ln \frac{m-1}{\hat{t}-1} \asymp e^{-1}$$

Riportiamo una simulazione dei tre metodi su 100 sequenze di 10 numeri generati con distribuzione uniforme fra 1 e 20. I valori di soglia per il primo metodo (il valore corrente viene accettato se maggiore o uguale del valore di soglia) per ognuna delle offerte sono

$$\{18, 18, 18, 17, 17, 16, 15, 14, 11, 0\}$$

quelli del secondo metodo sono (il valore corrente viene accettato se maggiore o uguale del valore di soglia e del migliore valore scartato):

$$\{19, 19, 19, 19, 18, 17, 17, 15, 11, 1\}$$

Per il terzo metodo non ci sono valori di soglia e il valore \hat{t} è $\lceil e^{-1-1/10} 10 \rceil = 4$.

Riportiamo le sequenze per le quali il primo metodo ha fornito un risultato migliore degli altri due (i valori dopo la sequenza sono nell'ordine, il valore massimo della sequenza, e quelli forniti dai tre metodi)

$$\begin{array}{llll} \{18, 1, 17, 18, 14, 7, 14, 17, 2, 11\} & 18 & 18 & 11 & 11 \\ \{17, 18, 15, 15, 5, 11, 3, 13, 16, 10\} & 18 & 18 & 10 & 10 \\ \{2, 1, 3, 4, 10, 16, 16, 13, 1, 1\} & 16 & 16 & 1 & 10 \\ \{10, 16, 1, 11, 12, 10, 12, 3, 12, 2\} & 16 & 12 & 2 & 2 \\ \{16, 2, 6, 9, 9, 15, 3, 9, 14, 6\} & 16 & 14 & 6 & 6 \\ \{8, 16, 18, 12, 14, 15, 4, 6, 4, 13\} & 18 & 18 & 13 & 13 \end{array}$$

quelle per le quali il secondo metodo ha fornito un risultato migliore

$$\begin{array}{llll} \{6, 14, 9, 7, 3, 2, 15, 11, 8, 18\} & 18 & 15 & 18 & 15 \\ \{4, 5, 1, 5, 4, 16, 17, 7, 9, 15\} & 17 & 16 & 17 & 16 \\ \{17, 18, 4, 20, 13, 10, 7, 14, 19, 15\} & 20 & 18 & 20 & 15 \\ \{16, 1, 3, 14, 17, 12, 9, 8, 8, 18\} & 18 & 17 & 18 & 17 \\ \{2, 9, 3, 15, 7, 14, 15, 19, 3, 14\} & 19 & 15 & 19 & 15 \end{array}$$

quelle per le quali il terzo metodo ha fornito un risultato migliore

$$\begin{array}{llll} \{12, 14, 19, 19, 15, 6, 2, 16, 20, 9\} & 20 & 19 & 19 & 20 \\ \{9, 2, 14, 7, 4, 15, 14, 5, 5, 2\} & 15 & 2 & 2 & 15 \\ \{19, 10, 7, 9, 17, 20, 18, 14, 12, 10\} & 20 & 19 & 19 & 20 \\ \{6, 9, 11, 7, 10, 9, 11, 5, 1, 4\} & 11 & 4 & 4 & 11 \\ \{9, 8, 19, 15, 20, 4, 9, 2, 19, 11\} & 20 & 19 & 19 & 20 \\ \{19, 11, 13, 3, 1, 7, 2, 14, 20, 11\} & 20 & 19 & 19 & 20 \end{array}$$

e infine quelle per le quali i tre metodi forniscono gli stessi valori (si notino i due casi in cui tutti i metodi falliscono in modo abbastanza clamoroso!)

{11, 1, 4, 11, 20, 7, 3, 20, 10, 3}	20	20	20	20
{17, 8, 11, 12, 20, 13, 8, 5, 13, 16}	20	20	20	20
{8, 2, 12, 14, 18, 10, 11, 8, 9, 2}	18	18	18	18
{15, 12, 8, 13, 6, 2, 13, 15, 7, 2}	15	15	15	15
{11, 17, 11, 12, 18, 17, 18, 12, 4, 6}	18	18	18	18
{15, 12, 8, 12, 8, 14, 5, 2, 7, 16}	16	16	16	16
{20, 6, 15, 19, 1, 11, 5, 17, 11, 20}	20	20	20	20
{14, 15, 9, 15, 12, 5, 7, 6, 6, 11}	15	11	11	11
{11, 8, 9, 13, 7, 5, 8, 2, 10, 20}	20	20	20	20
{15, 16, 9, 6, 19, 15, 10, 5, 7, 18}	19	19	19	19
{18, 2, 8, 14, 5, 8, 10, 12, 18, 14}	18	18	18	18
{9, 1, 8, 14, 5, 8, 13, 18, 6, 11}	18	18	18	18
{3, 11, 11, 16, 15, 20, 16, 1, 9, 2}	20	20	20	20
{12, 12, 6, 8, 18, 8, 11, 14, 18, 7}	18	18	18	18
{11, 5, 19, 2, 19, 20, 6, 16, 16, 5}	20	19	19	19
{1, 17, 1, 16, 4, 14, 1, 15, 2, 15}	17	15	15	15
{4, 15, 5, 14, 8, 4, 12, 15, 10, 16}	16	15	15	15
{3, 9, 9, 11, 4, 3, 6, 8, 4, 1}	11	1	1	1
{16, 19, 8, 12, 3, 19, 19, 16, 12, 20}	20	19	19	19
{16, 8, 4, 15, 11, 6, 19, 2, 14, 19}	19	19	19	19
{9, 3, 16, 17, 17, 7, 6, 17, 16, 10}	17	17	17	17
{9, 9, 15, 9, 17, 14, 10, 17, 13, 6}	17	17	17	17
{5, 7, 5, 2, 4, 4, 4, 18, 18, 11}	18	18	18	18
{12, 11, 15, 13, 14, 20, 17, 15, 2, 12}	20	20	20	20
{8, 1, 1, 14, 19, 20, 5, 1, 6, 19}	20	19	19	19
{16, 3, 14, 10, 4, 17, 9, 13, 14, 6}	17	17	17	17
{14, 16, 2, 4, 12, 4, 8, 4, 3, 6}	16	6	6	6
{1, 13, 10, 9, 1, 1, 11, 17, 9, 6}	17	17	17	17
{9, 16, 10, 8, 11, 5, 3, 18, 2, 9}	18	18	18	18
{10, 14, 15, 12, 13, 17, 17, 17, 4, 13}	17	17	17	17
{13, 4, 14, 5, 13, 6, 17, 14, 3, 5}	17	17	17	17
{11, 2, 12, 20, 12, 7, 9, 8, 20, 18}	20	20	20	20
{10, 16, 2, 6, 13, 20, 8, 11, 19, 4}	20	20	20	20
{12, 8, 1, 3, 7, 18, 12, 1, 11, 19}	19	18	18	18
{8, 20, 11, 17, 3, 4, 1, 20, 6, 15}	20	20	20	20
{2, 7, 12, 3, 16, 7, 6, 16, 15, 13}	16	16	16	16
{5, 13, 14, 16, 12, 5, 18, 3, 1, 11}	18	18	18	18
{14, 1, 7, 2, 19, 9, 11, 19, 4, 16}	19	19	19	19
{3, 6, 17, 11, 2, 6, 13, 17, 9, 8}	17	17	17	17
{17, 1, 8, 1, 12, 9, 11, 18, 18, 14}	18	18	18	18
{2, 15, 10, 16, 2, 11, 9, 19, 15, 8}	19	19	19	19
{11, 5, 8, 9, 5, 9, 9, 1, 20, 13}	20	20	20	20

In totale, su cento sequenze, i tre metodi hanno trovato il massimo in 69, 70 e 51 casi rispettivamente. Si ricordi che il primo metodo non cerca di massimizzare la probabilità di ottenere l'ottimo quindi il valore sperimentale di 69/100 non si può confrontare con dei valori teorici. Negli altri due casi invece il valore sperimentale è abbastanza in accordo con i valori teorici. ■

3.2 Orizzonte infinito - Caso generale

Ad orizzonte infinito si assume che i guadagni r_t e le probabilità di transizione P_t siano stazionari, per cui nella notazione si elimina la dipendenza da t . Una politica generica π definisce per ogni stato i e ogni tempo t una decisione $d_\pi(i, t)$. Una politica stazionaria π definisce per ogni tempo t una medesima decisione $d_\pi(i)$, per ogni stato i . Il valore di una politica è dato da (20) che si particolarizza a

$$v_\pi(i, 0) := E \left[\sum_{t \geq 0} r(X_t(\pi), d_\pi(X_t(\pi))) \mid X_0 = i \right]$$

Data la stazionarietà e l'orizzonte infinito $v_\pi(i, 0) = v_\pi(i, t)$ per ogni t , per cui si può eliminare la dipendenza dal tempo nella notazione e definire direttamente

$$v_\pi(i) := E \left[\sum_{t \geq 0} r(X_t(\pi), d_\pi(X_t(\pi))) \mid X_0 = i \right] \quad (27)$$

e indicare con v_π il vettore $\{v_\pi(i) : i \in S\}$. Allora si ha

$$v_\pi = r_\pi + P_\pi r_\pi + P_\pi^2 r_\pi + P_\pi^3 r_\pi + \dots = r_\pi + P_\pi (r_\pi + P_\pi r_\pi + P_\pi^2 r_\pi + \dots) = r_\pi + P_\pi v_\pi \quad (28)$$

Se l'espressione (27) è finita allora la relazione (28) implica

$$(I - P_\pi) v_\pi = r_\pi \quad (29)$$

Si noti che $(I - P_\pi)$ è singolare. In ogni caso si deve avere $r_\pi \in R(I - P_\pi) = N^\perp(I - P_\pi)^T$ e cioè $r_\pi \perp \bar{p}_\pi$ con \bar{p}_π probabilità stazionaria di P_π (non necessariamente unica). Solo in questo caso l'espressione (27) può essere finita. Se la probabilità limite è unica allora si può scrivere

$$v_\pi = \sum_{k \geq 0} P_\pi^k r_\pi = r_\pi + \sum_{k \geq 1} (\mathbf{1} \bar{p} + Q_\pi^k) r_\pi = \sum_{k \geq 0} Q_\pi^k r_\pi = (I - Q_\pi)^{-1} r_\pi$$

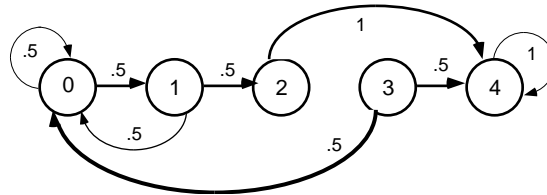
e quindi v_π si calcola risolvendo il sistema lineare:

$$(I - Q_\pi) v_\pi = r_\pi \quad (30)$$

La condizione di ortogonalità $r_\pi \perp \bar{p}_\pi$ è soddisfatta ad esempio se i guadagni sono diversi da 0 solo su stati transienti per la politica π .

Esempio 19: si riconsideri l'Esempio 4 (roulette) e si introduca la possibilità di ritirarsi dal gioco in qualsiasi stato. Quindi in ogni stato si hanno due alternative: ritirarsi oppure continuare. Ritirarsi corrisponde a portarsi nello stato n nel quale non si hanno alternative. Anche se lo stato n corrisponde ad una terminazione e quindi ad un orizzonte finito, tuttavia vi sono realizzazioni della catena che richiedono un tempo infinito e quindi bisogna modellare il processo con un orizzonte infinito.

In questo esempio una politica è definita dallo stato in cui si decide di ritirarsi. Ad esempio si supponga di ritirarsi nello stato 2.



Le transizioni indotte da tale politica sono quelle evidenziate in figura, insieme alle loro probabilità. Per il calcolo dei guadagni, si ricorda che la puntata nello stato i è pari a 2^i . Se si vince avviene una transizione da i a 0 con un guadagno $r(i, 0) = 2^i$ e se si perde avviene una transizione da i a $i + 1$ con un guadagno (perdita) $r(i, i + 1) = -2^i$. Essendo le due probabilità di transizioni uguali il guadagno atteso $r(i)$ è nullo (si noti che si arriva a tale conclusione indipendentemente dalla posta giocata). Il guadagno è anche nullo se la decisione è di ritirarsi. Quindi, sorprendentemente, il valore atteso di una qualsiasi politica è nullo e tutte le politiche sono equivalenti.

Si immagini di modificare il meccanismo del gioco, supponendo che negli stati 0 e 2 sia assegnato un ‘premio’ di rischio, in caso di vittoria, pari ad una frazione 2α della posta giocata, mentre negli stati 1 e 3 sia assegnata una ‘penalità’ di rischio, in caso di perdita, pari ad una frazione 2α della posta giocata. Quindi, se si punta 2^i negli stati 0 e 2 si può perdere 2^i ma si può vincere $2^i(1 + 2\alpha)$, mentre se si punta 2^i negli stati 1 e 3 si può vincere 2^i ma si può perdere $2^i(1 + 2\alpha)$. In quest’ipotesi la politica di puntare sempre genera il vettore di guadagni $r_\pi = (\alpha, -\alpha, \alpha, -\alpha, 0)$. Adottando la politica indicata in figura si hanno i seguenti valori di r_π e P_π

$$r_\pi = \begin{pmatrix} \alpha \\ -\alpha \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad P_\pi = \begin{pmatrix} 0.5 & 0.5 & 0 & 0 & 0 \\ 0.5 & 0 & 0.5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0.5 & 0 & 0 & 0 & 0.5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Siccome la probabilità limite di P_π è $\bar{p} = (0, 0, 0, 0, 1)$ si ha

$$Q_\pi = P - \mathbf{1}\bar{p} = \begin{pmatrix} 0.5 & 0.5 & 0 & 0 & -1 \\ 0.5 & 0 & 0.5 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.5 & 0 & 0 & 0 & -0.5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \implies I - Q_\pi = \begin{pmatrix} 0.5 & -0.5 & 0 & 0 & 1 \\ -0.5 & 1 & -0.5 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -0.5 & 0 & 0 & 1 & 0.5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

e, risolvendo (30) si ottiene

$$v_\pi = (2\alpha \quad 0 \quad 0 \quad \alpha \quad 0)^T$$

Per esercizio si può verificare che i valori delle politiche abbandonando negli stati 1 e 3 e non abbandonando mai sono rispettivamente

$$v_\pi = (4\alpha \quad 2\alpha \quad 0 \quad 2\alpha \quad 0)^T, \quad v_\pi = (3\alpha \quad \alpha \quad \alpha \quad 1.5\alpha \quad 0)^T, \quad v_\pi = (3\alpha \quad \alpha \quad \alpha \quad 0.5\alpha \quad 0)^T$$

■

Nel caso particolare in cui i guadagni sono tutti non negativi (cosiddetto *caso positivo*) oppure tutti non positivi (cosiddetto *caso negativo*) la condizione $r_\pi \perp \bar{p}_\pi$ è soddisfatta se e solo se i guadagni sono diversi da 0 su stati transienti per la politica π . Quindi il caso positivo ammette ottimo finito se e solo se i guadagni sono positivi su stati transienti rispetto ad ogni politica mentre il caso negativo ammette ottimo se e solo se esiste almeno una politica con guadagni negativi solo su stati transienti.

Un tipico caso in cui le condizioni di convergenza sono verificate è dato da quei problemi nei quali si tratta di decidere quando interrompere una serie di azioni su un orizzonte potenzialmente infinito di azioni e il guadagno (o il costo) si applica solo nel momento in cui si decide di interrompere. In questo caso è come se esistesse uno stato aggiuntivo di terminazione che agisce come stato assorbente per la catena.

Esercizio 3: Si supponga di cercare un parcheggio su un lato di una strada sufficientemente lunga. Si vuole parcheggiare il più vicino possibile ad un particolare parcheggio sul lato della strada. La strada è a senso unico per cui non è possibile ritornare indietro. Inoltre supponiamo che un eventuale parcheggio vuoto sia visibile soltanto quando si arriva a lato del parcheggio stesso e che il viaggio sia iniziato da una distanza sufficientemente grande. Sia p la probabilità che un parcheggio sia vuoto. Si vuole determinare la strategia ottima, cioè quella che minimizza il valore atteso della distanza fra il parcheggio scelto e il parcheggio desiderato. (Certamente, una volta superato il parcheggio desiderato, la strategia ottima consiste nel fermarsi al primo parcheggio vuoto. Però nell'avvicinamento al parcheggio desiderato si può anche lasciar perdere un parcheggio vuoto nella speranza di trovarne uno più avanti.)

Soluzione

Si possono adottare due approcci: nel primo gli stati sono i parcheggi e le transizioni avvengono da un parcheggio vuoto ad un altro vuoto; in questo caso la catena di Markov è stazionaria (transizioni e guadagni non cambiano con il tempo); nel secondo approccio gli stati sono solo due: parcheggio vuoto e parcheggio occupato; in questo caso la catena non è stazionaria in quanto i guadagni cambiano all'avvicinarsi alla destinazione, però il problema può essere formulato con orizzonte finito dato che la politica ottima è nota dopo aver raggiunto la destinazione.

Approccio 1.

Indichiamo gli stati con numeri interi, assegnando l'etichetta 0 alla destinazione ed etichette positive ai parcheggi prima di raggiungere la destinazione. Sia $V(k)$ il valore ottimo quando si è accanto al parcheggio k -mo e questo risulta vuoto. Si noti che la probabilità di trovare vuoto il parcheggio successivo (cioè il parcheggio $k - 1$) è p , la probabilità di trovare vuoto il parcheggio $k - 2$ ed occupato il parcheggio $k - 1$ è $p(1 - p)$ e in generale la probabilità di trovare vuoto il parcheggio i ed occupati i parcheggi fra k ed i è $p(1 - p)^{k-i-1}$. Quindi, considerando transizioni soltanto fra parcheggi vuoti, si ha la seguente equazione di ottimalità:

$$V(k) = \min \left\{ |k| ; \sum_{i < k} p(1 - p)^{k-i-1} V(i) \right\} \quad (31)$$

Se $k \leq 0$ è ovviamente ottimo fermarsi. Quindi $V(k) = |k|$ se $k \leq 0$. Allora possiamo riscrivere (31) come

$$\begin{aligned} V(k) &= \min \left\{ |k| ; \sum_{i=1}^{k-1} p(1 - p)^{k-i-1} V(i) + \sum_{i=0}^{\infty} p(1 - p)^{k+i-1} i \right\} = \\ &= \min \left\{ |k| ; \sum_{i=1}^{k-1} p(1 - p)^{k-i-1} V(i) + \frac{(1 - p)^k}{p} \right\} \end{aligned} \quad (32)$$

Calcoliamo $V(1)$:

$$V(1) = \min \left\{ 1 ; \frac{1 - p}{p} \right\}$$

Quindi se $p \geq 1/2$ è ottimo non fermarsi. Ma è certamente ottimo non fermarsi se $p \geq 1/2$ per tutti i valori di $k \geq 1$. Quindi possiamo solamente interessarci al caso $p < 1/2$ e calcolare $V(2)$ assumendo $p < 1/2$. Se $p < 1/2$ allora $V(1) = 1$ e quindi

$$V(2) = \min \left\{ 2 ; \frac{(1 - p)^2}{p} + p \right\}$$

Dobbiamo quindi calcolare per quale p si ha

$$2 = \frac{(1-p)^2}{p} + p$$

Si ottiene $p = 1 - \sqrt{1/2}$. Allora abbiamo trovato che se $p > 1/2$ bisogna procedere senza fermarsi fino alla destinazione e poi scegliere il primo parcheggio vuoto. Se invece $1 - \sqrt{1/2} < p \leq 1/2$ si procede senza fermarsi fino al parcheggio 1 e poi si sceglie il primo parcheggio vuoto. Per il calcolo di $V(3)$ possiamo quindi assumere $1 - \sqrt{1/2} > p$ nel qual caso $V(2) = 2$ e $V(1) = 1$. In generale possiamo calcolare:

$$V(k) = \min \left\{ |k| ; \sum_{i=1}^{k-1} p(1-p)^{k-i-1} i + \frac{(1-p)^k}{p} \right\} \quad (33)$$

ottenuta da (32) sostituendo $V(i)$ con i (nell'ipotesi che p sia al di sotto di un'opportuna soglia). Applicando la formula

$$\sum_{i=1}^k a^i i = \frac{a + k a^{k+2} - (k+1) a^{k+1}}{(1-a)^2}$$

(33) diventa

$$V(k) = \min \left\{ k ; 2 \frac{(1-p)^k}{p} + k - \frac{1}{p} \right\}$$

da cui, uguagliando i termini si ottiene

$$p = 1 - \sqrt[k]{\frac{1}{2}}$$

come valori di soglia. Quindi la politica ottima è di procedere senza fermarsi sino al parcheggio k per cui si ha

$$1 - \sqrt[k]{\frac{1}{2}} < p \leq 1 - \sqrt[k-1]{\frac{1}{2}} \quad \text{ovvero} \quad k = \left\lfloor -\frac{1}{\log_2(1-p)} \right\rfloor \quad (34)$$

Ad esempio se mediamente un parcheggio ogni 10 è vuoto ($p = 0.1$) risulta $k = 6$ e per $p = 0.05$ risulta $k = 13$. Inoltre per valori piccoli di p , $\log_2(1-p)$ è approssimabile con $-p \log_2 e$ e quindi (34) è uguale a $\lfloor \ln 2/p \rfloor$ tranne che in intorno dei valori critici $p_k := 1 - \sqrt[k]{1/2}$.

