Breve introduzione alle funzioni generatrici

Sia data la ricorsione

$$a_n = 2\,a_{n-1}, \qquad a_0 = 1 \tag{1}$$

Ovviamente $a_n = 2^n$. Seguiamo un altro metodo. Sia

$$A = \{\, a_0\,,\ a_1\,,\ a_2\,,\ a_3\,,\ \ldots \}$$

una successione di infiniti numeri interi. Dati

$$A = \{\, a_0\,,\ a_1\,,\ a_2\,,\ a_3\,,\ \ldots \} \qquad B = \{\, b_0\,,\ b_1\,,\ b_2\,,\ b_3\,,\ \ldots \}$$

si definisce

$$A + B = \{\, a_0 + b_0\,,\ a_1 + b_1\,,\ a_2 + b_2\,,\ a_3 + b_3\,,\ \ldots \}$$

e, dato un numero intero c, si definisce

$$c\,A = \{\, c\,a_0\,,\ c\,a_1\,,\ c\,a_2\,,\ c\,a_3\,,\ \ldots \}$$

Definiamo le seguenti trasformazioni

$$\mathbf{I}\,A = A \qquad \text{(identità)}$$

e

$$\mathbf{Z}\,\{\, a_0\,,\ a_1\,,\ a_2\,,\ a_3\,,\ \ldots \} = \{\, 0\,,\ a_0\,,\ a_1\,,\ a_2\,,\ \ldots \} \qquad \text{(spostamento)}$$

Con $\mathbf{Z}^2$ si intende la trasformazione applicata due volte, cioè

$$\mathbf{Z}^2\,A = \mathbf{Z}\,\mathbf{Z}\,\{\, a_0\,,\ a_1\,,\ a_2\,,\ a_3\,,\ \ldots \} = \mathbf{Z}\,\{\, 0\,,\ a_0\,,\ a_1\,,\ a_2\,,\ \ldots \} = \{\, 0\,,\ 0\,,\ a_0\,,\ a_1\,,\ \ldots \}$$

Sia ancora

$$U = \{\, 1\,,\ 0\,,\ 0\,,\ 0\,,\ \ldots \}$$

Allora (1) è equivalente a

$$A = 2\,\mathbf{Z}\,A + U$$

cioè

$$A - 2\,\mathbf{Z}\,A = U$$

o anche

$$(\,\mathbf{I} - 2\,\mathbf{Z}\,)\,A = U$$

Si noti che

$$(\,\mathbf{I} + 2\,\mathbf{Z} + 2^2\,\mathbf{Z}^2 + 2^3\,\mathbf{Z}^3 + 2^4\,\mathbf{Z}^4 + 2^5\,\mathbf{Z}^5 + \ldots)\,(\,\mathbf{I} - 2\,\mathbf{Z}\,) = \mathbf{I}$$

Quindi possiamo chiamare $(\mathbf{I}+2\mathbf{Z}+2^2\mathbf{Z}^2+2^3\mathbf{Z}^3+2^4\mathbf{Z}^4+2^5\mathbf{Z}^5+\dots)$ la trasformazione inversa di $(\mathbf{I}-2\mathbf{Z})$ e indicarla

$$(\mathbf{I}-2\mathbf{Z})^{-1}=(\mathbf{I}+2\mathbf{Z}+2^2\mathbf{Z}^2+2^3\mathbf{Z}^3+2^4\mathbf{Z}^4+2^5\mathbf{Z}^5+\dots)$$

Allora

$$A=(\mathbf{I}-2\mathbf{Z})^{-1}U=(\mathbf{I}+2\mathbf{Z}+2^2\mathbf{Z}^2+2^3\mathbf{Z}^3+2^4\mathbf{Z}^4+2^5\mathbf{Z}^5+\dots)U$$

Si noti che

$$\mathbf{Z}U=\{0,1,0,0,\dots\}$$

$$\mathbf{Z}^2U=\{0,0,1,0,\dots\}$$

$$\mathbf{Z}^3U=\{0,0,0,1,\dots\}$$

Allora

$$A=\left\{1,2,2^2,2^3,\dots\right\}$$

da cui $a_n=2^n$.