Approccio 2.

In questo approccio ci sono due stati, lo stato 0 che corrisponde al trovare un parcheggio vuoto e lo stato 1 che corrisponde al trovare un parcheggio occupato. Ad ogni istante si visita un parcheggio (che può essere vuoto oppure occupato) per cui possiamo identificare il tempo con i parcheggi. L'equazione di ottimalità diventa in questo caso:

$$V_k(0) = \min \{ k ; p V_{k-1}(0) + (1-p) V_{k-1}(1) \}$$

$$V_k(1) = p V_{k-1}(0) + (1-p) V_{k-1}(1)$$

Si noti che $k \leq h$ implica $V_k(i) \geq V_h(i)$ per come è definito il problema. Sia \bar{k} tale che

$$\bar{k} \leq p V_{\bar{k}-1}(0) + (1-p) V_{\bar{k}-1}(1)$$

Allora se $k \leq \bar{k}$ abbiamo anche

$$k \leq p V_{k-1}(0) + (1-p) V_{k-1}(1)$$

e quindi $V_k(0) = k$ da cui

$$V_k(1) = p(k-1) + (1-p) V_{k-1}(1) \quad \text{se } k \leq \bar{k} \quad (35)$$

Poiché $V_0(1) = 1/p$ (come si calcola facilmente) vogliamo trovare una formula chiusa per la ricorsione (35) che riscriviamo come

$$V_{k+1} = k p + (1 - p) V_k, \quad k \geq 0, \quad V_0 = \frac{1}{p}$$

Useremo le funzioni generatrici. Quindi moltiplicando ogni termine per z^k e sommando si ha

$$\sum_{k \geq 0} z^k V_{k+1} = \sum_{k \geq 0} k z^k p + (1 - p) \sum_{k \geq 0} z^k V_k$$

Si indichi $\varphi(z) := \sum_{k \geq 0} z^k V_k$. Allora

$$\sum_{k \geq 0} z^k V_{k+1} = \frac{1}{z} \sum_{k \geq 0} z^{k+1} V_{k+1} = \frac{1}{z} (\varphi(z) - V_0)$$

e quindi

$$\frac{1}{z} (\varphi(z) - V_0) = p \frac{z}{(1-z)^2} + (1-p) \varphi(z)$$

da cui si ottiene sostituendo $V_0 = 1/p$:

$$\varphi(z) = \frac{(p^2 + 1) z^2 - 2 z + 1}{p (1 - z)^2 (1 - z(1 - p))} \quad (36)$$

Vogliamo trovare delle costanti A , B e C tali che

$$\varphi(z) = \frac{1}{p} \left(\frac{A + B z}{(1 - z)^2} + \frac{C}{1 - z(1 - p)} \right) \quad (37)$$

Confrontando (36) e (37) si ottiene

$$A = -1, \quad B = (1 + p), \quad C = 2,$$

e quindi

$$\begin{aligned} \varphi(z) &= \frac{1}{p} \sum_{k \geq 0} (A(k+1) + B k + C(1-p)^k) z^k = \\ &= \frac{1}{p} \sum_{k \geq 0} (-(k+1) + (1+p)k + 2(1-p)^k) z^k = \\ &= \frac{1}{p} \sum_{k \geq 0} (-1 + k p + 2(1-p)^k) z^k \end{aligned}$$

e quindi

$$V_k = k - \frac{1}{p} + \frac{2(1-p)^k}{p}$$

Allora

$$V_k(1) = k - \frac{1}{p} + \frac{2(1-p)^k}{p}$$

se $k \leq \bar{k}$ dove \bar{k} è il più grande valore di k per cui

$$k \leq p V_{k-1}(0) + (1-p) V_{k-1}(1) = V_k(1) = k - \frac{1}{p} + \frac{2(1-p)^k}{p}$$

ovvero

$$\bar{k} = \left\lfloor -\frac{1}{\log_2(1-p)} \right\rfloor$$

e per $k \leq \bar{k}$ ci si ferma se il parcheggio è vuoto e per valori $k > \bar{k}$ si prosegue. ■

3.3 Orizzonte infinito - caso scontato

Se invece l'espressione (27) è illimitata, bisogna modificare la definizione di valore di una politica. Un metodo frequentemente impiegato consiste nello scontare di un fattore λ i guadagni futuri. Infatti, considerato che una somma monetaria a , guadagnata al tempo t , ha un valore $a(1 + \alpha)$ al tempo $t + 1$, dove $\alpha > 0$ è il tasso d'interesse monetario, si vede che una somma a , guadagnata al tempo $t + 1$, vale $1/(1 + \alpha)$ di una somma guadagnata al tempo t . Allora, nel massimizzare i guadagni futuri bisogna tener conto di questo fatto e scontare il guadagno al tempo $t + 1$, rispetto a quello al tempo t , di un fattore $\lambda := 1/(1 + \alpha) < 1$. Quindi (27) viene modificata in

$$v_\pi(i) := E \left[\sum_{t \geq 0} \lambda^t r(X_t(\pi), d_\pi(X_t(\pi))) \mid X_0 = i \right] \quad (38)$$

e (28) in

$$v_\pi = r_\pi + \lambda P_\pi r_\pi + \lambda^2 P_\pi^2 r_\pi + \lambda^3 P_\pi^3 r_\pi + \dots = r_\pi + \lambda P_\pi (r_\pi + \lambda P_\pi r_\pi + \lambda^2 P_\pi^2 r_\pi + \dots) = r_\pi + \lambda P_\pi v_\pi \quad (39)$$

Se si assume che $r(i, d) < K, \forall i, d$, allora (38) è limitata da $K/(1 - \lambda)$. La relazione (39) costituisce un efficace metodo di calcolo del valore di una politica. Infatti il sistema lineare

$$(I - \lambda P_\pi) v_\pi = r_\pi \quad (40)$$

può essere sempre risolto dato che il massimo (in modulo) autovalore di λP_π è $\lambda < 1$.

Per il calcolo della politica ottima è fondamentale l'operatore

$$T(v) := \sup_{\pi} r_\pi + \lambda P_\pi v$$

dove il sup va inteso componente per componente. Dimostreremo che il valore ottimo v^* è il punto fisso dell'operatore T , ovvero $v^* = T(v^*)$. Preliminarmente facciamo vedere che T è una contrazione.

Lemma 15: $\|T(u) - T(v)\| \leq \lambda \|u - v\|$.

Dimostrazione: Si supponga che esistano una politica $\pi(v)$ tale che $T(v) = r_{\pi(v)} + \lambda P_{\pi(v)} v$ e una politica $\pi(u)$ tale che $T(u) = r_{\pi(u)} + \lambda P_{\pi(u)} u$. Allora $T(u) \geq r_{\pi(v)} + \lambda P_{\pi(v)} u$ e $T(v) \geq r_{\pi(u)} + \lambda P_{\pi(u)} v$ e quindi

$$r_{\pi(v)} + \lambda P_{\pi(v)} u - r_{\pi(v)} - \lambda P_{\pi(v)} v \leq T(u) - T(v) \leq r_{\pi(u)} + \lambda P_{\pi(u)} u - r_{\pi(u)} - \lambda P_{\pi(u)} v$$

cioè

$$\lambda P_{\pi(v)} (u - v) \leq T(u) - T(v) \leq \lambda P_{\pi(u)} (u - v)$$

da cui

$$-\lambda \|P_{\pi(v)} (u - v)\|_\infty \mathbf{1} \leq T(u) - T(v) \leq \lambda \|P_{\pi(u)} (u - v)\|_\infty \mathbf{1}$$

e quindi, dato che $\|P\|_\infty = 1$,

$$\|T(u) - T(v)\|_\infty \leq \lambda \|u - v\|_\infty$$

■

Possiamo quindi concludere, in base al lemma e a noti risultati, che

Lemma 16: *Il punto fisso $T(v^*) = v^*$ esiste ed è unico.* ■

Lemma 17: *Se $v \geq T(v)$ allora $v \geq v_\pi$ per ogni politica π .*

Dimostrazione: Sia π una politica arbitraria. Quindi

$$v \geq \sup_{\pi} r_{\pi} + \lambda P_{\pi} v \geq r_{\pi} + \lambda P_{\pi} v$$

da cui, essendo P_{π} non negativa,

$$v \geq r_{\pi} + \lambda P_{\pi} v \geq r_{\pi} + \lambda P_{\pi} (r_{\pi} + \lambda P_{\pi} v) \geq r_{\pi} + \lambda P_{\pi} r_{\pi} + \lambda^2 P_{\pi}^2 (r_{\pi} + \lambda P_{\pi} v)$$

e ricorsivamente

$$v \geq r_{\pi} + \lambda P_{\pi} r_{\pi} + \lambda^2 P_{\pi}^2 r_{\pi} + \lambda^3 P_{\pi}^3 r_{\pi} + \dots = v_{\pi}$$

Lemma 18: *Se $v \leq T(v)$ allora esiste una politica $\hat{\pi}$ tale che $v \leq v_{\hat{\pi}}$.*

Dimostrazione: Sia $\hat{\pi}$ tale che $T(v) = r_{\hat{\pi}} + \lambda P_{\hat{\pi}} v$. Allora

$$v \leq \sup_{\pi} r_{\pi} + \lambda P_{\pi} v = r_{\hat{\pi}} + \lambda P_{\hat{\pi}} v$$

da cui, essendo $P_{\hat{\pi}}$ non negativa,

$$v \leq r_{\hat{\pi}} + \lambda P_{\hat{\pi}} v \leq r_{\hat{\pi}} + \lambda P_{\hat{\pi}} (r_{\hat{\pi}} + \lambda P_{\hat{\pi}} v) \leq r_{\hat{\pi}} + \lambda P_{\hat{\pi}} r_{\hat{\pi}} + \lambda^2 P_{\hat{\pi}}^2 (r_{\hat{\pi}} + \lambda P_{\hat{\pi}} v)$$

e ricorsivamente

$$v \leq r_{\hat{\pi}} + \lambda P_{\hat{\pi}} r_{\hat{\pi}} + \lambda^2 P_{\hat{\pi}}^2 r_{\hat{\pi}} + \lambda^3 P_{\hat{\pi}}^3 r_{\hat{\pi}} + \dots = v_{\hat{\pi}}$$

Teorema 19: *Sia $v^* = T(v^*)$. Allora esiste una politica π^* il cui valore è v^* ed è tale che $v^* \geq v_{\pi}$ per ogni politica π e quindi ottima.* ■

Il calcolo di π^* può essere effettuato in diversi modi alternativi. Una possibilità consiste nell'applicazione diretta della contrazione. Come è noto la ricorsione $v^{k+1} := T(v^k)$ tende al punto fisso a partire da un arbitrario valore v^0 . La convergenza è lineare con tasso λ e quindi non è molto veloce in generale.

Esempio 20: Si riconsideri l'esempio 13, questa volta con orizzonte infinito e tasso di sconto $\lambda = 0.8$. Applicando l'iterazione a partire dal vettore nullo si ottengono, nelle prime 20 iterazioni, i valori indicati nella matrice di sinistra e corrispondentemente le politiche date dall'operatore T nella matrice di destra.

da cui

$$P_\pi = \begin{pmatrix} 0.8 & 0.2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad r_\pi = \begin{pmatrix} 10 \\ -2 \\ -3 \\ -5 \\ -9 \end{pmatrix}$$

Ripetendo le operazioni si ottiene

$$v := \begin{pmatrix} 41.7241 \\ 31.3793 \\ 30.3793 \\ 28.3793 \\ 24.3793 \end{pmatrix} \quad T(v) = \begin{pmatrix} 41.7241 \\ 32.9434 \\ 30.3793 \\ 28.3793 \\ 24.3793 \end{pmatrix} \quad \pi := \Pi(v) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$P_\pi = \begin{pmatrix} 0.8 & 0.2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.8 & 0.2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad r_\pi = \begin{pmatrix} 10 \\ 8 \\ -3 \\ -5 \\ -9 \end{pmatrix}$$

e infine

$$v := \begin{pmatrix} 44.0176 \\ 36.5396 \\ 32.2141 \\ 30.2141 \\ 26.2141 \end{pmatrix} \quad T(v) = \begin{pmatrix} 44.0176 \\ 36.5396 \\ 32.2141 \\ 30.2141 \\ 26.2141 \end{pmatrix} \quad \pi := \Pi(v) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

ottenendo il punto fisso. Come si vede la politica $(1, 1, 2, 2, 2)$ è effettivamente ottima e si vede anche la distanza dell'iterazione precedente dal valore ottimo. ■

Infine si può affrontare il problema tramite la programmazione lineare. Infatti l'equazione ricorsiva

$$v = \sup_{\pi} r_\pi + \lambda P_\pi v$$

può essere risolta trovando il minimo del seguente problema:

$$\begin{aligned} \min \quad & \sum_j \alpha(j) v(j) \\ & v(i) \geq r(i, d) + \lambda \sum_j P(i, j, d) v(j) \quad \forall i, d \end{aligned} \quad (41)$$

dove i coefficienti $\alpha_j > 0$ sono arbitrari. Il duale di (41) è

$$\begin{aligned} \max \quad & \sum_{i,d} r(i, d) x(i, d) \\ & \sum_d x(j, d) - \lambda \sum_{i,d} P(i, j, d) x(i, d) = \alpha(j) \quad \forall j \\ & x(i, d) \geq 0 \end{aligned} \quad (42)$$

che è più conveniente da calcolare perché il numero di righe di (42) è minore di (41). Sommando le righe di (42) (e sfruttando il fatto che $\sum_j P(i, j, d) = 1$) si ottiene

$$(1 - \lambda) \sum_{i,d} x(i, d) = \sum_j \alpha(j) \quad (43)$$

Risolviendo (42) si ottiene il risultato che per ogni stato i solo uno dei valori $x(i, d)$ è diverso da 0 e corrisponde alla decisione ottima da prendere nello stato i .

Se si impone $\sum_j \alpha(j) = 1$, l'obiettivo $\sum_j \alpha(j) v(j)$ in (41) può essere interpretato come media pesata del guadagno scontato rispetto ad una distribuzione iniziale sugli stati $\alpha(j)$. Si ponga $y(i, d) := (1 - \lambda) x(i, d)$. Allora, in base a (43), le variabili y possono essere interpretate come probabilità. In particolare la variabile $y(i, d)$ rappresenta la probabilità di essere nello stato i e di prendere la decisione d . Infatti l'obiettivo di (42) diventa

$$\sum_{i,d} r(i, d) x(i, d) = \frac{1}{1 - \lambda} \sum_{i,d} r(i, d) y(i, d) = \sum_{i,d} (1 + \lambda + \lambda^2 + \lambda^3 + \dots) r(i, d) y(i, d)$$

Il vincolo

$$\sum_d x(j, d) - \lambda \sum_{i,d} P(i, j, d) x(i, d) = \alpha(j) \implies \sum_d y(j, d) = (1 - \lambda) \alpha(j) + \sum_{i,d} \lambda P(i, j, d) y(i, d) \quad (44)$$

può essere interpretato come il bilanciamento delle transizioni di probabilità fra gli stati del processo più uno stato aggiuntivo $*$, nel seguente modo: le probabilità di transizione da i a j sono modificate in $\lambda P(i, j, d)$; da ogni stato i vi è una transizione verso $*$ con probabilità $1 - \lambda$ (così la somma delle probabilità di transizione dallo stato i rimane 1); dallo stato $*$ allo stato i vi è una transizione con probabilità $\alpha(i)$. In questo modo i valori $y(i, d)$, che sugli stati originari (senza lo stato $*$) rappresentano probabilità, sui nuovi stati rappresentano probabilità condizionate rispetto al fatto di non essere nello stato $*$. Le probabilità non condizionate sui nuovi stati sono allora $z(i, d) := y(i, d) (1 - p_*)$ dove p_* è la probabilità stazionaria dello stato $*$. A questo punto (44) diventa

$$\sum_d z(j, d) = (1 - p_*) (1 - \lambda) \alpha(j) + \sum_{i,d} \lambda P(i, j, d) z(i, d)$$

da cui $p_* = (1 - p_*) (1 - \lambda)$ cioè $p_* = (1 - \lambda) / (2 - \lambda)$.

Esempio 22: Si consideri il processo con due stati 1 e 2 e matrice di transizione e vettore di guadagni

$$P = \begin{pmatrix} 0.3 & 0.7 \\ 0.6 & 0.4 \end{pmatrix}, \quad r = (-1, 2)$$

Con $\lambda = 0.8$ il vettore di guadagni (calcolato da $(I - \lambda P) v = r$) è $v = (1.77419, 4.19355)$ e, assumendo $\alpha = (0.7, 0.3)$ si ha $\sum_j \alpha(j) v(j) = 2.5$. Il processo esteso con il nuovo stato $*$ ($=3$) ha matrice di transizione

$$\begin{pmatrix} 0.24 & 0.56 & 0.2 \\ 0.48 & 0.32 & 0.2 \\ 0.7 & 0.3 & 0 \end{pmatrix}$$

la cui probabilità stazionaria è $p = (0.416667, 0.416667, 0.166667)$. Come previsto $p_3 = (1 - \lambda) / (2 - \lambda)$. Questi valori si riferiscono alle variabili z . Le variabili y si ottengono dividendo per $1 - p_3$ e quindi $y_1 = y_2 = 0.5$. A questo punto $x = y / (1 - \lambda)$ e cioè $x = (2.5, 2.5)$ e $\sum_j x_j r_j = 2.5$. ■

3.4 Orizzonte infinito - caso medio

Un altro modo di valutare una politica quando (27) è illimitata consiste nel valutare il guadagno medio cioè

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{t=0}^{n-1} E[r(X_t(\pi), d_\pi(X_t(\pi)))] \quad (45)$$

Per valutare (45) per un'assegnata politica π si indichi

$$v_\pi(i, n) := \sum_{t=0}^{n-1} E[r(X_t(\pi), d_\pi(X_t(\pi))) \mid X_0 = i]$$

quindi, indicando $Q := P_\pi - \mathbf{1} p_\pi$, $H_\infty := \sum_{t \geq 0} Q^t - \mathbf{1} p_\pi = (I - Q)^{-1} - \mathbf{1} p_\pi$, e $R_n := \sum_{t \geq n} Q^t$, si ha

$$\begin{aligned} v_\pi(n) &= \sum_{t=0}^{n-1} P_\pi^t r_\pi = \sum_{t=0}^{n-1} (\mathbf{1} p_\pi + Q_\pi^t) r_\pi - \mathbf{1} p_\pi r_\pi = n \mathbf{1} p_\pi r_\pi + \left(\sum_{t=0}^{n-1} Q_\pi^t - \sum_{t \geq n} Q_\pi^t \right) r_\pi - \mathbf{1} p_\pi r_\pi = \\ &= n \mathbf{1} p_\pi r_\pi + (H_\infty - R_n) r_\pi = n g_\pi \mathbf{1} + h_\pi - R_n r_\pi \end{aligned} \quad (46)$$

dove

$$g_\pi := p_\pi r_\pi \quad \text{e} \quad h_\pi := H_\infty r_\pi \quad (47)$$

Quindi il guadagno medio è dato da

$$\lim_{n \rightarrow \infty} g_\pi \mathbf{1} + \frac{h_\pi - R_n r_\pi}{n} = g_\pi \mathbf{1}$$

Pertanto, a partire da qualsiasi stato (sotto l'ipotesi di esistenza di una probabilità limite p_π), il guadagno medio ha il medesimo valore $g_\pi = p_\pi r_\pi$, come del resto indicato dal Teorema 11. Come si vede da (46), $v_\pi(n)$ è formato da tre termini. Il primo cresce linearmente con n e contribuisce al guadagno medio. Il secondo termine rimane costante al crescere di n e rappresenta lo scarto del valore accumulato $v_\pi(n)$ rispetto alla crescita dovuta al valor medio; tale valore riflette la differenza dovuta alle condizioni iniziali. Infine il terzo termine tende a 0 al crescere di n e pertanto diventa trascurabile anche considerando il valore accumulato.

Per calcolare g_π e h_π , anziché usare le espressioni (47) che richiederebbero il calcolo di p_π e di H_∞ , conviene procedere come segue. Da $v_\pi(n+1) = r_\pi + P_\pi v_\pi(n)$ e (46) si ha

$$(n+1) \mathbf{1} g_\pi + h_\pi - R_{n+1} r_\pi = r_\pi + P_\pi (n g_\pi \mathbf{1} + h_\pi - R_n r_\pi)$$

da cui, tramite le relazioni $P_\pi \mathbf{1} = \mathbf{1}$ e $R_{n+1} = P_\pi R_n$, si ottiene

$$g_\pi \mathbf{1} = r_\pi + P_\pi h_\pi - h_\pi$$

ovvero

$$(I - P_\pi) h_\pi = r_\pi - g_\pi \mathbf{1} \quad (48)$$

Siccome $(I - P_\pi)$ è singolare il valore di h_π che si calcola dal sistema lineare (48) è determinato a meno di una costante additiva (ovvero se \bar{h} è una soluzione di (48) anche $\bar{h} + \alpha \mathbf{1}$ lo è per ogni α). Quindi si può imporre ad un valore arbitrario una qualsiasi componente di h_π , ad esempio $h_\pi(1) := 0$, e risolvere (48) nelle variabili $g_\pi, h_\pi(2), \dots, h_\pi(n)$. Il fatto che h_π si riesca a calcolare a meno di una costante additiva non pregiudica il calcolo delle politiche ottime, come si vedrà fra poco.

Si indichi con $V(\pi)$ l'operatore che, data una politica π , fornisce i valori (g_π, h_π) soluzione di (48) con $h_\pi(1) := 0$.

Per il calcolo della politica ottima si fa uso dell'operatore

$$T(h) := \sup_{\pi} r_\pi + P_\pi h$$

(è diverso da quello adottato nei processi con sconto in quanto manca il fattore di sconto λ) per il quale valgono i seguenti risultati:

Lemma 20: Siano $g \in \mathbb{R}$ e $h \in \mathbb{R}^n$ tali che $g \mathbf{1} + h \geq T(h)$. Allora $g \geq g_\pi$ per ogni politica π .

Dimostrazione: Sia π una politica arbitraria. Allora per ipotesi $g \mathbf{1} + h \geq r_\pi + P_\pi h$, cioè

$$\begin{aligned} h \geq r_\pi + P_\pi h - g \mathbf{1} &\quad \implies \quad h \geq r_\pi + P_\pi (r_\pi + P_\pi h - g \mathbf{1}) - g \mathbf{1} \\ &= r_\pi + P_\pi r_\pi + P_\pi^2 h - 2g \mathbf{1} \geq r_\pi + P_\pi r_\pi + P_\pi^2 (r_\pi + P_\pi h - g \mathbf{1}) - 2g \mathbf{1} \end{aligned}$$

da cui

$$h \geq v_\pi(n) + P_\pi^n h - n g \mathbf{1}$$

cioè

$$g \mathbf{1} \geq \frac{v_\pi(n)}{n} + \frac{P_\pi^n h - h}{n}$$

da cui, per $n \rightarrow \infty$, $g \mathbf{1} \geq g_\pi \mathbf{1}$, cioè $g \geq g_\pi$. ■

Lemma 21: Siano $g \in \mathbb{R}$ e $h \in \mathbb{R}^n$ tali che $g \mathbf{1} + h \leq T(h)$. Allora esiste una politica $\hat{\pi}$ tale che $g \leq g_{\hat{\pi}}$.

Dimostrazione: Sia $\hat{\pi}$ tale che $T(h) = r_{\hat{\pi}} + P_{\hat{\pi}} h$. Allora per ipotesi $g \mathbf{1} + h \leq r_{\hat{\pi}} + P_{\hat{\pi}} h$, cioè

$$h \leq r_{\hat{\pi}} + P_{\hat{\pi}} h - g \mathbf{1} \quad \implies \quad h \leq r_{\hat{\pi}} + P_{\hat{\pi}} (r_{\hat{\pi}} + P_{\hat{\pi}} h - g \mathbf{1}) - g \mathbf{1}$$

da cui, procedendo come nel Lemma precedente si ottiene $g \leq g_{\hat{\pi}}$. ■

Combinando i due lemmi si ottiene

Teorema 22: Siano $g \in \mathbb{R}$ e $h \in \mathbb{R}^n$ tali che $g \mathbf{1} + h = T(h)$. Allora la politica $\hat{\pi} := \operatorname{argmax}_\pi T(h)$ è ottima e g è il valore medio ottimo. ■

Per calcolare la politica ottima si può ricorrere alla seguente iterazione sulle politiche a partire da una politica arbitraria iniziale π^0

$$\begin{aligned} (g, h)^k &:= V(\pi^k) \\ \pi^{k+1} &:= \operatorname{argmax}_\pi T(h^k) \end{aligned}$$

finché $\pi^{k+1} = \pi^k$.

Esempio 23: Nell'esempio 13, partendo dalla politica iniziale $\pi = (1, 1, 1, 1, 1)$ si determina

$$P_\pi = \begin{pmatrix} 0.8 & 0.2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.8 & 0.2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.8 & 0.2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.8 & 0.2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad r_\pi = \begin{pmatrix} 10 \\ 8 \\ 5 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Risolviendo il sistema lineare (48) si ottengono i seguenti valori di g_π e h_π , al quale si applica l'operatore T ottenendo i valori indicati:

$$g = 1, \quad h = \begin{pmatrix} 0 \\ -45 \\ -80 \\ -100 \\ -105 \end{pmatrix} \quad T(h) = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -3 \\ -5 \\ -9 \end{pmatrix} \quad \pi := \operatorname{argmax}_\pi T(h) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

da cui

$$P_\pi = \begin{pmatrix} 0.8 & 0.2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad r_\pi = \begin{pmatrix} 10 \\ -2 \\ -3 \\ -5 \\ -9 \end{pmatrix}$$

Ripetendo le operazioni si ottiene

$$g = 8, \quad h = \begin{pmatrix} 0 \\ -10 \\ -11 \\ -13 \\ -17 \end{pmatrix} \quad T(h) = \begin{pmatrix} 8 \\ -2 \\ -3 \\ -5 \\ -9 \end{pmatrix} \quad \pi := \underset{\pi}{\operatorname{argmax}} T(h) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

ottenendo il punto fisso.

Qui sotto sono riportati i valori totali di guadagno di 100 simulazioni con 100 transizioni ciascuna, adottando la politica ottima a partire dallo stato 1.

$$\begin{pmatrix} 832 & 760 & 760 & 808 & 820 & 796 & 796 & 832 & 820 & 832 & 844 & 784 & 808 & 772 & 796 & 844 & 784 & 784 & 772 & 796 \\ 796 & 880 & 736 & 856 & 784 & 868 & 832 & 844 & 748 & 808 & 712 & 736 & 784 & 736 & 808 & 844 & 832 & 808 & 784 & 784 \\ 760 & 724 & 748 & 796 & 820 & 748 & 856 & 772 & 880 & 808 & 784 & 832 & 808 & 772 & 712 & 820 & 820 & 832 & 772 & 784 \\ 808 & 784 & 832 & 760 & 760 & 796 & 832 & 844 & 844 & 832 & 820 & 784 & 904 & 748 & 772 & 808 & 784 & 784 & 808 & 820 \\ 820 & 760 & 784 & 796 & 844 & 808 & 784 & 772 & 772 & 760 & 844 & 820 & 784 & 760 & 820 & 772 & 844 & 844 & 844 & 784 \end{pmatrix}$$

Il valor medio delle simulazioni è 800.08 e quindi il guadagno medio è 8.0008, molto vicino all'ottimo teorico.

Calcolando l'ottimo scontato con fattore $\lambda = 0.8$ si era trovata la politica ottima (1, 1, 2, 2, 2). Rifacendo i calcoli con un valore di λ superiore a 0.9 si sarebbe trovata la stessa politica ottima del guadagno medio. Si può in generale dimostrare che al tendere di λ a 1 la politica ottima scontata coincide con quella del guadagno medio. Simulando la politica (1, 1, 2, 2, 2) si ottengono i seguenti valori:

$$\begin{pmatrix} 789 & 808 & 778 & 817 & 801 & 794 & 775 & 841 & 828 & 857 & 755 & 761 & 806 & 828 & 738 & 820 & 781 & 770 & 778 & 815 \\ 778 & 802 & 816 & 795 & 752 & 834 & 840 & 806 & 745 & 731 & 760 & 773 & 829 & 860 & 822 & 773 & 786 & 824 & 792 & 768 \\ 773 & 779 & 828 & 777 & 791 & 796 & 775 & 732 & 759 & 840 & 818 & 808 & 717 & 791 & 762 & 870 & 792 & 780 & 819 & 789 \\ 752 & 793 & 774 & 806 & 754 & 761 & 773 & 779 & 797 & 774 & 803 & 843 & 810 & 798 & 784 & 801 & 807 & 791 & 774 & 833 \\ 788 & 802 & 766 & 791 & 797 & 829 & 847 & 807 & 831 & 842 & 840 & 822 & 832 & 806 & 727 & 808 & 751 & 784 & 818 & 772 \end{pmatrix}$$

con valor medio 7.9489 mentre il valore teorico di tale politica è 7.90909. ■

Esempio 24: Si consideri la seguente variante del gioco del 7 e mezzo: si usa un mazzo di 40 carte, dove ogni carta vale quanto i suoi punti e le figure valgono rispettivamente 8, 9 e 10; si pesca una carta alla volta dal mazzo e se la somma dei punti in mano supera 7 si perde e si ricomincia daccapo (con un mazzo intero e rimescolato), altrimenti si può decidere di non pescare e intascare un valore pari ai punti in mano oppure di pescare ancora (senza guadagnare nulla). Se si decide di non pescare si ricomincia il gioco. Si immagini di eseguire il gioco continuamente. Si vuole calcolare la politica che massimizza il guadagno medio atteso (guadagno medio rispetto al numero di carte pescate).

Per modellare il problema come un processo markoviano dobbiamo identificare gli stati. Questi sono dati dalle carte in mano (senza tener conto dell'ordine), incluso lo stato nullo che corrisponde alla situazione di inizio gioco (nessuna carta in mano). Questo è l'elenco dei 41 stati che risultano:

$\{\}, \{1\}, \{2\}, \{1, 1\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 1, 1\}, \{4\}, \{1, 3\}, \{2, 2\}, \{1, 1, 2\}, \{1, 1, 1, 1\}$
 $\{5\}, \{1, 4\}, \{2, 3\}, \{1, 1, 3\}, \{1, 2, 2\}, \{1, 1, 1, 2\}, \{6\}, \{1, 5\}, \{2, 4\}, \{3, 3\}, \{1, 2, 3\}$
 $\{1, 1, 4\}, \{2, 2, 2\}, \{1, 1, 1, 3\}, \{1, 1, 2, 2\}, \{1, 1, 1, 1, 2\}, \{7\}, \{1, 6\}, \{2, 5\}, \{3, 4\}, \{1, 2, 4\}$
 $\{1, 1, 5\}, \{1, 3, 3\}, \{2, 2, 3\}, \{1, 1, 1, 4\}, \{1, 1, 2, 3\}, \{1, 2, 2, 2\}, \{1, 1, 1, 1, 3\}, \{1, 1, 1, 2, 2\}$

Nella pagina seguente è riportata la matrice delle transizioni se si decide di pescare una carta. Se si decide di intascare e di riprendere il gioco la matrice di transizione ha tutte le righe uguali alla prima riga della precedente matrice. Per il calcolo della politica ottima si parte dalla politica di non pescare mai alcuna carta. Ovviamente il guadagno medio g_π è nullo e anche h_π è nullo. Applicando l'operatore T si ottiene la politica di pescare una carta solo nello stato iniziale e altrimenti rinunciare sempre. Il guadagno medio di questa politica è $14/5$. Applicando nuovamente l'operatore si ottiene la medesima politica che quindi risulta ottima. ■

La programmazione lineare può essere usata efficacemente anche per risolvere il guadagno medio. In questo caso si può partire direttamente dall'interpretazione di $x(i, d)$ come la probabilità di essere nello stato i e di assumere la decisione d . Quindi il guadagno medio è $\sum_{i,d} x(i, d) r(i, d)$. Bisogna quindi vincolare x alle probabilità di transizione. Quindi si ha:

$$\begin{aligned}
\max \quad & \sum_i \sum_d r(i, d) x(i, d) \\
& \sum_i \sum_d x(i, d) = 1 \\
& \sum_i \sum_d p(i, j, d) x(i, d) = \sum_d x(j, d) \quad \forall j \\
& x(i, d) \geq 0
\end{aligned} \tag{49}$$

Il duale di (49) è

$$\begin{aligned}
\min \quad & g \\
& g \geq r(i, d) + \sum_j p(i, j, d) h(j) - h(i) \quad \forall d, i
\end{aligned}$$

che corrisponde esattamente a

$$g + h = \sup_{\pi} r_{\pi} + P_{\pi} h$$

Risolvendo (49) si ottiene che, per ogni stato i , solo uno fra i valori $x(i, d)$ è maggiore di zero, identificando quindi la decisione ottima per ogni stato. La formulazione (49) permette di introdurre vincoli aggiuntivi sugli stati, che la formulazione come programmazione dinamica non permetterebbe. Questa possibilità tuttavia introduce la randomizzazione per una politica ottima.

Esempio 25: Si riconsideri l'Esempio 15. Risolvendo (49) si ottiene un guadagno medio ottimo pari a 17.538 con probabilità

$$\begin{aligned}
x(0, 6) &= 0.35530 & x(1, 5) &= 0.17554 & x(2, 4) &= 0.19545 \\
x(3, 3) &= 0.16810 & x(4, 2) &= 0.09026 & x(5, 1) &= 0.01533
\end{aligned}$$

Le altre variabili hanno valori inferiori a 10^{-6} e quindi gli errori d'arrotondamento impediscono di riconoscere la decisione ottima per gli stati superiori a 5 (evidentemente si tratta di stati in cui il processo non dovrebbe trovarsi 'quasi mai'). Si immagina ora di volere il più possibile evitare di trovarsi in condizione di magazzino

vuoto. Modelliamo questa esigenza ponendo bassa la probabilità di essere nello stato di magazzino vuoto. Ad esempio possiamo imporre $\sum_d x(0, d) \leq 0.1$. Con l'aggiunta di questo vincolo (49) fornisce $g = 13.425$ con probabilità

$$\begin{array}{lll} x(0, 8) = 0.1000 & x(1, 7) = 0.0031 & x(1, 8) = 0.0702 \\ x(2, 7) = 0.1114 & x(3, 6) = 0.1536 & x(4, 4) = 0.1849 \\ x(5, 4) = 0.1824 & x(6, 2) = 0.1312 & x(7, 1) = 0.0547 \end{array}$$

Nello stato 1 vi sono due possibili decisioni da prendere con probabilità $0.0031/(0.0031 + 0.0702) = 0.043$ e $0.0702/(0.0031 + 0.0702) = 0.957$ e quindi si tratta di una politica randomizzata. Si noti ancora che non si riporta sempre il magazzino al medesimo valore. ■

4. TEORIA DELLE CODE

Nella Teoria delle Code si considerano:

- un flusso di clienti con tempi fra due arrivi successivi definiti da un'unica variabile stocastica Y con distribuzione definita e valor medio $1/\lambda$;
- un insieme di lavori, uno per ogni cliente, la cui durata è definita da una variabile stocastica X con distribuzione definita e valor medio $1/\mu$;
- un insieme di m servitori che eseguono i lavori dei clienti.

La coda d'attesa che si forma se un cliente non trova un servitore libero è regolata da un'opportuna disciplina, ad esempio primo arrivato-primo servito, oppure con priorità statica (ogni cliente ha una sua priorità e nel momento in cui si libera un servitore il cliente con più alta priorità viene servito per primo), oppure con priorità dinamica (come prima ma con priorità crescente con l'attesa), con priorità a prelazione (il cliente a più alta priorità interrompe il lavoro dei clienti a più bassa priorità, che viene ripreso più tardi), ecc.

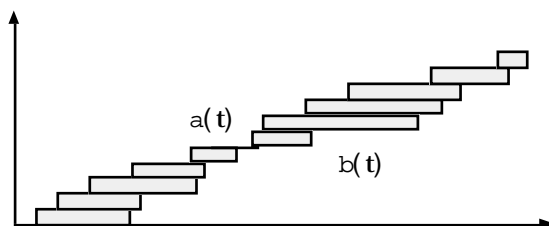
Le quantità che si vogliono calcolare sono principalmente:

- tempo medio T speso dal cliente nel sistema (coda più lavoro) e tempo medio W speso dal cliente in coda. Quindi $T = W + 1/\mu$;
- numero medio N di clienti nel sistema e numero medio N_q di clienti in coda;
- probabilità p_k che in un istante generico vi siano k clienti nel sistema. Quindi $N = \sum_k k p_k$;
- probabilità \hat{p}_k che nell'istante di arrivo di un cliente vi siano k clienti nel sistema (escludendo il cliente in arrivo);
- probabilità \tilde{p}_k che nell'istante di partenza di un cliente vi siano k clienti nel sistema (escludendo il cliente in partenza);
- distribuzione della variabile stocastica \tilde{T} che definisce il tempo di ogni cliente nel sistema.

Un sistema viene classificato a seconda delle ipotesi che si fanno su Y e X e m e tale classificazione viene indicata con i simboli $A/B/m$ dove A e B sono simboli che indicano l'ipotesi fatta sulla variabile Y e X rispettivamente e m è il numero di servitori. Il simbolo M indica che la variabile stocastica è Markoviana (distribuzione esponenziale), D indica che è in realtà deterministica, E_r che è Erlangiana di ordine r e G che è una variabile generale, cioè senza alcuna ipotesi particolare. Quindi $M/M/1$ significa che arrivi e lavori sono distribuiti esponenzialmente e che vi è un solo servitore.

Per ogni sistema vale la seguente legge, nota come *Legge di Little*: $N = \lambda T$, $N_q = \lambda W$. Questa legge si può giustificare in modo intuitivo con il seguente ragionamento: sia $\alpha(t)$ il numero di clienti arrivati al tempo t , sia $\beta(t)$ il numero di clienti usciti dal sistema al tempo t , e $n(t)$ il numero di clienti nel sistema al tempo t . Ovviamente $n(t) = \alpha(t) - \beta(t)$. Allora

$$N = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t n(\tau) d\tau$$

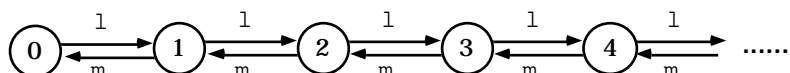


L'integrale di $n(t)$ è l'area indicata in figura che può anche essere calcolata come somma delle aree dei rettangoli. L'area di ogni rettangolo è proprio il tempo nel sistema T_i del cliente i -mo. Per t grande il numero di clienti arrivati entro t è λt e quindi si ha

$$N = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t n(\tau) d\tau = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \sum_{i=1}^{\lambda t} T_i = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\lambda t}{t} \frac{\sum_{i=1}^{\lambda t} T_i}{\lambda t} = \lambda T$$

4.1 M/M/1

Questa coda si può modellare secondo il seguente processo Markoviano



per il quale

$$Q = \begin{pmatrix} -\lambda & \lambda & 0 & 0 & \dots \\ \mu & -\lambda - \mu & \lambda & 0 & \dots \\ 0 & \mu & -\lambda - \mu & \lambda & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}$$

La probabilità stazionaria \bar{p} si trova imponendo l'equilibrio su ogni taglio che separa k da $k+1$, e cioè

$$\bar{p}_k \lambda = \bar{p}_{k+1} \mu \implies \bar{p}_{k+1} = \frac{\lambda}{\mu} \bar{p}_k =: \rho \bar{p}_k$$

dove si è indicato con ρ il rapporto λ/μ , definito come il *carico* del sistema. Allora si ha $\bar{p}_k = \rho^k \bar{p}_0$, che insieme alla condizione $\sum_k \bar{p}_k = 1$ porta a

$$\bar{p}_0 = 1 - \rho, \quad \bar{p}_k = \rho^k (1 - \rho)$$

Come si vede esiste una probabilità limite se e solo se $\rho < 1$. Si calcola facilmente

$$N = \frac{\rho}{1 - \rho}, \quad T = \frac{N}{\lambda} = \frac{1}{\mu - \lambda}$$

N può anche essere calcolato senza conoscere le probabilità \bar{p}_k . Infatti il tempo medio T speso nel sistema è dato da $\sum_{k \geq 1} k \bar{p}_k / \mu + 1/\mu$. Questa formula si giustifica tenendo presente che (come verrà subito dimostrato) \bar{p}_k è anche la probabilità che il cliente in arrivo trovi k clienti nel sistema. Inoltre per la proprietà markoviana il tempo medio residuo del cliente in servizio è comunque $1/\mu$. Quindi il tempo medio di attesa W è dato da $\sum_{k \geq 1} k \bar{p}_k / \mu$. A questo si aggiunge il valor medio del servizio che è $1/\mu$. Allora si vede che $T = N/\mu + 1/\mu$. Applicando la legge di Little si ha $N/\lambda = N/\mu + 1/\mu$ da cui si ottiene il valore di N .