Da questo esempio si impara anche che

$$(\mathbf{I}-a\mathbf{Z})^{-1}U=\left\{1,a,a^2,a^3,\dots\right\}$$

e in particolare

$$(\mathbf{I}-\mathbf{Z})^{-1}U=\{1,1,1,1,\dots\}$$

Inoltre

$$(\mathbf{I}-\mathbf{Z})^{-2}U=(\mathbf{I}-\mathbf{Z})^{-1}(\mathbf{I}-\mathbf{Z})^{-1}U=(\mathbf{I}-\mathbf{Z})^{-1}\{1,1,1,1,\dots\}=$$

$$(\mathbf{I}+\mathbf{Z}+\mathbf{Z}^2+\mathbf{Z}^3+\mathbf{Z}^4+\dots)\{1,1,1,1,\dots\}=$$

$$\{1,1,1,1,\dots\}+\{0,1,1,1,\dots\}+\{0,0,1,1,\dots\}+\dots=\{1,2,3,4,\dots\}$$

e

$$(\mathbf{I}-a\,\mathbf{Z})^{-1}(\mathbf{I}-a\mathbf{Z})^{-1}U=(\mathbf{I}-a\mathbf{Z})^{-1}\left\{1,a,a^2,a^3,\dots\right\}=$$

$$(\mathbf{I}+a\mathbf{Z}+a^2\mathbf{Z}^2+a^3\mathbf{Z}^3+a^4\mathbf{Z}^4+\dots)\left\{1,a,a^2,a^3,\dots\right\}=$$

$$\left\{1,a,a^2,a^3,\dots\right\}+\left\{0,a,a^2,a^3\ \dots\right\}+\left\{0,0,a^2,a^3,\dots\right\}+\dots=$$

$$\left\{1,2a,3a^2,4a^3,\dots\right\}$$

Ancora

$$(\mathbf{I}+a\mathbf{Z}^2+a^2\mathbf{Z}^4+a^3\mathbf{Z}^6+a^4\mathbf{Z}^8+a^5\mathbf{Z}^{10}+\dots)(\mathbf{I}-a\mathbf{Z}^2)=\mathbf{I}$$

e quindi

$$(\mathbf{I}-a\,\mathbf{Z}^2)^{-1}U=\left\{1,0,a,0,a^2,0,a^3\ \dots\right\}$$

e in particolare

$$(\mathbf{I} - \mathbf{Z}^2)^{-1} U = \{ 1 , 0 , 1 , 0 , 1 , 0 , 1 \ldots \}$$

Scriviamo le precedenti relazioni in modo più semplice. Si noti che

$$A = \{ a_0 , a_1 , a_2 , a_3 , \ldots \} = (a_0 + a_1 \mathbf{Z} + a_2 \mathbf{Z}^2 + a_3 \mathbf{Z}^3 + \ldots) U$$

e possiamo identificare A con una particolare funzione di $\mathbf{Z}$:

$$A(\mathbf{Z}) = (a_0 + a_1 \mathbf{Z} + a_2 \mathbf{Z}^2 + a_3 \mathbf{Z}^3 + \ldots)$$

Allora la relazione

$$(\mathbf{I} - 2 \mathbf{Z}) A = U$$

diventa

$$(\mathbf{I} - 2 \mathbf{Z}) A(\mathbf{Z}) U = U$$

quindi

$$(\mathbf{I} - 2 \mathbf{Z}) A(\mathbf{Z}) = \mathbf{I}$$

da cui

$$A(\mathbf{Z}) = (\mathbf{I} - 2 \mathbf{Z})^{-1}$$

Siccome l'operatore $\mathbf{Z}$ obbedisce le medesime regole dei numeri, si può anche manipolare $\mathbf{Z}$ come fosse una variabile numerica z, per cui scriviamo

$$A(z) = \frac{1}{1 - 2z}$$

e abbiamo le seguenti associazioni

$$\begin{array}{llllll}
a_n = a^n & \longleftrightarrow & \left\{ 1 , a , a^2 , a^3 , \ldots \right\} & \longleftrightarrow & \dfrac{1}{1 - a z} \\
a_n = 1 & \longleftrightarrow & \{ 1 , 1 , 1 , 1 , \ldots \} & \longleftrightarrow & \dfrac{1}{1 - z} \\
a_n = (-1)^n & \longleftrightarrow & \{ 1 , -1 , 1 , -1 , \ldots \} & \longleftrightarrow & \dfrac{1}{1 + z} \\
a_n = (1 + (-1)^n)/2 & \longleftrightarrow & \{ 1 , 0 , 1 , 0 , \ldots \} & \longleftrightarrow & \dfrac{1}{2} (\dfrac{1}{1 + z} + \dfrac{1}{1 - z}) = \dfrac{1}{1 - z^2} \\
a_n = n + 1 & \longleftrightarrow & \{ 1 , 2 , 3 , 4 , \ldots \} & \longleftrightarrow & \dfrac{1}{(1 - z)^2} \\
a_n = n & \longleftrightarrow & \{ 0 , 1 , 2 , 3 , \ldots \} & \longleftrightarrow & \dfrac{z}{(1 - z)^2} \\
a_n = (n + 1) a^n & \longleftrightarrow & \left\{ 1 , 2a , 3a^2 , 4a^3 , \ldots \right\} & \longleftrightarrow & \dfrac{1}{(1 - a z)^2} \\
a_n = n a^{n-1} & \longleftrightarrow & \left\{ 0 , 1 , 2a , 3a^2 , \ldots \right\} & \longleftrightarrow & \dfrac{z}{(1 - a z)^2} \\
a_n = \binom{m + n - 1}{n} & \longleftrightarrow & \left\{ 1 , m , \dfrac{m(m+1)}{2} , \ldots \right\} & \longleftrightarrow & \dfrac{1}{(1 - z)^m}
\end{array}$$