Il valore N_q si può calcolare in vari modi alternativi. Innanzitutto $N_q = \sum_{k \geq 1} \bar{p}_k (k - 1) = \rho N = \rho^2 / (1 - \rho)$. Poi si può ragionare tenendo conto che

$$\int_0^t n_q(\tau) d\tau = \int_0^t n(\tau) d\tau - \rho t$$

Alternativamente si può notare che un osservatore generico trova clienti nel sistema con probabilità ρ . Il valor medio di clienti nel sistema, condizionatamente al fatto che il sistema non è vuoto è N/ρ , e, siccome uno di questi è servito, il numero medio è $N/\rho - 1$, e siccome questo valore si osserva con probabilità ρ , si ha $N_q = \rho(N/\rho - 1) = N - \rho = \rho N$. Infine si può sfruttare la legge di Little da $W = T - 1/\mu = \rho T$, $N_q = \lambda W$, $N = \lambda T$ e $N/N_q = T/W$.

Per il calcolo delle probabilità \hat{p}_k (probabilità di k clienti nel sistema nell'istante di arrivo di un cliente) si ragiona come segue (sia τ l'istante di arrivo):

$$\hat{p}_k = \lim_{\delta \rightarrow 0} \Pr \{n(t) = k \mid t \leq \tau \leq t + \delta\} = \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\Pr \{n(t) = k, t \leq \tau \leq t + \delta\}}{\Pr \{t \leq \tau \leq t + \delta\}}$$

Applicando le regole delle probabilità condizionate:

$$\frac{\Pr \{n(t) = k, t \leq \tau \leq t + \delta\}}{\Pr \{t \leq \tau \leq t + \delta\}} = \frac{\Pr \{t \leq \tau \leq t + \delta \mid n(t) = k\} \Pr \{n(t) = k\}}{\Pr \{t \leq \tau \leq t + \delta\}}$$

Essendo gli arrivi markoviani la probabilità che $t \leq \tau \leq t + \delta$ non dipende dall'istante del precedente arrivo ed è quindi indipendente da $n(t)$. Allora $\Pr \{t \leq \tau \leq t + \delta \mid n(t) = k\} = \Pr \{t \leq \tau \leq t + \delta\}$ e quindi $\hat{p}_k = \Pr \{n(t) = k\} = \bar{p}_k$.

Per il calcolo delle probabilità \tilde{p}_k (probabilità di k clienti nel sistema nell'istante di partenza di un cliente) si ragiona in modo analogo (sia τ l'istante di partenza):

$$\tilde{p}_k = \lim_{\delta \rightarrow 0} \Pr \{n(t) = k \mid t - \delta \leq \tau \leq t\} = \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\Pr \{n(t) = k, t - \delta \leq \tau \leq t\}}{\Pr \{t - \delta \leq \tau \leq t\}}$$

$$\frac{\Pr \{n(t) = k, t - \delta \leq \tau \leq t\}}{\Pr \{t - \delta \leq \tau \leq t\}} = \frac{\Pr \{t - \delta \leq \tau \leq t \mid n(t) = k\} \Pr \{n(t) = k\}}{\Pr \{t - \delta \leq \tau \leq t\}}$$

Essendo i lavori markoviani la probabilità che $t - \delta \leq \tau \leq t$ non dipende dall'istante di inizio del lavoro del cliente che sta per lasciare il sistema ed è quindi indipendente da $n(t)$. Allora $\Pr \{t - \delta \leq \tau \leq t \mid n(t) = k\} = \Pr \{t - \delta \leq \tau \leq t\}$ e quindi $\tilde{p}_k = \Pr \{n(t) = k\} = \bar{p}_k$.

La variabile stocastica \tilde{T} ha distribuzione che si può calcolare tenendo conto delle probabilità \hat{p}_k . Se nel sistema vi sono k clienti, il tempo di attesa del cliente in arrivo ha la distribuzione data dalla somma di $k + 1$ lavori markoviani con la stessa media $1/\mu$. Infatti, per l'ipotesi di servizi markoviani, è come se il cliente che viene servito mentre l'ultimo cliente arriva, cominciasse nell'istante di arrivo. Allora

$$\Pr \{t \leq \tilde{T} \leq t + dt\} = \sum_{k \geq 0} \hat{p}_k \Pr \{t \leq \tilde{T} \leq t + dt \mid k \text{ clienti nel sistema}\} =$$

$$\sum_{k \geq 0} \rho^k (1 - \rho) \frac{\mu^{k+1} t^k}{k!} e^{-\mu t} = \mu (1 - \rho) e^{-\mu t} \sum_{k \geq 0} \frac{\lambda^k t^k}{k!} = (\lambda - \mu) e^{(\lambda - \mu)t}$$

Si tratta quindi di una distribuzione esponenziale. Anche gli intervalli di tempo fra due uscite successive dal sistema sono distribuite esponenzialmente. Ovviamente sono variabili stocastiche con valor medio $1/\lambda$ (tanti arrivano nel sistema e altrettanti se ne vanno). Per dimostrare che sono variabili markoviane si tenga conto che, se vi sono clienti nel sistema, gli intervalli fra le uscite sono l'esatta replica dei servizi, mentre, se il sistema è vuoto, bisogna aspettare un arrivo e poi il servizio corrispondente. In questo secondo caso la densità è data dalla convoluzione fra $\lambda e^{-\lambda t}$ e $\mu e^{-\mu t}$ cioè

$$\int_0^t \lambda e^{-\lambda(t-\tau)} \mu e^{-\mu\tau} d\tau dt = \lambda \mu \frac{e^{-\lambda t} - e^{-\mu t}}{\mu - \lambda} dt$$

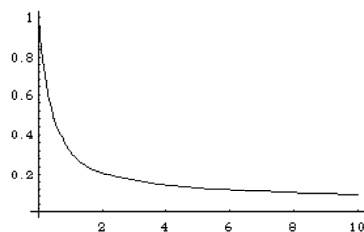
e quindi, indicando con Z la variabile aleatoria corrispondente all'intervallo fra due uscite successive, si ha:

$$\Pr \{t \leq Z \leq t + dt\} = \Pr \{\text{sistema vuoto}\} \lambda \mu \frac{e^{-\lambda t} - e^{-\mu t}}{\mu - \lambda} dt + \Pr \{\text{sistema non vuoto}\} \mu e^{-\mu t} dt =$$

$$(1 - \rho) \lambda \mu \frac{e^{-\lambda t} - e^{-\mu t}}{\mu - \lambda} dt + \rho \mu e^{-\mu t} dt = \lambda e^{-\lambda t} dt$$

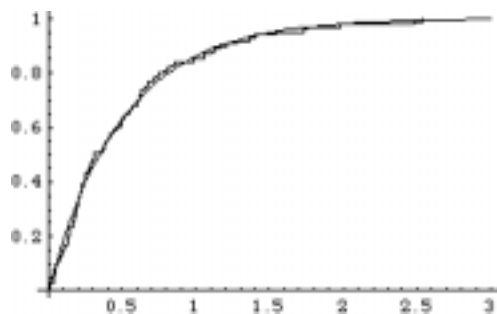
Quindi le uscite sono una replica stocastica degli ingressi!

Esempio 26: Sia dato un sistema di coda in cui la durata media di ogni servizio è di un minuto e arrivano mediamente 9 clienti ogni 10 minuti. Quindi $\lambda = 0.9$ e $\mu = 1$. Si calcola facilmente $\rho = 0.9$, $N = 9$, $T = 10$ (minuti). Le probabilità stazionarie sono: $\bar{p}_9 = 0.1$, $\bar{p}_1 = 0.09$, ecc. Se questi valori vengono calcolati numericamente a partire da un insieme finito di stati, ad esempio 30 stati, si ottengono valori affetti da errore, e cioè $\bar{p}_9 = 0.104427$, $\bar{p}_1 = 0.0939841$, ecc. L'aumento di circa il 4% di probabilità è dovuto alla mancanza degli stati da 31 ad infinito. Usando questi dati e calcolando il transitorio si ottiene, supponendo che il sistema si trovi con 19 clienti, il seguente andamento di $P(t)(19, 19)$. Come si vede, nel giro di qualche minuto si riottiene la probabilità di regime.

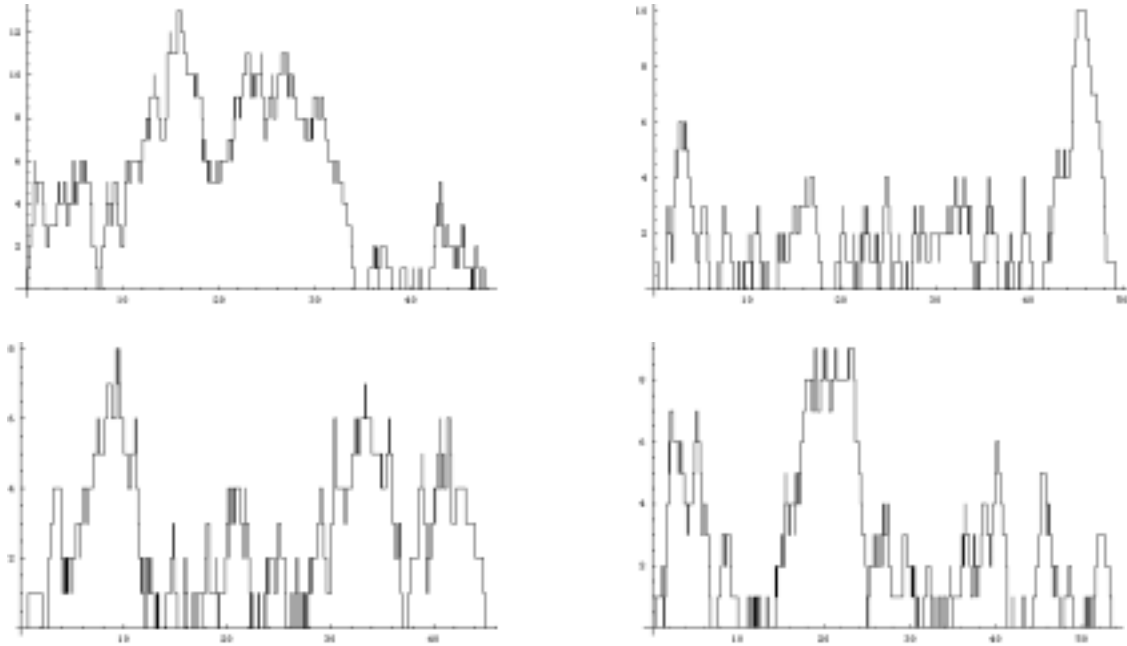


■

Esempio 27: In questo esempio si vuole simulare una coda $M/M/1$. È facile simulare una variabile di Poisson. Infatti, in generale, data una distribuzione $F(t)$ e data una variabile aleatoria r distribuita uniformemente fra 0 e 1, la variabile aleatoria $t = F^{-1}(r)$ ha distribuzione $F(t)$. Quindi la variabile $t = -\ln r/\lambda$ è una variabile di Poisson (r e $1-r$ hanno la medesima distribuzione). Ad esempio si confronti la distribuzione sperimentale di 100 variabili generate in questo modo e la distribuzione teorica.



In questo modo si generino 100 intertempi con parametro $\lambda = 2$ e 100 servizi con parametro $\mu = 2.5$. I quattro diagrammi dell'andamento nel tempo delle code sono raffigurati nelle figure. I rispettivi valori sperimentali di N sono 5.03449, 4.88198, 2.61719, 2.68242, mentre il valore teorico è 4.



Esercizio 4: Si consideri una coda $M/M/1$ e si ricavi la matrice di transizione della catena relativa agli istanti di arrivo di un cliente e si verifichi che la probabilità stazionaria della catena nello stato k (stato che corrisponde all'arrivo di un cliente quando nel sistema vi sono $k - 1$ clienti) è la medesima del processo nello stato $k - 1$ (probabilità generica che vi siano $k - 1$ clienti nel sistema e cioè $\rho^{k-1}(1 - \rho)$). Suggerimento: la catena immersa (cioè quella relativa a tutte le transizioni e non soltanto a quelle in salita) ha probabilità di transizione $\lambda/(\lambda + \mu)$ verso l'alto e $\mu/(\lambda + \mu)$ verso il basso (attenzione allo stato 0!). Si indichi $\alpha := \mu/(\lambda + \mu)$ e si ragioni sulle transizioni "visibili" dalla catena del processo campionato agli arrivi (di nuovo attenzione allo stato 0!).

Soluzione

Siccome si vuole campionare il processo solo agli istanti di arrivo, tutte le transizioni verso stati più bassi sono "invisibili" e solo le transizioni da uno stato a quello successivo sono visibili. Quindi lo stato 0 è invisibile per la catena (non ci si può mai arrivare dal basso). Trovandosi il processo in un generico stato i , il processo può: operare una transizione verso $i + 1$ (che viene vista dalla catena), oppure una transizione verso $i - 1$ (invisibile) e successivamente una verso i (visibile), oppure una verso $i - 1$ ed un'altra verso $i - 2$ (entrambe invisibili) seguite da una verso $i - 1$ (visibile), eccetera.

Siccome la probabilità di una transizione verso il basso è $\mu/(\lambda + \mu) =: \alpha$ e quella verso l'alto è $\lambda/(\lambda + \mu) = 1 - \alpha$ (tranne che per lo stato 0 dove vale 1), si ha $P(i, i + 1) = 1 - \alpha$, $P(i, i) = \alpha(1 - \alpha)$, $P(i, i - 1) = \alpha^2(1 - \alpha)$, ecc. Abbiamo allora

$$P(i, j) = \begin{cases} 0 & \text{se } j > i + 1 \\ \alpha^i & \text{se } j = 1 \\ \alpha^{i-j+1}(1 - \alpha) & \text{se } 1 < j \leq i + 1 \end{cases}$$

Verifichiamo che $\sum_{j \geq 1} P(i, j) = 1$.

$$\sum_{j \geq 1} P(i, j) = \alpha^i + \sum_{j \geq 2} \alpha^{i-j+1}(1 - \alpha) = \alpha^i + (1 - \alpha) \sum_{k=0}^{i-1} \alpha^k = \alpha^i + (1 - \alpha) \frac{1 - \alpha^i}{1 - \alpha} = 1$$

La probabilità stazionaria \bar{q} deve soddisfare $\bar{q} = \bar{q}P$ e quindi

$$\bar{q}_j = \sum_{i \geq 1} \bar{q}_i P(i, j) = \sum_{i \geq j-1} \bar{q}_i \alpha^{i-j+1} (1 - \alpha), \quad j > 1$$

$$\bar{q}_1 = \sum_{i \geq 1} \bar{q}_i P(i, 1) = \sum_{i \geq 1} \bar{q}_i \alpha^i,$$

Verifichiamo che $\bar{q}_i = \rho^{i-1} (1 - \rho)$. Siccome $\rho := \lambda/\mu$ e $\alpha := \mu/(\lambda + \mu)$, $\alpha = 1/(1 + \rho)$ e quindi:

$$\begin{aligned} \sum_{i \geq j-1} \bar{q}_i \alpha^{i-j+1} (1 - \alpha) &= \sum_{i \geq j-1} \rho^{i-1} (1 - \rho) \frac{\rho}{(1 + \rho)^{i-j+2}} = \sum_{i \geq j-1} \frac{\rho^i}{(1 + \rho)^{i-j+1}} = \\ &= \rho^{j-1} \sum_{i \geq j-1} \frac{\rho^{i-j+1}}{(1 + \rho)^{i-j+1}} = \rho^{j-1} \sum_{k \geq 0} \frac{\rho^k}{(1 + \rho)^k} = \rho^{j-1} \frac{1}{1 - \frac{\rho}{1 + \rho}} = \rho^{j-1} (1 - \rho) = \bar{q}_j \end{aligned}$$

e analogamente si verifica per $j = 1$. ■

Esercizio 5: Si consideri un processo markoviano con stati $0, 1, \dots, n$ e transizioni $k \rightarrow k + 1$ di frequenza λ_k e $k \rightarrow k - 1$ di frequenza μ_k . Si ricavi la matrice di transizione della catena che si ottiene campionando il processo agli istanti di transizione verso l'alto soltanto (si ragiona come nel caso precedente). Si calcoli la probabilità stazionaria della catena per il caso particolare $\lambda_k = \mu_k = 1$. È la medesima del processo?

Soluzione

Come nel caso precedente lo stato 0 è invisibile per la catena. Per ogni stato k , $k \neq 0$ e $k \neq n$, le probabilità di transizione per la catena immersa sono verso il basso $\mu_k/(\lambda_k + \mu_k) =: \alpha_k$ e verso l'alto è $\lambda_k/(\lambda_k + \mu_k) = 1 - \alpha_k$ (allora $\alpha_n = 1$ e $\alpha_0 = 0$). Con gli stessi ragionamenti del caso precedente si ha:

$$P(i, j) = \begin{cases} 0 & \text{se } j > i + 1 \\ \prod_{k=j}^i \alpha_k (1 - \alpha_{j-1}) & \text{se } j \leq i + 1 \end{cases}$$

dove per convenzione $\prod_{k=j}^i \alpha_k = 1$ se $i < j$. Verifichiamo che $\sum_{j \geq 1} P(i, j) = 1$.

$$\begin{aligned} \sum_{j \geq 1} P(i, j) &= \sum_{j=1}^{i+1} \prod_{k=j}^i \alpha_k (1 - \alpha_{j-1}) = \sum_{j=1}^{i+1} (1 - \alpha_{j-1}) \prod_{k=j}^i \alpha_k = \sum_{j=1}^{i+1} \prod_{k=j}^i \alpha_k - \sum_{j=1}^{i+1} \prod_{k=j-1}^i \alpha_k = \\ &= \sum_{j=1}^{i+1} \prod_{k=j}^i \alpha_k - \sum_{j=0}^i \prod_{k=j}^i \alpha_k = \prod_{k=i+1}^i \alpha_k - \prod_{k=0}^i \alpha_k = 1 - 0 = 1 \end{aligned}$$

Se $\lambda_k = \mu_k = 1$ si ha $\alpha_k = 1/2$ (però $\alpha_0 = 0$ e $\alpha_n = 1$) e quindi

$$P(i, j) = \begin{cases} 0 & \text{se } j > i + 1 \\ (1/2)^i & \text{se } j = 1, i < n \\ (1/2)^{n-1} & \text{se } j = 1, i = n \\ (1/2)^{i-j+2} & \text{se } 1 < j \leq i + 1, i < n \\ (1/2)^{n-j+1} & \text{se } 1 < j, i = n \end{cases}$$

Ad esempio per $n = 5$

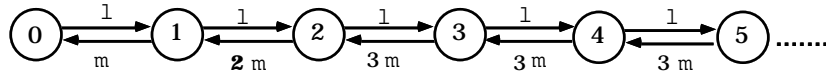
$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{8} & \frac{1}{8} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{16} & \frac{1}{16} & \frac{1}{8} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{16} & \frac{1}{16} & \frac{1}{8} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Come si vede facilmente invertendo l'ordine delle righe si ottiene una matrice simmetrica e quindi la probabilità stazionaria è costante. È immediato vedere che è la stessa del processo. ■

4.2 $M/M/m$

Si è visto che n sorgenti esponenziali con frequenze μ_i mescolate assieme sono equivalenti ad un'unica sorgente esponenziale di frequenza $\sum_i \mu_i$.

Quindi se k servitori sono contemporaneamente attivi e i servizi sono distribuiti esponenzialmente con lo stesso parametro μ la frequenza di transizione verso lo stato inferiore è $k\mu$. Pertanto un sistema con m servitori può essere modellato secondo lo schema in figura (esemplificato per $m = 3$)



Il calcolo delle probabilità stazionarie si effettua bilanciando il flusso di transizioni fra stato e stato. Quindi

$$\lambda \bar{p}_{k-1} = k \mu \bar{p}_k, \quad k < m, \quad \lambda \bar{p}_{k-1} = m \mu \bar{p}_k, \quad k \geq m \quad (50)$$

da cui

$$\bar{p}_k = \frac{\lambda^k}{\mu^k k!} \bar{p}_0, \quad k < m, \quad \bar{p}_k = \frac{\lambda^k}{\mu^k m^{k-m} m!} \bar{p}_0, \quad k \geq m$$

Indicando $\rho := \lambda/(m\mu)$ (si noti la differenza rispetto al caso precedente!), possiamo riscrivere

$$\bar{p}_k = \frac{m^k \rho^k}{k!} \bar{p}_0, \quad k < m, \quad \bar{p}_k = \frac{m^m \rho^k}{m!} \bar{p}_0 = \rho^{k-m} \bar{p}_m, \quad k \geq m \quad (51)$$

e quindi:

$$\bar{p}_0 = \frac{1}{\sum_{k=0}^{m-1} \frac{m^k \rho^k}{k!} + \sum_{k \geq m} \frac{m^m \rho^k}{m!}} = \frac{1}{\sum_{k=0}^{m-1} \frac{m^k \rho^k}{k!} + \frac{m^m \rho^m}{(1-\rho) m!}} = \frac{1-\rho}{(1-\rho) \sum_{k=0}^{m-1} \frac{m^k \rho^k}{k!} + \frac{m^m \rho^m}{m!}}$$

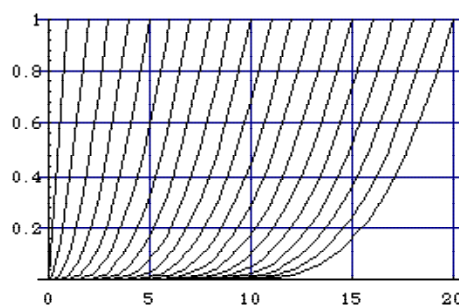
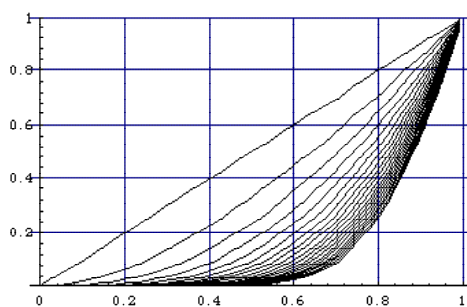
e in particolare

$$\bar{p}_m = \frac{(1-\rho) \frac{m^m \rho^m}{m!}}{(1-\rho) \sum_{k=0}^{m-1} \frac{m^k \rho^k}{k!} + \frac{m^m \rho^m}{m!}}$$

La quantità

$$E_{2,m}(\rho) := \sum_{k \geq m} \bar{p}_k = \sum_{k \geq m} \rho^{k-m} \bar{p}_m = \frac{\bar{p}_m}{1-\rho} = \frac{\frac{m^m \rho^m}{m!}}{(1-\rho) \sum_{k=0}^{m-1} \frac{m^k \rho^k}{k!} + \frac{m^m \rho^m}{m!}}$$

definisce la probabilità che vi sia coda nel sistema, ovvero, essendo $\hat{p}_k = \bar{p}_k$, la probabilità per un generico cliente di non essere servito immediatamente. La funzione $E_{2,m}(\rho)$ viene detta *seconda funzione di perdita di Erlang*. La figura a sinistra mostra l'andamento di $E_{2,m}(\rho)$ in funzione di ρ per i valori $m = 1, \dots, 20$ e quella a destra in funzione del rapporto λ/μ sempre per i valori $m = 1, \dots, 20$.



Per il calcolo di N si esegue

$$\begin{aligned} N &= \sum_{k \geq 0} k \bar{p}_k = \sum_{k=1}^m k \frac{m^k \rho^k}{k!} \bar{p}_0 + \sum_{k > m} k \rho^{k-m} \bar{p}_m = m \rho \sum_{k=1}^m \frac{m^{k-1} \rho^{k-1}}{(k-1)!} \bar{p}_0 + \sum_{k > 0} (k+m) \rho^k \bar{p}_m = \\ &= m \rho \sum_{k=0}^{m-1} \frac{m^k \rho^k}{k!} \bar{p}_0 + \sum_{k > 0} k \rho^k \bar{p}_m + \sum_{k > 0} m \rho^k \bar{p}_m = m \rho \sum_{k=0}^{m-1} \bar{p}_k + \frac{\rho \bar{p}_m}{(1-\rho)^2} + \frac{m \bar{p}_m \rho}{1-\rho} = \\ &= m \rho (1 - E_{2,m}(\rho)) + \frac{\rho \bar{p}_m}{(1-\rho)^2} + \frac{m \bar{p}_m \rho}{1-\rho} = m \rho \left(1 - \frac{\bar{p}_m}{1-\rho}\right) + \frac{\rho \bar{p}_m}{(1-\rho)^2} + \frac{m \bar{p}_m \rho}{1-\rho} \end{aligned}$$

e quindi

$$N = m \rho + \frac{\rho \bar{p}_m}{(1-\rho)^2} = m \rho + \frac{\rho}{1-\rho} E_{2,m}(\rho) \quad (52)$$

Dalla formula di Little si ottiene il tempo medio nel sistema T .

$$T = \frac{N}{\lambda} = \frac{1}{\mu} + \frac{\bar{p}_m}{m \mu (1-\rho)^2} = \frac{1}{\mu} + \frac{E_{2,m}(\rho)}{m \mu (1-\rho)}$$

e quindi

$$W = \frac{\bar{p}_m}{m \mu (1-\rho)^2} = \frac{E_{2,m}(\rho)}{m \mu (1-\rho)}, \quad N_q = \lambda W = \frac{\rho \bar{p}_m}{(1-\rho)^2} = \frac{\rho}{1-\rho} E_{2,m}(\rho)$$

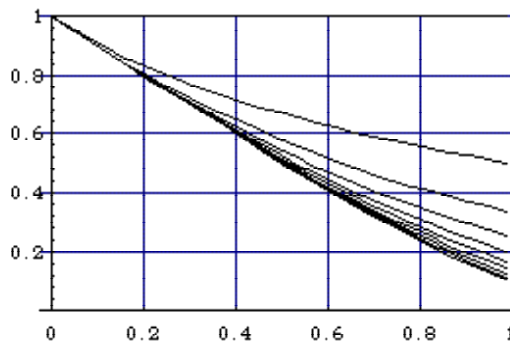
È interessante confrontare il sistema $M/M/m$ con un sistema $M/M/1$ il cui il servizio sia m volte più veloce (cioè $m\mu$) e quindi entrambi presentano lo stesso fattore di carico $\rho = \lambda/(m\mu)$. La probabilità di essere serviti senza dover attendere è più elevata per $M/M/m$, in quanto $E_{2,m}(\rho) < \rho$ per ogni valore di m (come si calcola facilmente e come anche si vede dal grafico in figura). Analogamente il numero medio di clienti in coda N_q è minore per $M/M/m$.

D'altra parte N cresce con m per valori costanti di ρ e quindi il numero medio di clienti nel sistema è più elevato per $M/M/m$ che per $M/M/1$ (con servizio $m\mu$). Come si può vedere dalle formule il motivo per cui N è più elevato mentre N_q è meno elevato è solo dovuto al tempo speso per il servizio, che ovviamente è m volte più lento per $M/M/m$.

Si consideri ora il caso di un sistema di m processori che devono gestire un traffico (markoviano) di messaggi a frequenza λ con servizio esponenziale di valor medio $1/\mu$. Il sistema di processori può essere progettato in vari modi alternativi. In un primo caso tutti i messaggi vengono inseriti in un unico buffer. Quindi si ha un sistema del tipo $M/M/m$ e il numero medio di messaggi nel sistema (processori+buffer) è (52). Nel secondo caso ogni processore dispone di un proprio buffer e i messaggi vengono inviati in modo casuale ai vari processori. Ogni processore quindi è un sistema $M/M/1$ con servizio di valor medio $1/\mu$ e tasso d'arrivo λ/m . Quindi il carico di ogni processore è $\rho = \lambda/(m\mu)$ e il valor medio di messaggi in ogni singolo sistema processore-buffer è $\rho/(1-\rho)$ e nel sistema globale si ha un valor medio di messaggi

$$N' = \frac{m\rho}{1-\rho}$$

Si verifica facilmente che $N < N'$ per $m > 1$. L'andamento del rapporto N/N' per $m = 2, \dots, 10$ è rappresentato in figura



La probabilità di attesa nulla è semplicemente $1 - E_{2,m}(\rho)$. Quindi

$$\Pr \{ \tilde{W} = 0 \} = 1 - \frac{\bar{p}_m}{1-\rho}$$

mentre per $t > 0$ l'attesa è causata dalla presenza di $k \geq m$ clienti nel sistema. L'attesa termina quando $k - m + 1$ clienti terminano il servizio. La densità della durata è data dalla densità erlangiana

$$\frac{(m\mu)^{k-m+1} t^{k-m}}{(k-m)!} e^{-m\mu t}$$

equivalente a $k - m + 1$ transizioni di Poisson in cascata di frequenza $m\mu$ (grazie alla proprietà markoviana). Quindi

$$\begin{aligned} \Pr \{ t \leq \tilde{W} \leq t + dt \} &= \sum_{k \geq m} \bar{p}_k \frac{(m\mu)^{k-m+1} t^{k-m}}{(k-m)!} e^{-m\mu t} dt = \sum_{k \geq m} \rho^{k-m} \bar{p}_m \frac{(m\mu)^{k-m+1} t^{k-m}}{(k-m)!} e^{-m\mu t} dt = \\ &= \sum_{k \geq 0} \rho^k \bar{p}_m \frac{(m\mu)^{k+1} t^k}{k!} e^{-m\mu t} dt = m\mu \bar{p}_m e^{\rho m\mu t} e^{-m\mu t} dt = m\mu \bar{p}_m e^{(\lambda-m\mu)t} dt \end{aligned}$$

e la distribuzione è data da:

$$\Pr \{W \leq t\} = \Pr \{W = 0\} + \int_0^t m \mu \bar{p}_m e^{(\lambda - m\mu)\tau} d\tau = 1 - \frac{\bar{p}_m}{1 - \rho} e^{(\lambda - m\mu)t}$$

In un sistema $M/M/m$ la frazione di tempo in cui un servitore è occupato è ρ (supponendo che la scelta fra più servitori liberi sia casuale). Infatti si ottiene (applicando le relazioni (17))

$$\Pr \{\text{servitore occupato}\} = \sum_{k=1}^{m-1} \bar{p}_k \frac{k}{m} + \sum_{k \geq m} \bar{p}_k = \sum_{k=1}^{m-1} \bar{p}_{k-1} \frac{\lambda}{m\mu} + \sum_{k \geq m} \bar{p}_{k-1} \frac{\lambda}{m\mu} = \rho \sum_{k \geq 0} \bar{p}_k = \rho$$

4.3 $M/M/m/c$

In questo sistema vi è una capacità finita c per la coda e gli arrivi che avvengono a capacità saturata sono respinti. Ovviamente $c \geq m$ e il caso $c = m$ è di particolare interesse in quei sistemi (come la telefonia) in cui non è prevista la possibilità di aspettare in coda: o si è serviti o si è respinti (segnale di ‘occupato’) e bisogna ritentare successivamente. Faremo l’ipotesi che i clienti rifiutati non modificano il flusso d’arrivo a causa del loro eventuale arrivo successivo.

Pertanto il sistema si modella come la coda $M/M/m$ con la differenza che il numero di stati è finito (da 0 a c). Quindi si ottengono le formule (51), qui riportate nuovamente e modificate

$$\bar{p}_k = \frac{m^k \rho^k}{k!} \bar{p}_0, \quad k \leq m, \quad \bar{p}_k = \frac{m^m \rho^k}{m!} \bar{p}_0 = \rho^{k-m} \bar{p}_m, \quad m < k \leq c$$

da cui

$$\bar{p}_0 = \frac{1}{\sum_{k=0}^m \frac{m^k \rho^k}{k!} + \sum_{k=m+1}^c \frac{m^m \rho^k}{m!}} = \frac{1}{\sum_{k=0}^m \frac{m^k \rho^k}{k!} + \frac{m^m \rho^m (1 - \rho^{c-m})}{m! (1 - \rho)}}$$

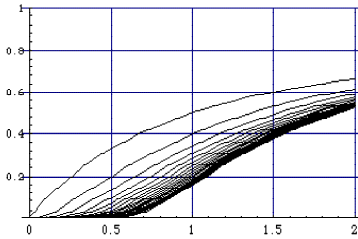
e in particolare

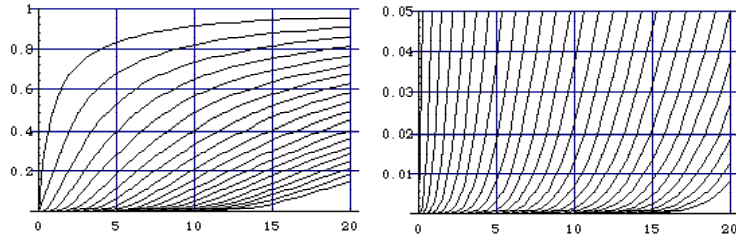
$$\bar{p}_m = \frac{\frac{m^m \rho^m}{m!}}{\sum_{k=0}^m \frac{m^k \rho^k}{k!} + \frac{m^m \rho^m (1 - \rho^{c-m})}{m! (1 - \rho)}}$$

che, per $c = m$ diventa

$$\bar{p}_m = \frac{\frac{m^m \rho^m}{m!}}{\sum_{k=0}^m \frac{m^k \rho^k}{k!}}$$

La probabilità \bar{p}_m , nel caso $m = c$ viene detta *prima funzione di perdita di Erlang* e viene indicata come $E_{1,m}(\rho)$. Rappresenta quindi la probabilità di non poter accedere al servizio. Nelle tre figure $E_{1,m}(\rho)$ è rappresentata, da sinistra a destra, in funzione di ρ per i valori $m = 1, \dots, 20$, in funzione di λ/μ per i valori $m = 1, \dots, 20$ e in funzione di λ/μ per i valori $m = 1, \dots, 30$ limitatamente ai valori $E_{1,m}(\rho) \leq 0.05$.





Si supponga ad esempio di dover stabilire quante linee telefoniche esterne bisogna predisporre in un edificio in cui lavorano 100 persone affinché la probabilità di trovare la linea occupata sia inferiore al 5%. Si supponga di aver stimato che ogni persona mediamente faccia due chiamate all'ora verso l'esterno e che la durata media di ogni chiamata sia di 5 minuti. Allora si ha $\lambda = 200$ e $\mu = 12$. Con questi dati si ottiene $E_{1,21} = 0.0586214$ e $E_{1,22} = 0.0425218$. Quindi si devono installare 22 linee esterne.

Per il calcolo di N nel caso $m = c$ si può procedere in due modi alternativi. Nel primo modo si usa la legge di Little. Un generico cliente che accede al servizio spende nel servizio soltanto il tempo destinato al servizio, quindi $T = 1/\mu$. Sembrerebbe allora che $N = \lambda/\mu$. Tuttavia per valori $\lambda > m\mu$ si avrebbe l'impossibile risultato $N > m$. Il fatto è che un uso corretto della legge di Little impone di considerare anche i clienti respinti dal sistema e quindi di scalare il valore di λ al valor medio dei clienti che accedono al servizio. Quindi si deve usare il valore $\lambda(1 - \bar{p}_m)$ nella legge di Little per cui si ottiene

$$N = \frac{\lambda}{\mu} (1 - \bar{p}_m)$$

Alternativamente si può calcolare $N = \sum_{k=0}^m k \bar{p}_k$, per cui

$$N = \sum_{k=1}^m k \frac{\frac{m^k \rho^k}{k!}}{\sum_{i=0}^m \frac{m^i \rho^i}{i!}} = m \rho \frac{\sum_{k=1}^m \frac{m^{k-1} \rho^{k-1}}{(k-1)!}}{\sum_{i=0}^m \frac{m^i \rho^i}{i!}} = \frac{\lambda}{\mu} \frac{\sum_{k=0}^{m-1} \frac{m^k \rho^k}{k!}}{\sum_{i=0}^m \frac{m^i \rho^i}{i!}} = \frac{\lambda}{\mu} (1 - \bar{p}_m)$$

Esercizio 6: Si consideri una coda $M/M/m/n$ in cui vi è una popolazione finita (di valore n) che accede al servizio (con m servitori) e la frequenza degli arrivi è proporzionale alla popolazione non nel sistema. Si calcolino in modo numerico le probabilità stazionarie del processo per i valori $n = 8$, $m = 3$ e $\lambda = \mu = 1$. Si calcolino in modo numerico le probabilità stazionarie della catena ottenuta campionando il processo agli istanti di transizione verso l'alto, per gli stessi valori. Si valutino W e T .

Soluzione

Ragionando come nel caso precedente si ha $\lambda_k = (n - k)\lambda$ e $\mu_k = k\mu$ se $k < m$ e $\mu_k = m\mu$ se $k \geq m$. Applicando le formule precedenti con i valori indicati si ottiene

$$P = \begin{pmatrix} 0.12 & 0.88 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.031 & 0.22 & 0.75 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.012 & 0.082 & 0.28 & 0.63 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.005 & 0.035 & 0.12 & 0.27 & 0.57 & 0 & 0 & 0 \\ 0.0025 & 0.018 & 0.06 & 0.13 & 0.29 & 0.5 & 0 & 0 \\ 0.0015 & 0.011 & 0.036 & 0.08 & 0.17 & 0.3 & 0.4 & 0 \\ 0.0011 & 0.0079 & 0.027 & 0.06 & 0.13 & 0.22 & 0.3 & 0.25 \\ 0.0011 & 0.0079 & 0.027 & 0.06 & 0.13 & 0.22 & 0.3 & 0.25 \end{pmatrix}$$

da cui si ottiene (i valori indicati sono arrotondati)

$$\bar{q} = (0.005, 0.035, 0.11, 0.18, 0.23, 0.23, 0.16, 0.052)$$

\bar{q}_k ($k = 1, \dots, 8$) è la probabilità che il cliente in arrivo trovi $k - 1$ persone nel sistema. Quindi il tempo medio in attesa W si calcola tenendo conto che sarà 0 se il sistema è nello stato 1, 2 o 3 (della catena). Altrimenti è $(k - m)/(m\mu)$ se il sistema è nello stato $k \geq m$. Si tratta di calcolare:

$$W = \sum_{k=m+1}^n \bar{q}_k \frac{k - m}{m\mu} = 0.745$$

e quindi $T = 1.745$. ■

Esercizio 7: Usando i precedenti risultati si modelli e risolva il seguente problema: In una fabbrica ci sono n macchine soggette ogni tanto a dei guasti. La perdita oraria di produttività a causa dell'inattività di una qualsiasi macchina sia c . Per la riparazione delle macchine si pensa di predisporre una squadra di m meccanici il cui costo orario è w (sia che siano attivi o no). Si supponga che ogni macchina sia soggetta a guasti secondo un processo di Poisson di frequenza λ e che la durata di ogni riparazione sia anche di Poisson con valor medio $1/\mu$. Si imposti il problema di determinare m in modo da minimizzare i costi. Si risolva con i dati $n = 20$, $\lambda = 1$ guasto ogni 10 giorni per macchina, $1/\mu = 10$ ore. Il ciclo lavorativo per le macchine e per i meccanici è di 16 ore al giorno. Il costo orario di un meccanico è di 100.000 lire e la perdita per un'ora di inattività di una macchina è di 500.000 lire.

Soluzione

Il problema si può modellare come una coda $M/M/m/n$, dove $n = 20$, $\lambda = 1/(10 \cdot 16)$ (tempo misurato in ore), $\mu = 1/10$ e m è da determinare. Con questi dati si può ricavare sia il generatore infinitesimo Q del processo che la matrice di transizione P della catena markoviana campionata agli arrivi (come negli esercizi precedenti). Il problema è come identificare i costi a partire dai parametri che descrivono l'andamento della coda. In ogni caso è conveniente assumere dei costi orari. Ci sono due possibilità alternative di calcolo.

– Da Q si calcola la probabilità stazionaria q del processo. Il significato di q_k è che per una frazione q_k del tempo vi sono k macchine inattive. Quindi mediamente il numero di macchine inattive è $\sum_{k=0}^n q_k k = N$ e se si indica con c il costo orario per ogni macchina inattiva, mediamente tale costo è cN .

– Da P si calcola la probabilità stazionaria p della catena. I valori di p permettono di calcolare il tempo medio nel sistema T . Infatti se il sistema passa nello stato k significa che vi sono $k - 1$ macchine inattive nel momento del nuovo guasto. L'attesa di questa macchina è dovuta alle $k - m$ macchine in attesa di essere riparate. Quindi quando il sistema passa nello stato k vi è un'attesa pari a $(k - m)/(m\mu)$ seguita dal tempo di riparazione $(1/\mu)$. Mediamente allora

$$T = \frac{1}{\mu} + \sum_{k=m+1}^n p_k \frac{k - m}{m\mu}$$

Questo è il tempo medio di inattività di una macchina che si guasta. Per calcolare la frazione di tempo globale di inattività di una macchina si consideri che mediamente il tempo T di riparazione è seguito da un tempo di attività che dura $1/\lambda$. Quindi la frazione di tempo inattivo per una singola macchina è

$$\frac{T}{T + 1/\lambda}$$

e il costo orario globale è quindi

$$\frac{n \lambda T}{1 + \lambda T}$$

Si può verificare che

$$N = \frac{n \lambda T}{1 + \lambda T}$$

Si ottengono i seguenti risultati dove il costo è dato da $cN + wm$ con w costo orario di un meccanico:

m	N	T (h)	costo (KL/h)
1	5.03	53.76	2615
2	1.57	13.64	985
3	1.23	10.53	917
4	1.18	10.07	992
5	1.17	10.01	1088

e quindi il valore ottimo si ha per $m = 3$. I valori di T , ad esempio quello per $m = 2$ indica che quando una macchina si guasta aspetta mediamente 3.64 ore e poi viene riparata mediamente in 10 ore. Come si vede la situazione è insostenibile per $m = 1$: 43 ore di attesa! Squadre di più di 3 meccanici riducono praticamente a 0 il tempo d'attesa. In particolare si ottiene per $m = 3$

$$P = \begin{pmatrix} 0.46 & 0.54 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.22 & 0.26 & 0.53 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.1 & 0.12 & 0.26 & 0.52 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.052 & 0.062 & 0.13 & 0.26 & 0.5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.027 & 0.032 & 0.066 & 0.13 & 0.26 & 0.48 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.014 & 0.017 & 0.035 & 0.071 & 0.14 & 0.26 & 0.47 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.0079 & 0.0094 & 0.019 & 0.039 & 0.076 & 0.14 & 0.26 & 0.45 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.0045 & 0.0054 & 0.011 & 0.022 & 0.043 & 0.081 & 0.15 & 0.26 & 0.43 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.0027 & 0.0032 & 0.0066 & 0.013 & 0.026 & 0.048 & 0.087 & 0.15 & 0.25 & 0.41 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.0017 & 0.002 & 0.0041 & 0.0082 & 0.016 & 0.03 & 0.054 & 0.093 & 0.16 & 0.25 & 0.38 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.0011 & 0.0013 & 0.0026 & 0.0052 & 0.01 & 0.019 & 0.034 & 0.06 & 0.1 & 0.16 & 0.25 & 0.36 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.0007 & 0.00084 & 0.0017 & 0.0035 & 0.0068 & 0.013 & 0.023 & 0.040 & 0.067 & 0.11 & 0.16 & 0.24 & 0.33 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.00049 & 0.00058 & 0.0012 & 0.0024 & 0.0047 & 0.0088 & 0.016 & 0.028 & 0.046 & 0.074 & 0.11 & 0.17 & 0.23 & 0.3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.00036 & 0.00042 & 0.00088 & 0.0018 & 0.0034 & 0.0064 & 0.012 & 0.020 & 0.034 & 0.054 & 0.083 & 0.12 & 0.17 & 0.22 & 0.27 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.00027 & 0.00032 & 0.00067 & 0.0013 & 0.0026 & 0.0049 & 0.0088 & 0.015 & 0.026 & 0.041 & 0.063 & 0.093 & 0.13 & 0.17 & 0.21 & 0.24 & 0 & 0 & 0 \\ 0.00022 & 0.00026 & 0.00053 & 0.0011 & 0.0021 & 0.0039 & 0.0071 & 0.012 & 0.021 & 0.033 & 0.051 & 0.074 & 0.1 & 0.13 & 0.17 & 0.19 & 0.2 & 0 & 0 \\ 0.00018 & 0.00022 & 0.00045 & 0.0009 & 0.0018 & 0.0033 & 0.0059 & 0.010 & 0.017 & 0.028 & 0.043 & 0.062 & 0.087 & 0.11 & 0.14 & 0.16 & 0.17 & 0.16 & 0 & 0 \\ 0.00016 & 0.00019 & 0.0004 & 0.0008 & 0.0016 & 0.0029 & 0.0053 & 0.0092 & 0.015 & 0.025 & 0.038 & 0.055 & 0.077 & 0.10 & 0.12 & 0.14 & 0.15 & 0.14 & 0.11 & 0 \\ 0.00015 & 0.00018 & 0.00038 & 0.00076 & 0.0015 & 0.0028 & 0.0050 & 0.0087 & 0.014 & 0.023 & 0.036 & 0.052 & 0.072 & 0.095 & 0.12 & 0.13 & 0.14 & 0.13 & 0.10 & 0.059 \\ 0.00015 & 0.00018 & 0.00038 & 0.00076 & 0.0015 & 0.0028 & 0.0050 & 0.0087 & 0.014 & 0.023 & 0.036 & 0.052 & 0.072 & 0.095 & 0.12 & 0.13 & 0.14 & 0.13 & 0.10 & 0.059 \end{pmatrix}$$

$$p = (0.31, 0.37, 0.21, 0.074, 0.025, 0.0077, 0.0022, 0.00061, 0.00015, 0.000035,$$

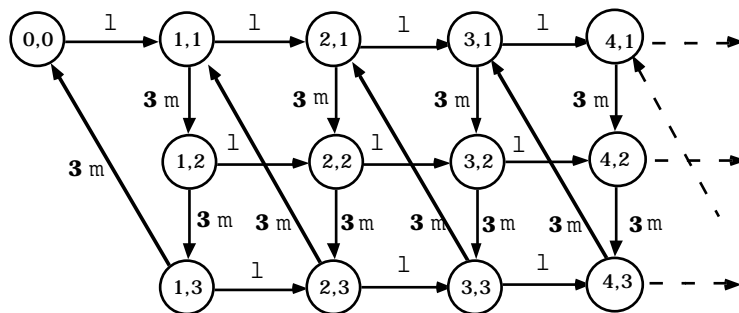
$$7.2 \cdot 10^{-6}, 1.4 \cdot 10^{-6}, 2.3 \cdot 10^{-7}, 3.3 \cdot 10^{-8}, 4.1 \cdot 10^{-9}, 4.3 \cdot 10^{-10}, 3.6 \cdot 10^{-11}, 2.2 \cdot 10^{-12}, 9.3 \cdot 10^{-14}, 1.9 \cdot 10^{-15})$$

$$q = (0.29, 0.37, 0.22, 0.081, 0.029, 0.0096, 0.003, 0.00088, 0.00024, 0.000059, 0.000014,$$

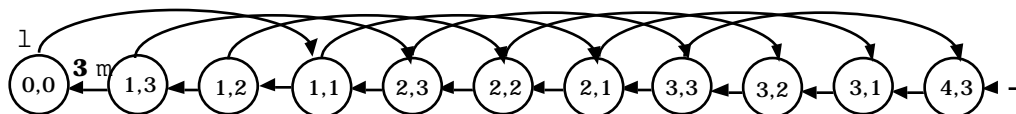
$$2.8 \cdot 10^{-6}, 5.3 \cdot 10^{-7}, 8.9 \cdot 10^{-8}, 1.3 \cdot 10^{-8}, 1.6 \cdot 10^{-9}, 1.7 \cdot 10^{-10}, 1.4 \cdot 10^{-11}, 8.8 \cdot 10^{-13}, 3.6 \cdot 10^{-14}, 7.6 \cdot 10^{-16})$$

4.4 $M/E_r/1$

Una coda di questa genere può essere modellata come un processo markoviano sfruttando il fatto che una variabile erlangiana è equivalente alla somma di r variabili markoviane. La situazione è come se il servizio di un cliente fosse dovuto alla somma di r servizi di durata media $1/(r\mu)$, ciascuno di essi con distribuzione esponenziale $1 - e^{-r\mu t}$. Lo stato del sistema non può più essere semplicemente descritto dal numero di clienti nel sistema, in quanto bisogna anche poter specificare quale degli r servizi è correntemente eseguito per l'unico cliente in servizio (a meno di sistema vuoto). Pertanto ogni stato del sistema può essere descritto da una coppia (i, h) , in cui $i = 1, 2, \dots$ è il numero di clienti nel sistema e $h = 1, \dots, r$ è il servizio in corso. Ad esempio una coda $M/E_3/1$ può essere modellata con il seguente processo markoviano:



Enumerando gli stati come $(0,0), (1,3), (1,2), (1,1), (2,3), (2,2), (2,1), (3,3), \dots$ si hanno transizioni dallo stato k allo stato $(k+3)$ di frequenza λ e transizioni dallo stato k allo stato $(k-1)$ di frequenza 3μ



con il seguente generatore infinitesimo:

$$Q = \begin{pmatrix} -\lambda & 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 3\mu & -\lambda - 3\mu & 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 3\mu & -\lambda - 3\mu & 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 3\mu & -\lambda - 3\mu & 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 3\mu & -\lambda - 3\mu & 0 & 0 & \lambda & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3\mu & -\lambda - 3\mu & 0 & 0 & \lambda & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3\mu & -\lambda - 3\mu & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3\mu & -\lambda - 3\mu & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3\mu & -\lambda - 3\mu & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}$$

Il calcolo simbolico del vettore di probabilità stazionaria non è semplice in generale. Ci limitiamo al caso $M/E_2/1$ calcolando le probabilità stazionarie usando le funzioni generatrici. Eseguendo il bilanciamento sul taglio che divide lo stato $k-1$ da quello k si ottiene che le probabilità stazionarie q_k devono soddisfare:

$$2\mu q_k = \lambda q_{k-1} + \lambda q_{k-2}, \quad k \geq 2$$

$$2\mu q_1 = \lambda q_0$$

cioè

$$q_k = \frac{\rho}{2} q_{k-1} + \frac{\rho}{2} q_{k-2}, \quad k \geq 2 \tag{53}$$

$$q_1 = \frac{\rho}{2} q_0$$

Possiamo estendere il vettore q_k anche ad indici negativi ponendo $q_k = 0$ se $k < 0$. Questa estensione serve unicamente a semplificare la trattazione degli indici nelle sommatorie. Notiamo che la relazione (53) è valida per ogni k (inclusi i valori negativi) tranne il valore $k = 0$, cioè

$$\begin{aligned} q_k z^k &= \frac{\rho}{2} q_{k-1} z^k + \frac{\rho}{2} q_{k-2} z^k, & k \neq 0 \\ q_0 z^0 &= q_0 \end{aligned}$$

Sommando e ponendo la funzione generatrice come $\varphi(z) := \sum_k q_k z^k$ si ha

$$\begin{aligned} \varphi(z) &= \frac{\rho}{2} \sum_{k \neq 0} q_{k-1} z^k + \frac{\rho}{2} \sum_{k \neq 0} q_{k-2} z^k + q_0 = \\ &= \frac{\rho}{2} z \sum_k q_{k-1} z^{k-1} + \frac{\rho}{2} z^2 \sum_k q_{k-2} z^{k-2} + q_0 = \frac{\rho}{2} z \varphi(z) + \frac{\rho}{2} z^2 \varphi(z) + q_0 \end{aligned}$$

quindi

$$\varphi(z) = \frac{q_0}{1 - \frac{\rho}{2} z - \frac{\rho}{2} z^2}$$

Siccome $\varphi(1) = \sum_k q_k = 1$ si ottiene $\varphi(1) = q_0/(1 - \rho)$ e quindi $q_0 = 1 - \rho$. Poniamo

$$\beta_1 := \frac{\rho - \sqrt{\rho^2 + 8\rho}}{4}, \quad \beta_2 := \frac{\rho + \sqrt{\rho^2 + 8\rho}}{4}$$

tali che

$$(1 - \beta_1 z)(1 - \beta_2 z) = 1 - \frac{\rho}{2} z - \frac{\rho}{2} z^2$$

Bisogna determinare A_1 e A_2 tali che

$$\frac{A_1}{1 - \beta_1 z} + \frac{A_2}{1 - \beta_2 z} = \frac{1 - \rho}{1 - \frac{\rho}{2} z - \frac{\rho}{2} z^2}$$

da cui

$$\begin{aligned} A_1 + A_2 &= 1 - \rho \\ \beta_2 A_1 + \beta_1 A_2 &= 0 \end{aligned}$$

e quindi

$$A_1 = (1 - \rho) \frac{\beta_1}{\beta_1 - \beta_2}, \quad A_2 = (1 - \rho) \frac{\beta_2}{\beta_2 - \beta_1}$$

per cui

$$\varphi(z) = A_1 \sum_{k \geq 0} \beta_1^k z^k + A_2 \sum_{k \geq 0} \beta_2^k z^k = (1 - \rho) \sum_{k \geq 0} \left(\frac{\beta_1}{\beta_1 - \beta_2} \beta_1^k + \frac{\beta_2}{\beta_2 - \beta_1} \beta_2^k \right) z^k$$

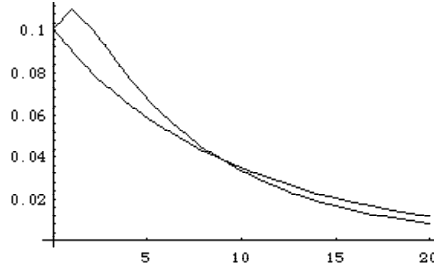
quindi

$$q_k = (1 - \rho) \frac{\beta_2^{k+1} - \beta_1^{k+1}}{\beta_2 - \beta_1}$$

La probabilità di avere n clienti nel sistema è la somma delle probabilità degli stati $2n - 1$ e $2n$ e quindi

$$\bar{p}_n = (1 - \rho) \frac{\beta_2^{2n} - \beta_1^{2n} + \beta_2^{2n+1} - \beta_1^{2n+1}}{\beta_2 - \beta_1} = (1 - \rho) \frac{\beta_2^{2n} (1 + \beta_2) - \beta_1^{2n} (1 + \beta_1)}{\beta_2 - \beta_1}$$

In figura sono rappresentati (con curva continua) i valori di probabilità stazionaria degli stati per $M/M/1$ e $M/E_2/1$ (con quale valore di ρ ?).



Per il calcolo di N si deve calcolare $\sum_{n \geq 0} n \bar{p}_n$. Siccome

$$\sum_{n \geq 0} n \beta^{2n} = \sum_{n \geq 0} n (\beta^2)^n = \frac{\beta^2}{(1 - \beta^2)^2}$$

si ha

$$N = \frac{1 - \rho}{\beta_2 - \beta_1} \left(\frac{\beta_2^2}{(1 - \beta_2^2)^2} (1 + \beta_2) - \frac{\beta_1^2}{(1 - \beta_1^2)^2} (1 + \beta_1) \right) = \frac{1 - \rho}{\beta_2 - \beta_1} \frac{(\beta_2 - \beta_1)(\beta_1 + \beta_2 - \beta_1 \beta_2 - \beta_1^2 \beta_2^2)}{(1 - \beta_2)^2 (1 + \beta_2) (1 - \beta_1)^2 (1 + \beta_1)}$$

Ora

$$\begin{aligned} \beta_1 + \beta_2 &= \frac{\rho}{2}, & \beta_1 \beta_2 &= -\frac{\rho}{2} \\ (1 - \beta_1)(1 - \beta_2) &= 1 - \frac{\rho}{2} z - \frac{\rho}{2} z^2 \Big|_{z=1} = 1 - \rho \\ (1 + \beta_1)(1 + \beta_2) &= 1 - \frac{\rho}{2} z - \frac{\rho}{2} z^2 \Big|_{z=-1} = 1 \end{aligned}$$

e quindi

$$N = \frac{\rho(4 - \rho)}{4(1 - \rho)}$$

Per il caso generale $M/E_r/1$ abbiamo le seguenti equazioni di bilanciamento fra lo stato k e lo stato $(k + 1)$

$$\begin{aligned} r \mu q_1 &= \lambda q_0 \\ r \mu q_2 &= \lambda q_0 + \lambda q_1 \\ r \mu q_3 &= \lambda q_0 + \lambda q_1 + \lambda q_2 \\ &\dots \dots \dots \\ r \mu q_k &= \lambda q_{k-r} + \dots + \lambda q_{k-2} + \lambda q_{k-1}, & k \geq r \end{aligned}$$

Definendo $q_k = 0$ per $k < 0$ la relazione

$$r \mu q_k = \lambda q_{k-r} + \dots + \lambda q_{k-2} + \lambda q_{k-1}$$

è valida per ogni k , tranne $k = 0$ e quindi possiamo scrivere (definendo $\rho = \lambda/\mu$)

$$\begin{aligned} q_k z^k &= \frac{\rho}{r} q_{k-r} z^k + \dots + \frac{\rho}{r} q_{k-2} z^k + \frac{\rho}{r} q_{k-1} z^k, & k \neq 0 \\ q_0 z^0 &= q_0 \end{aligned}$$

Sommando e ponendo la funzione generatrice come $\varphi(z) := \sum_k q_k z^k$ si ha

$$\begin{aligned}\varphi(z) &= \frac{\rho}{r} \sum_{k \neq 0} q_{k-1} z^k + \frac{\rho}{r} \sum_{k \neq 0} q_{k-2} z^k + \dots + \frac{\rho}{r} \sum_{k \neq 0} q_{k-r} z^k + q_0 = \\ \frac{\rho}{r} z \sum_k q_{k-1} z^{k-1} + \frac{\rho}{r} z^2 \sum_k q_{k-2} z^{k-2} + \dots + \frac{\rho}{r} z^r \sum_{k \neq 0} q_{k-r} z^{k-r} + q_0 &= \\ \frac{\rho}{r} z \varphi(z) + \frac{\rho}{r} z^2 \varphi(z) + \dots + \frac{\rho}{r} z^r \varphi(z) + q_0 &= \end{aligned}$$

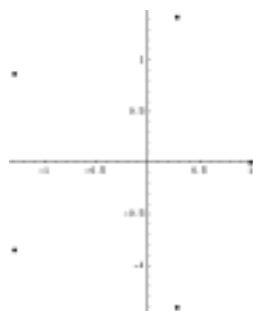
da cui

$$\varphi(z) = \frac{q_0}{1 - \frac{\rho}{r} z - \frac{\rho}{r} z^2 - \dots - \frac{\rho}{r} z^r}$$

Anche nel caso generale otteniamo $\varphi(1) = q_0/(1 - \rho)$ e quindi $q_0 = 1 - \rho$ (da $\varphi(1) = \sum_k q_k = 1$) e quindi la funzione generatrice è

$$\varphi(z) = \frac{1 - \rho}{1 - \frac{\rho}{r} z - \frac{\rho}{r} z^2 - \dots - \frac{\rho}{r} z^r}$$

Le radici di $1 - \rho/r(z + z^2 + \dots + z^r)$ vanno calcolate numericamente. In figura sono rappresentate le radici nel piano complesso per $r = 5$ e i valori di $\rho = 1$ e $\rho = 0.1$



$\rho = 1$



$\rho = 0.1$

Cerchiamo di valutare numericamente le probabilità stazionarie \bar{p}_n con $\rho = 0.95$ ed $r = 5$. Si ottiene

$$1 - 0.19(z + z^2 + \dots + z^r) = \prod_{i=1}^5 (1 - \alpha_i z)$$

Si calcolano le seguenti radici inverse:

$$\begin{aligned}\alpha_1 &= -0.53324 + 0.35523 i = 0.640729 e^{2.55393 i} =: \mu_1 e^{\theta_1 i} \\ \alpha_2 &= -0.53324 - 0.35523 i = 0.640729 e^{-2.55393 i} =: \mu_1 e^{-\theta_1 i} \\ \alpha_3 &= 0.13667 + 0.67236 i = 0.686111 e^{1.37026 i} =: \mu_2 e^{\theta_2 i} \\ \alpha_4 &= 0.13667 - 0.67236 i = 0.686111 e^{-1.37026 i} =: \mu_2 e^{-\theta_2 i} \\ \alpha_5 &= 0.983142 = 0.983142 e^{0 i} =: \mu_3\end{aligned}$$

Bisogna determinare il valore di costanti A_1, A_2, A_3, A_4 e A_5 tali che

$$\varphi(z) = \frac{0.05}{1 - 0.19(z + z^2 + \dots + z^r)} = \sum_{i=1}^5 \frac{A_i}{1 - \alpha_i z}$$

Se moltiplichiamo entrambi i termini per $(1 - \alpha_j z)$ e calcoliamo l'espressione di destra per $z = 1/\alpha_j$ otteniamo A_j . L'espressione di sinistra è invece indeterminata, diventando $0/0$. Pertanto si calcola il limite con la regola di L'Hopital che porta a

$$A_j = \frac{0.05 d/dz(1 - \alpha_j z)}{d/dz(1 - 0.19(z + z^2 + \dots + z^r))} \Big|_{z=1/\alpha_j} = \frac{0.05 \alpha_j}{0.19(1 + 2z + \dots + r z^{r-1})} \Big|_{z=1/\alpha_j}$$

Si ottiene

$$\begin{aligned} A_1 &= 0.00837653 + 0.0000100626 i = 0.00837654 e^{0.00120128 i} =: B_1 e^{\omega_1 i} \\ A_2 &= 0.00837653 - 0.0000100626 i = 0.00837654 e^{-0.00120128 i} =: B_1 e^{-\omega_1 i} \\ A_3 &= 0.00838352 + 0.0000394659 i = 0.00838361 e^{0.00470753 i} =: B_2 e^{\omega_2 i} \\ A_4 &= 0.00838352 - 0.0000394659 i = 0.00838361 e^{-0.00470753 i} =: B_2 e^{-\omega_2 i} \\ A_5 &= 0.0164799 = 0.0164799 e^{0 i} =: B_3 e^{0 i} \end{aligned}$$

Allora

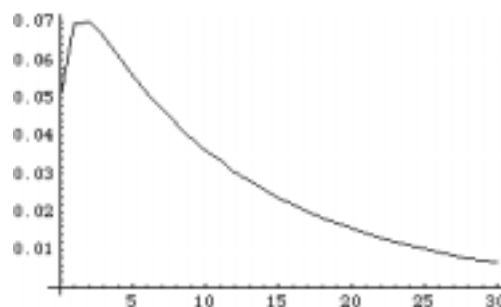
$$\begin{aligned} \varphi(z) &= \sum_{k \geq 0} \sum_{j=1}^5 A_j \alpha_j^k z^k = \sum_{k \geq 0} \left(\sum_{j=1}^2 (B_j e^{\omega_j i} \mu_j^k e^{k \theta_j i} + B_j e^{-\omega_j i} \mu_j^k e^{-k \theta_j i}) + A_5 \alpha_5^k \right) z^k = \\ &= \sum_{k \geq 0} \left(A_5 \alpha_5^k + \sum_{j=1}^2 2 B_j \mu_j^k \cos(k \theta_j + \omega_j) \right) z^k =: \sum_{k \geq 0} q_k z^k \end{aligned}$$

Si ottiene

$$\begin{aligned} q_0 &= 0.05, \\ q_1 &= 0.0095, \quad q_2 = 0.011305, \quad q_3 = 0.0134529, \quad q_4 = 0.016009, \quad q_5 = 0.0190507 \\ q_6 &= 0.0131704, \quad q_7 = 0.0138677, \quad q_8 = 0.0143546, \quad q_9 = 0.014526, \quad q_{10} = 0.0142442 \\ q_{11} &= 0.0133309, \quad q_{12} = 0.0133615, \quad q_{13} = 0.0132653, \quad q_{14} = 0.0130583, \quad q_{15} = 0.0127794 \\ q_{16} &= 0.0125011, \quad q_{17} = 0.0123435, \quad q_{18} = 0.01215, \quad q_{19} = 0.0119381, \quad q_{20} = 0.0117253, \dots \end{aligned}$$

da cui si ottengono le probabilità \bar{p}_n di avere n clienti nel sistema

$$\begin{aligned} \bar{p}_0 &= 0.05, \quad \bar{p}_1 = 0.0693177, \quad \bar{p}_2 = 0.0701629, \quad \bar{p}_3 = 0.0657954, \quad \bar{p}_4 = 0.0606581, \quad \bar{p}_5 = 0.0557446, \\ \bar{p}_6 &= 0.0512045, \quad \bar{p}_7 = 0.0470318, \quad \bar{p}_8 = 0.0431989, \quad \bar{p}_9 = 0.0396784, \quad \bar{p}_{10} = 0.0364449, \dots \end{aligned}$$



Calcolando fino a \bar{p}_{200} e valutando $N = \sum_{k=0}^{200} k \bar{p}_k$ si ottiene $N = 11.78$, in accordo con il valore teorico che calcoleremo più avanti con altre tecniche.

4.5 Tempo residuo

Nello studio delle code con distribuzioni non necessariamente esponenziali è importante il concetto di *tempo residuo*. Sia $t_{k+1} := t_k + X_k$, $k = 1, 2, \dots$, con X_k variabili stocastiche a valori positivi, indipendenti e identicamente distribuite con distribuzione e densità rispettivamente

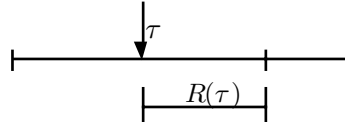
$$F_X(x) = \Pr \{X_k \leq x\}, \quad f_X(x) dx = \Pr \{x \leq X_k \leq x + dx\}, \quad \forall k \quad (54)$$

Si definisce come tempo residuo all'istante τ la seguente quantità:

$$R(\tau) := \min \{t_k - \tau : t_k - \tau \geq 0, k = 1, \dots\}$$

In altre parole, se i valori t_k sono le epoche successive di un evento, $R(\tau)$ è il tempo mancante all'evento immediatamente successivo all'istante τ . Se le X_k sono esponenziali, con distribuzione $1 - e^{-\mu t}$, il tempo residuo è anch'esso distribuito esponenzialmente come $1 - e^{-\mu t}$, indipendente da τ , ovvero $\Pr \{R(\tau) \leq t\} = 1 - e^{-\mu t}$. In generale, per variabili non markoviane, questa proprietà non vale più.

Prima di derivare un'espressione generale della distribuzione del tempo residuo può essere utile capire da un piccolo esempio quali siano i concetti in gioco. Si considerino variabili $X_k \in \{1, 3\}$, cioè che assumono solo i due valori 1 e 3, e si supponga che $\Pr \{X_k = 1\} = \Pr \{X_k = 3\} = 1/2$. Come ulteriore semplificazione si consideri il caso di due sole variabili, la prima di valore 3 e la seconda di valore 1, come indicato in figura.



Se τ cade nel primo intervallo il tempo residuo $R(\tau)$ vale in media la metà dell'intervallo, cioè $3/2$. Analogamente se τ cade nel secondo intervallo il tempo residuo $R(\tau)$ vale in media $1/2$. Per valutare il valor medio del tempo residuo bisogna tener conto della probabilità con cui τ cade nel primo o nel secondo intervallo, il che avviene con probabilità $3/4$ e $1/4$ rispettivamente. Quindi il valor medio del tempo residuo è $3/4 \cdot 3/2 + 1/4 \cdot 1/2 = 5/4$. In modo simile si può calcolare la distribuzione del tempo residuo:

$$\Pr \{R(\tau) \leq t \mid 0 \leq \tau \leq X_1\} = \begin{cases} t/3 & \text{se } t \leq 3 \\ 1 & \text{se } t > 3 \end{cases}, \quad \Pr \{R(\tau) \leq t \mid X_1 < \tau \leq X_1 + X_2\} = \begin{cases} t & \text{se } t \leq 1 \\ 1 & \text{se } t > 1 \end{cases}$$

Quindi

$$\Pr \{R(\tau) \leq t\} = \begin{cases} 3/4 \cdot t/3 + 1/4 \cdot t = t/2 & \text{se } 0 \leq t \leq 1 \\ 3/4 \cdot t/3 + 1/4 \cdot 1 = t/4 + 1/4 & \text{se } 1 \leq t \leq 3 \\ 3/4 \cdot 1 + 1/4 \cdot 1 = 1 & \text{se } t \geq 3 \end{cases} \quad (55)$$

Se ora supponiamo una successione infinita di variabili $X_k \in \{1, 3\}$, mediamente metà degli intervalli ha lunghezza 3 e metà ha lunghezza 1 (dato che le probabilità sono uguali), però la probabilità di un generico τ di cadere in uno degli intervalli di lunghezza 3 è $3/4$, perché questi occupano un tempo 3 volte superiore a quello degli intervalli di lunghezza 1. Quindi il tempo residuo è caratterizzato dalle stesse espressioni (55).

In generale sia $X(\tau) := X_k$ tale che $t_k < \tau \leq t_k + X_k$. Quindi $X(\tau)$ è il tempo fra due eventi successivi entro cui si trova τ , ovvero è la durata dell'intervallo intercettato da τ . Vogliamo determinare la distribuzione e la densità di $X(\tau)$ per un generico valore τ , cioè

$$\Pr \{X(\tau) \leq x\}, \quad \Pr \{x \leq X(\tau) < x + dx\} \quad (56)$$

Si noti la differenza fra i valori (54) e (56). Le espressioni (54) si riferiscono alle probabilità con cui i valori X_k vengono *generati* negli istanti t_k , mentre le espressioni (56) si riferiscono alle probabilità con cui i valori X_k vengono *intercettati* da un generico istante τ .

Nel caso le variabili X_k abbiano valori discreti, $X_k \in \{x_1, x_2, \dots\}$, con $f_i := \Pr\{X_k = x_i\}$ e valor medio $\bar{X} = \sum_{i \geq 0} x_i f_i$, sia n_i il numero di volte in cui le variabili X_k , $k = 1, \dots, n$, assumono il valore x_i in una particolare realizzazione (quindi $\sum_{i=1}^{\infty} n_i = n$). Allora $\sum_{i=1}^{\infty} x_i n_i$ è il tempo che intercorre fra il primo e l' n -mo evento e $x_i n_i$ è la durata globale di tutti gli intervalli di durata x_i . Allora

$$\Pr\{X(\tau) = x_m\} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_m n_m}{\sum_{i=1}^{\infty} x_i n_i} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{x_m n_m}{n}}{\frac{\sum_{i=1}^{\infty} x_i n_i}{n}} = \frac{x_m f_m}{\bar{X}}$$

Si noti ora che

$$\Pr\{R(\tau) \leq t | X(\tau) = x_m\} = \begin{cases} \frac{t}{x_m} & \text{se } t \leq x_m \\ 1 & \text{se } t > x_m \end{cases}$$

o, con diversa notazione, usando l'operatore

$$[P] = \begin{cases} 1 & \text{se } P \text{ vero} \\ 0 & \text{se } P \text{ falso} \end{cases}$$

$$\Pr\{R(\tau) \leq t | X(\tau) = x_m\} = [t \leq x_m] \frac{t}{x_m} + [t > x_m]$$

Quindi

$$\begin{aligned} \Pr\{R(\tau) \leq t\} &= \sum_{m=1}^{\infty} \Pr\{R(\tau) \leq t | X(\tau) = x_m\} \Pr\{X(\tau) = x_m\} = \\ &= \sum_{m=1}^{\infty} ([t \leq x_m] \frac{t}{x_m} + [t > x_m]) \frac{x_m f_m}{\bar{X}} = \sum_{m=1}^{\infty} [t \leq x_m] \frac{t f_m}{\bar{X}} + \sum_{m=1}^{\infty} [t > x_m] \frac{x_m f_m}{\bar{X}} = \\ &= \sum_{m=1}^{\infty} \frac{t f_m}{\bar{X}} - \sum_{m=1}^{\infty} [t > x_m] \frac{t f_m}{\bar{X}} + \sum_{m=1}^{\infty} [t > x_m] \frac{x_m f_m}{\bar{X}} = \end{aligned}$$

da cui

$$\Pr\{R(\tau) \leq t\} = \frac{t(1 - F_X(t)) + \bar{X}(t)}{\bar{X}}$$

dove si è indicato con $\bar{X}(t)$ il "valor medio" troncato a t .

Se le variabili sono continue la frazione di intervalli di durata compresa fra x e $x + dx$ è data da $n f_X(x) dx$. Il tempo occupato da questi intervalli è $x n f_X(x) dx$. il tempo occupato da tutti gli intervalli è $n \bar{X}$. Allora si ha

$$\Pr\{x \leq X(\tau) < x + dx\} = \frac{x n f_X(x) dx}{n \bar{X}} = \frac{x dF_X(x)}{\bar{X}} \quad (57)$$

Si noti ora che

$$\Pr\{R(\tau) \leq t | x \leq X(\tau) < x + dx\} = \begin{cases} \frac{t}{x} & \text{se } t \leq x \\ 1 & \text{se } t > x \end{cases}$$

cioè una volta che sia noto che l'intertempo fra i due eventi entro cui si trova τ dura x , il tempo residuo è uniformemente distribuito fra il valore minimo 0 e quello massimo x . Allora

$$F_R(t) = \Pr\{R(\tau) \leq t\} = \int_0^{\infty} \Pr\{R(\tau) \leq t | x \leq X(\tau) < x + dx\} \Pr\{x \leq X(\tau) < x + dx\} =$$

$$\int_0^t \frac{x dF_X(x)}{\bar{X}} + \int_t^\infty \frac{t}{x} \frac{x dF_X(x)}{\bar{X}} = \frac{\bar{X}(t)}{\bar{X}} + \frac{t}{\bar{X}} (1 - F_X(t)), \quad (58)$$

con $\bar{X}(t)$ il “valor medio” troncato a t . La funzione di densità del valore residuo è (ottenuta derivando (58))

$$f_R(t) = \frac{1 - F_X(t)}{\bar{X}}. \quad (59)$$

Si noti che

$$f_R(0) = \frac{1 - F_X(0)}{\bar{X}} = \frac{1}{\bar{X}}$$

Alternativamente si può calcolare (59) con il seguente ragionamento: il tempo residuo è compreso fra 0 e dx ogni qual volta $t_k - dx \leq \tau \leq t_k$ e questo evento avviene tante volte quante sono gli eventi t_k , cioè il tempo totale diviso \bar{X} . La frazione di tempo in cui il tempo residuo è compreso fra 0 e dx è allora dx/\bar{X} . Il tempo residuo è compreso fra x e $x + dx$ ogni qual volta $t_k - x - dx \leq \tau \leq t_k - x$ e questo evento avviene tante volte quanti sono i valori X_k non minori di x e la frazione di questi valori rispetto a tutti i valori è data da $(1 - F_X(x))$ e quindi si ritrova la formula (59).

Il valore medio del tempo residuo si ottiene come

$$\begin{aligned} R &= \int_0^\infty t f_R(t) dt = \int_0^\infty t \frac{1 - F_X(t)}{\bar{X}} dt = \int_0^\infty \frac{1 - F_X(t)}{2\bar{X}} dt^2 = \\ &= \frac{1}{2\bar{X}} \left(\left[(1 - F_X(t)) t^2 \right]_0^\infty + \int_0^\infty t^2 f_X(t) dt \right) = \frac{\bar{X}^2}{2\bar{X}} \end{aligned} \quad (60)$$

Esempio 28: Le variabili X_k siano distribuite uniformemente fra 0 e a . Quindi

$$F_X(t) = \Pr \{X \leq t\} = \begin{cases} \frac{t}{a} & \text{se } t \leq a \\ 1 & \text{se } t > a \end{cases}, \quad f_X(t) = \begin{cases} \frac{1}{a} & \text{se } 0 \leq t \leq a \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

e $\bar{X} = a/2$.

$$\begin{aligned} \Pr \{R(\tau) \leq t\} &= \frac{1}{\bar{X}} \left(\bar{X}(t) + t(1 - F_X(t)) \right) = \frac{2}{a} \left(\int_0^t \frac{x}{a} dx + t \left(1 - \frac{t}{a}\right) \right) = \\ &= \frac{t}{a} \left(2 - \frac{t}{a}\right) = 1 - \left(1 - \frac{t}{a}\right)^2, \quad 0 \leq t \leq a \end{aligned}$$

con densità $(2/a)(1 - (t/a))$ e valor medio $R = a/3$. ■

Esempio 29: Si considerino due processi $t_{k+1} := t_k + X_k$, $k = 1, 2, \dots$, e $s_{k+1} := s_k + Y_k$, $k = 1, 2, \dots$, con X_k e Y_k indipendenti con la medesima distribuzione $F_X(t)$. Si consideri l'unione $T := \{t_k\} \cup \{s_k\}$ e siano τ_h i valori ordinati in T . Siamo interessati a determinare la distribuzione delle variabili stocastiche W_h dove $W_h := \tau_{h+1} - \tau_h$.

In generale, date due variabili indipendenti X_1 e X_2 con distribuzioni F_1 e F_2 la variabile $\min \{X_1; X_2\}$ ha una distribuzione F tale che $1 - F = (1 - F_1)(1 - F_2)$ ovvero

$$F = 1 - (1 - F_1)(1 - F_2)$$

In questo caso, considerato l'evento τ_h (possiamo supporre senza perdita di generalità che sia $\tau_h = t_k$ data l'uguaglianza stocastica delle X_k e delle Y_k), il prossimo evento τ_{h+1} è dato dal minimo fra X_{k+1} (se il

prossimo evento è t_{k+1}) oppure il tempo residuo dell'altro processo. Siccome il primo ha distribuzione $F_X(t)$ e il secondo $F_R(t)$, la distribuzione $F_W(t)$ di W è tale che

$$F_W = 1 - (1 - F_X)(1 - F_R)$$

Se F_X è la distribuzione uniforme so $[0, a]$ si ha

$$F_W(t) = 1 - \left(1 - \frac{t}{a}\right) \left(1 - \frac{t}{a}\right)^2 = 1 - \left(1 - \frac{t}{a}\right)^3$$

Se i processi sono in generale m , il calcolo può essere effettuato ricorsivamente portando a (sia $F_k(t)$ la distribuzione degli intertempi della fusione di k processi):

$$1 - F_m(t) = (1 - F_{m-1}(t))(1 - F_R(t)), \quad F_1(t) = F_X(t)$$

Si calcola facilmente

$$F_m(t) = 1 - (1 - F_X(t))(1 - F_R(t))^{m-1}$$

con valor medio \bar{X}/m Nel caso particolare di processi con distribuzione uniforme si ottiene

$$F_m(t) = 1 - \left(1 - \frac{t}{a}\right)^{2m-1} \quad (61)$$

Si immagini ora di 'rallentare' di un fattore m gli m processi. Siano $\tilde{F}_X(t)$ e $\tilde{F}_R(t)$ le nuove distribuzioni degli intertempi e del tempo residuo. Quindi $\tilde{F}_X(t) = F_X(t/m)$, $\tilde{F}_R(t) = F_R(t/m)$. Si ha quindi

$$\tilde{F}_m(t) = 1 - (1 - \tilde{F}_X(t))(1 - \tilde{F}_R(t))^{m-1} = 1 - \left(1 - F_X\left(\frac{t}{m}\right)\right) \left(1 - F_R\left(\frac{t}{m}\right)\right)^{m-1}$$

Se m tende a infinito $F_R(t/m)$ si può approssimare con $F_R(0) + f_R(0)t/m = t/(m\bar{X})$ Allora

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \tilde{F}_m(t) = 1 - \lim_{m \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{t}{m\bar{X}}\right)^{m-1} = 1 - e^{-t/\bar{X}}$$

Si dimostra quindi che la distribuzione di Poisson è una distribuzione limite di arbitrarie distribuzioni.

Se consideriamo il tempo residuo del nuovo processo, fusione degli m processi, ciascuno con valor medio \bar{X} , la sua densità si ottiene applicando (59) e quindi

$$f_{mR}(t) = \frac{1 - F_m(t)}{\frac{\bar{X}}{m}} = \frac{m(1 - F_X(t))(1 - F_R(t))^{m-1}}{\bar{X}} \quad (62)$$

In particolare per processi con distribuzione uniforme fra 0 e $2/\mu$, (62) diventa (applicando (61) con $a = 2/\mu$)

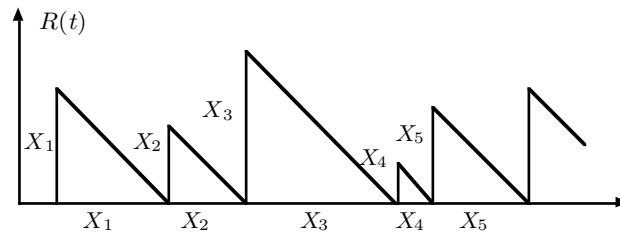
$$f_{mR}(t) = m\mu \left(1 - \frac{\mu t}{2}\right)^{2m-1}$$

da cui si calcola facilmente il tempo residuo medio

$$R = \frac{2}{\mu(2m+1)}$$

■

Il valor medio R si può calcolare anche in un altro modo. La funzione $R(t)$ ha un andamento come rappresentato nel seguente grafico:



Il valor medio può anche essere espresso come:

$$R = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t R(\tau) d\tau$$

e, con un ragionamento analogo a quello fatto per la legge di Little, l'area è anche esprimibile come

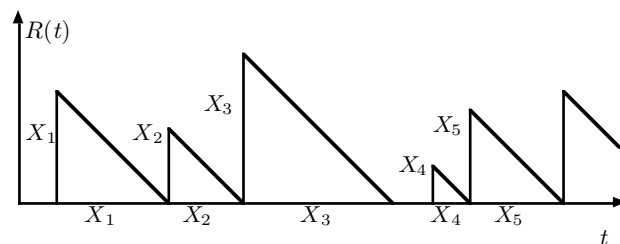
$$\sum_{i=1}^{n(t)} \frac{X_i^2}{2}$$

e quindi

$$R = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \sum_{i=1}^{n(t)} \frac{X_i^2}{2} = \frac{1}{2} \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{n(t)}{t} \frac{\sum_{i=1}^{n(t)} X_i^2}{n(t)} = \frac{1}{2} \overline{X^2}$$

4.6 M/G/1

Il caso di tempo residuo che interessa nelle code $M/G/1$ è quello relativo al cliente in servizio all'istante di arrivo in un cliente generico. In questo caso bisogna modificare le formule (58), (59) e (60). Infatti al termine di un servizio non segue necessariamente un servizio. Se non vi sono clienti nel sistema bisogna aspettare fino all'arrivo di un cliente. La funzione $R(t)$ si presenta ad esempio come indicato in figura.



Ripetendo i ragionamenti fatti è facile vedere che (57) si trasforma in

$$\Pr \{x \leq X(\tau) < x + dx\} = \lambda x dF_X(x)$$

Ora bisogna anche tener conto che l'arrivo di un cliente può avvenire a sistema vuoto e siccome la probabilità di trovare il sistema vuoto è $(1 - \rho)$ si ha

$$\Pr \{R(\tau) \leq t\} = \int_0^\infty \Pr \{R(\tau) \leq t | x \leq X(\tau) < x + dx\} \Pr \{x \leq X(\tau) < x + dx\} + \Pr \{\text{sistema vuoto}\}$$

e quindi (58) si trasforma in

$$F_R(t) = 1 - \rho + \lambda \left(\overline{X}(t) + t(1 - F_X(t)) \right)$$

da cui (59) diventa

$$f_R(t) = (1 - \rho) \delta(0) + \lambda (1 - F_X(t)) \quad (63)$$

con $\delta(t)$ la funzione impulso. (Ovvero: $\Pr\{R(\tau) = 0\} = 1 - \rho$ e, per $t > 0$, $\Pr\{t \leq R(\tau) \leq t + dt\} = f_R(t) dt = \lambda (1 - F_X(t)) dt$). Da (63) il valor medio si calcola come

$$R = \frac{\lambda \overline{X^2}}{2} = \rho \frac{1}{2\mu} + \frac{\lambda \sigma_X^2}{2} = \rho \frac{1}{2\mu} + \rho \frac{\mu \sigma_X^2}{2}$$

dove si è fatto uso del fatto che $\overline{X^2} + \sigma_X^2 = \overline{X^2}$, con $\overline{X} = 1/\mu$ valor medio e σ_X varianza. Come si vede R può esser visto come la somma di due componenti, di cui la prima dipende solo dalla casualità degli arrivi in quanto $1/(2\mu)$ è il tempo residuo medio rispetto ad un servizio deterministico di durata $1/\mu$, e la seconda tiene conto della casualità dei servizi. Poi entrambi i termini vanno moltiplicati per ρ in modo da tener conto della possibilità di sistema vuoto. Ad esempio si ottengono i seguenti valori per diversi tipi di servizio:

$$\begin{aligned} M : \quad R &= \rho \frac{1}{\mu} \\ E_k : \quad R &= \rho \frac{1}{2\mu} \left(\frac{k+1}{k} \right) \\ D : \quad R &= \rho \frac{1}{2\mu} \\ U : \quad R &= \rho \frac{1}{2\mu} \frac{4}{3} \end{aligned}$$

dove con U si è indicata la distribuzione uniforme fra 0 e 2μ (notazione non standard). Noto R è possibile derivare in modo semplice il tempo medio d'attesa W , sfruttando la proprietà che gli arrivi, essendo markoviani, sono generici. Quindi mediamente il tempo d'attesa è data dalla somma del tempo residuo e dei servizi dei clienti già in coda. Quindi

$$W = R + \frac{1}{\mu} N_q$$

da cui, applicando la legge di Little

$$W = R + \frac{\lambda}{\mu} W$$

e quindi

$$\begin{aligned} W &= \frac{R}{1 - \rho} = \frac{\lambda \overline{X^2}}{2(1 - \rho)} = \frac{\rho}{2(\mu - \lambda)} (1 + \mu^2 \sigma_X^2) \\ T &= W + \frac{1}{\mu} = \frac{\lambda \overline{X^2}}{2(1 - \rho)} + \frac{1}{\mu} = \frac{2 - \rho}{2(\mu - \lambda)} + \frac{\rho \mu^2 \sigma_X^2}{2(\mu - \lambda)} \\ N &= \lambda T = \frac{\rho}{1 - \rho} + \frac{\rho^2}{2(1 - \rho)} (\mu^2 \sigma_X^2 - 1) \end{aligned}$$

Sostituendo i vari valori di R si ottengono le seguenti grandezze:

$$\begin{aligned} M/M/1 : \quad W &= \frac{\rho}{\lambda - \mu}, & T &= \frac{1}{\lambda - \mu}, & N &= \frac{\rho}{1 - \rho}, \\ M/E_k/1 : \quad W &= \frac{k+1}{2k} \frac{\rho}{\lambda - \mu}, & T &= \frac{k(2 - \rho) + \rho}{2k} \frac{1}{\lambda - \mu}, & N &= \frac{k(2 - \rho) + \rho}{2k} \frac{\rho}{1 - \rho}, \\ M/D/1 : \quad W &= \frac{1}{2} \frac{\rho}{\lambda - \mu}, & T &= \frac{2 - \rho}{2} \frac{1}{\lambda - \mu}, & N &= \frac{2 - \rho}{2} \frac{\rho}{1 - \rho}, \\ M/U/1 : \quad W &= \frac{2}{3} \frac{\rho}{\lambda - \mu}, & T &= \frac{3 - \rho}{3} \frac{1}{\lambda - \mu}, & N &= \frac{3 - \rho}{3} \frac{\rho}{1 - \rho}. \end{aligned}$$

Il calcolo della probabilità stazionaria è affidato alla catena che si ottiene campionando il processo agli istanti di partenza di un cliente. Si può dimostrare che, siccome gli arrivi sono markoviani, tali istanti sono generici. Allora, siccome si vuole campionare il processo solo agli istanti di partenza, tutte le transizioni verso stati più alti sono “invisibili” e solo le transizioni da uno stato a quello precedente sono visibili. Facciamo notare che l’uso del termine “stato” non sarebbe corretto in generale dato che il processo non è markoviano. Tuttavia in questo caso, siccome gli arrivi sono markoviani e gli istanti di partenza sono anche gli istanti di inizio di un processo casuale noto, si può usare correttamente la parola stato in quanto non serve altra informazione per predire l’andamento futuro del processo.

Trovandosi il processo in un generico stato $i > 1$, il processo può: operare una transizione verso $i - 1$ (che viene vista dalla catena), oppure una transizione verso $i + 1$ (invisibile) e successivamente una verso i (visibile), oppure una verso $i + 1$ ed un’altra verso $i + 2$ (entrambe invisibili) seguite da una verso $i + 1$ (visibile), eccetera. Se il processo si trova nello stato 0, l’unica transizione possibile (con probabilità 1 quindi) è verso lo stato 1.

La probabilità di k transizioni verso l’alto (partendo da uno stato $i > 0$) seguita da una verso il basso non è altro che la probabilità di k arrivi durante un servizio e quindi, indicando tale probabilità con α_k :

$$\alpha_k := \int_0^\infty \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t} f_X(t) dt$$

Se si parte dallo stato 0 la prima transizione avviene con probabilità 1 e quindi k transizioni verso l’alto seguita da una verso il basso avvengono con probabilità α_{k-1} (infatti quando un cliente lascia il sistema vuoto, cioè nello stato 0, il tempo che deve passare finché non arriva un cliente, quando cioè il sistema si porta nello stato 1, è, per la catena, un non-tempo, cioè come se non esistesse). Abbiamo allora

$$P(i, j) = \begin{cases} 0 & \text{se } j < i - 1 \\ \alpha_{j-1} & \text{se } i = 0 \\ \alpha_{j-i+1} & \text{se } 0 < i \leq j + 1 \end{cases}$$

La matrice di transizione ha quindi la forma

$$P = \begin{pmatrix} \alpha_0 & \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \alpha_4 & \cdots \\ \alpha_0 & \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \alpha_4 & \cdots \\ 0 & \alpha_0 & \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \cdots \\ 0 & 0 & \alpha_0 & \alpha_1 & \alpha_2 & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \alpha_0 & \alpha_1 & \cdots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}$$

e la probabilità stazionaria \bar{p} si calcola da $\bar{p}P = \bar{p}$.

Esempio 30: Consideriamo la coda $M/D/1$. Allora

$$\alpha_k = \frac{(\lambda(1/\mu))^k}{k!} e^{-\lambda/\mu} = \frac{\rho^k}{k!} e^{-\rho}$$

Il calcolo della probabilità stazionaria in forma analitica è troppo complicato. Quindi passiamo ad un calcolo numerico. Il problema che si pone è quello del troncamento della catena ad un valore finito del numero degli stati. Scegliamo inizialmente $n = 10$. Fissiamo $\lambda = 0.9$ e $\mu = 1$. Quindi $\rho = 0.9$. Con questi valori otteniamo la seguente matrice 11×11 (ogni riga è stata normalizzata dividendola per la somma dei termini):

$$P = \begin{pmatrix} 0.41 & 0.37 & 0.16 & 0.049 & 0.011 & 0.002 & 0.0003 & 0.000039 & 4.3 \cdot 10^{-6} & 4.3 \cdot 10^{-7} & 3.9 \cdot 10^{-8} \\ 0.41 & 0.37 & 0.16 & 0.049 & 0.011 & 0.002 & 0.0003 & 0.000039 & 4.3 \cdot 10^{-6} & 4.3 \cdot 10^{-7} & 0. \\ 0. & 0.41 & 0.37 & 0.16 & 0.049 & 0.011 & 0.002 & 0.0003 & 0.000039 & 4.3 \cdot 10^{-6} & 0. \\ 0. & 0. & 0.41 & 0.37 & 0.16 & 0.049 & 0.011 & 0.002 & 0.0003 & 0.000039 & 0. \\ 0. & 0. & 0. & 0.41 & 0.37 & 0.16 & 0.049 & 0.011 & 0.002 & 0.0003 & 0. \\ 0. & 0. & 0. & 0. & 0.41 & 0.37 & 0.16 & 0.049 & 0.011 & 0.002 & 0. \\ 0. & 0. & 0. & 0. & 0. & 0.41 & 0.37 & 0.17 & 0.05 & 0.011 & 0. \\ 0. & 0. & 0. & 0. & 0. & 0. & 0.41 & 0.37 & 0.17 & 0.05 & 0. \\ 0. & 0. & 0. & 0. & 0. & 0. & 0. & 0.43 & 0.39 & 0.18 & 0. \\ 0. & 0. & 0. & 0. & 0. & 0. & 0. & 0. & 0.53 & 0.47 & 0. \\ 0. & 0. & 0. & 0. & 0. & 0. & 0. & 0. & 0. & 1. & 0. \end{pmatrix}$$

la cui probabilità stazionaria è

$$\bar{p} = (0.12 \quad 0.17 \quad 0.16 \quad 0.14 \quad 0.11 \quad 0.091 \quad 0.074 \quad 0.059 \quad 0.043 \quad 0.022 \quad 4.7 \cdot 10^{-9})$$

Da \bar{p} si può calcolare N e si ottiene $N = 3.22$. Questo valore è in disaccordo con il valore teorico

$$N = \frac{2 - \rho}{2} \frac{\rho}{1 - \rho} = 4.95$$

La differenza è dovuta al troncamento. Infatti ponendo $n = 20$ si ottiene

$$\bar{p} = (0.1 \quad 0.15 \quad 0.14 \quad 0.12 \quad 0.096 \quad 0.078 \quad 0.063 \quad 0.051 \quad 0.042 \quad 0.034 \quad 0.028 \quad 0.022 \quad 0.018 \quad \dots)$$

$$N = 4.55$$

e ponendo $n = 50$ si ottiene

$$\bar{p} = (0.1 \quad 0.15 \quad 0.14 \quad 0.12 \quad 0.094 \quad 0.076 \quad 0.062 \quad 0.05 \quad 0.041 \quad 0.033 \quad 0.027 \quad 0.022 \quad 0.018 \quad \dots)$$

$$N = 4.94797$$

■

Esercizio 8: Si modelli un senso unico alternato supponendo che i flussi di traffico nei due sensi siano rispettivamente di 4 macchine al minuto e di 10 macchine al minuto, assimilabili a due processi indipendenti di Poisson. Si supponga che il flusso di traffico che percorre il senso unico, ad apertura del segnale verde, sia un flusso regolare di una macchina ogni due secondi (finché ci sono macchine naturalmente) e che il tempo necessario ad una macchina per percorrere il senso unico sia di 10 secondi. Il traffico sia regolato da un semaforo che sarà verde per T_1 secondi per uno dei due flussi (ad esempio quello di 10 macchine/minuto) sarà rosso per 10 secondi per entrambi i flussi (per permettere lo smaltimento del traffico), sarà verde per T_2 secondi per l'altro flusso, sarà nuovamente rosso per 10 secondi in entrambe le direzioni e così di seguito ciclicamente. Si calcolino T_1 e T_2 in modo da minimizzare i tempi medi di attesa. Si noti che la frazione di tempo utile per far passare il traffico è data da $(T_1 + T_2)/(T_1 + T_2 + 20)$ quindi la massima quantità di traffico viene smaltita quando T_1 e T_2 sono grandi in modo da rendere trascurabile l'effetto dei tempi morti (10 secondi in ogni direzione). Tuttavia in questo modo si generano code lunghe alternativamente nelle due direzioni e questo allunga i tempi medi di attesa. Il problema può essere convenientemente modellato

considerando gli istanti di tempo “peggiori”, cioè i momenti in cui si accende il segnale verde (e quindi la coda è più lunga) e campionando il processo negli istanti di commutazione del semaforo. Si noti che le due code costituiscono due processi indipendenti (una volta fissati i tempi di verde) e quindi possono essere analizzate separatamente. Dopo aver impostato il modello lo si risolve per via numerica e si trovi l’ottimo (dopo aver scelto soggettivamente cosa si intende per “ottimo”) provando diversi valori.

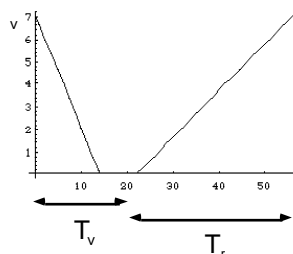
Soluzione: Si consideri uno solo dei due flussi. Siano λ il numero di macchine/secondo d’arrivo del flusso, T_v la durata del verde e T_r la durata del rosso espresse in secondi. Siccome il flusso di smaltimento del senso unico è di una macchina ogni due secondi, il numero massimo di macchine che può transitare nell’intervallo T_v è $m := \lfloor T_v/2 \rfloor$. Sia i il numero di macchine in coda all’istante in cui il semaforo diventa verde e j quando diventa rosso. Se arrivano k macchine mentre il semaforo è verde, si avrà $j = \max\{i + k - m, 0\}$ (supponiamo per semplicità che le k macchine arrivino all’inizio, in modo cioè che riescano a passare oltre se la coda è ridotta o nulla; quest’approssimazione non dovrebbe causare problemi). Se $i + k - m > 0$ allora la probabilità che $j = i + k - m$ è $(\lambda T_v)^k / k! e^{-\lambda T_v}$. Se $i > m$ la probabilità di avere $j < i - m$ è ovviamente nulla. Inoltre se $i \leq m$ e $j = 0$ la probabilità è $\sum_{k=0}^{m-i} (\lambda T_v)^k / k! e^{-\lambda T_v}$. Riassumendo la matrice di transizione P_{vr} fra gli istanti di inizio verde e inizio rosso è data da:

$$P_{vr}(i, j) = \begin{cases} 0 & \text{se } i - j > m \\ \sum_{k=0}^{m-i} \frac{(\lambda T_v)^k}{k!} e^{-\lambda T_v} & \text{se } j = 0 \text{ e } i \leq m \\ \frac{(\lambda T_v)^k}{k!} e^{-\lambda T_v} & \text{se } j = i + k - m > 0 \end{cases}$$

La matrice di transizione P_{rv} fra gli istanti di inizio rosso e inizio verde è invece data da:

$$P_{rv}(i, j) = \begin{cases} 0 & \text{se } j < i \\ \frac{(\lambda T_r)^k}{k!} e^{-\lambda T_r} & \text{se } j = i + k \end{cases}$$

Infine la matrice di transizione P fra due istanti successivi di inizio verde è data da $P = P_{vr} P_{rv}$. Per il calcolo numerico di P e della probabilità stazionaria bisogna fissare un numero finito ($n + 1$) di stati. Questo comporta una correzione nel calcolo delle matrici di transizione in quanto il troncamento fa sì che $\sum_{j=0}^n P(i, j) < 1$. La correzione può essere fatta ad esempio ponendo $P_{vr}(i, n) = 1 - \sum_{j=0}^{n-1} P_{vr}(i, j)$ e analogamente per P_{rv} . Per valutare quale valore di n usare si può procedere provando diversi valori in modo che nel calcolo della probabilità stazionaria \bar{q} si abbia \bar{q}_n molto piccolo (ad esempio inferiore a 10^{-3}). Calcolato \bar{q} si trova il numero medio di macchine in coda all’istante di inizio verde calcolando $N_v = \sum_{i=0}^n i \bar{q}_i$. Questo valore non è tuttavia il numero medio di macchine nel sistema. Il grafico di $N(t)$ è del seguente tipo:



$$P = 0.01 \begin{pmatrix} 0 & 3 & 7 & 12 & 16 & 17 & 15 & 12 & 8 & 5 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 7 & 12 & 16 & 17 & 15 & 12 & 8 & 5 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 7 & 12 & 16 & 17 & 15 & 12 & 8 & 5 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 7 & 12 & 16 & 17 & 15 & 12 & 8 & 5 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 7 & 12 & 16 & 17 & 15 & 12 & 8 & 5 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 7 & 12 & 16 & 17 & 15 & 12 & 8 & 5 & 3 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 7 & 12 & 16 & 17 & 15 & 12 & 8 & 5 & 3 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 7 & 12 & 16 & 17 & 15 & 12 & 8 & 5 & 3 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 6 & 11 & 15 & 17 & 15 & 12 & 9 & 5 & 3 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 6 & 10 & 14 & 16 & 15 & 13 & 9 & 6 & 4 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 5 & 9 & 13 & 15 & 15 & 13 & 10 & 7 & 5 & 3 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 7 & 11 & 13 & 14 & 13 & 11 & 9 & 6 & 4 & 3 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 5 & 8 & 11 & 13 & 13 & 12 & 10 & 8 & 6 & 4 & 3 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 5 & 8 & 11 & 12 & 13 & 12 & 10 & 8 & 6 & 4 & 3 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 & 6 & 8 & 11 & 12 & 12 & 12 & 10 & 8 & 6 & 4 & 3 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 3 & 6 & 8 & 10 & 12 & 12 & 12 & 10 & 8 & 6 & 4 & 3 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 3 & 6 & 8 & 10 & 12 & 12 & 12 & 10 & 8 & 6 & 4 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 3 & 6 & 8 & 10 & 12 & 12 & 12 & 10 & 8 & 6 & 4 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 3 & 6 & 8 & 10 & 12 & 12 & 12 & 12 & 10 & 8 & 6 & 10 \end{pmatrix}$$

Calcolando P^n si ottiene la seguente probabilità limite

$$\bar{q} = 0.01 \{3, 10, 17, 20, 18, 13, 8, 5, 2, 1, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0\}$$

che fornisce $N_{v1} = 5.5$. L'analogo calcolo per l'altro flusso porta a $N_{v2} = 3.7$. Eseguendo il calcolo dei valori medi N_1 e N_2 per vari valori di T_{v1} e T_{v2} si ottiene la seguente tabella dove si riportano i valori di $N_1 + N_2$ per $T_{v1} = 18, 20, \dots, 34$ e $T_{v2} = 8, 10, \dots, 16$. Come si vede i valori minimi si ottengono quando $T_{v1}/T_{v2} = \lambda_1/\lambda_2$. Globalmente il valore minimo si ottiene per $T_{v1} = 30$ e $T_{v2} = 12$.

*	8	10	12	14	16
18	4.42	4.65	5.35	*	*
20	4.18	4.03	4.36	*	*
22	4.25	3.79	3.93	4.24	4.67
24	4.52	3.71	3.73	3.93	4.21
26	*	3.71	3.64	3.77	3.97
28	*	3.79	3.62	3.69	3.85
30	*	3.91	3.62	3.66	3.78
32	*	*	3.66	3.65	*
34	*	*	*	3.66	*