Applichiamo le idee viste ad una ricorsione più difficile

$$a_n = 5\,a_{n-1} - 6\,a_{n-2}, \qquad a_0 = 0,\ a_1 = 1 \tag{2}$$

Calcolando

$$a_2 = 5, \quad a_3 = 19, \quad a_4 = 65, \quad a_5 = 211, \quad a_6 = 665$$

Difficile trovare una forma chiusa per tentativi. Allora (2) si può scrivere come

$$A = 5\,\mathbf{Z}\,A - 6\,\mathbf{Z}^2\,A + \mathbf{Z}\,U$$

Applicando il metodo precedente si ha

$$A(z) - 5\,z\,A(z) + 6\,z^2\,A(z) = z$$

$$A(z) = \frac{z}{1 - 5\,z + 6\,z^2} = \frac{z}{(1 - 2\,z)\,(1 - 3\,z)} \tag{3}$$

Anziché sviluppare (3) direttamente ci chiediamo se esistono coefficienti α e β tali che

$$A(z) = \frac{z}{(1 - 3\,z)\,(1 - 2\,z)} = \frac{\alpha}{1 - 3\,z} + \frac{\beta}{1 - 2\,z} \tag{4}$$

da cui in base ai risultati precedenti

$$a_n = \alpha\,3^n + \beta\,2^n \tag{5}$$

Per calcolare α e β ci sono due modi di procedere. Nel primo si verifica per quali valori di α e β si ha un'identità in (4). Nel secondo si sfrutta (5) usando valori noti della ricorsione. Nel primo metodo sviluppando (4) si ottiene

$$\frac{z}{(1 - 3\,z)\,(1 - 2\,z)} = \frac{\alpha\,(1 - 2\,z) + \beta\,(1 - 3\,z)}{(1 - 3\,z)\,(1 - 2\,z)}$$

che porta a

$$\begin{aligned} \alpha + \beta &= 0 \\ -\,2\,\alpha - 3\,\beta &= 1 \end{aligned}$$

da cui $\alpha = 1$ e $\beta = -1$. Nel secondo metodo da $a_0 = 0$ e $a_1 = 1$, (5) fornisce $0 = \alpha + \beta$ e $1 = 3\,\alpha + 2\,\beta$ e quindi si riottiene $\alpha = 1$ e $\beta = -1$. Quindi

$$a_n = 3^n - 2^n$$

Applichiamo le regole ai numeri di Fibonacci F_k generati dalla ricorsione

$$F_0 := 0, \qquad F_1 := 1, \qquad F_{k+1} := F_k + F_{k-1}, \quad k \geqslant 1$$

Sia $F = \{\,F_0\ ,\ F_1\ ,\ F_2\ ,\ F_3\ ,\ \ldots\}$. La ricorsione si può scrivere come

$$F = \mathbf{Z}\,F + \mathbf{Z}^2\,F + \mathbf{Z}\,U$$

da cui

$$F(z) = \frac{z}{1 - z - z^2} = \frac{z}{(1 - \varphi\,z)\,(1 - \psi\,z)}$$

con

$$\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}, \quad \psi = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

Come prima cerchiamo coefficienti α e β tali che

$$F(z) = \frac{z}{(1-\varphi z)(1-\psi z)} = \frac{\alpha}{1-\varphi z} + \frac{\beta}{1-\psi z}$$

da cui

$$\begin{aligned} \alpha + \quad \beta &= 0 \\ -\psi\alpha - \varphi\beta &= 1 \end{aligned}$$

$$\alpha = \frac{1}{\varphi - \psi} = \frac{1}{\sqrt{5}} \qquad \beta = \frac{1}{\psi - \varphi} = -\frac{1}{\sqrt{5}}$$

e allora

$$F_k = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^k - \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^k$$

Siccome il secondo dei due termini è minore di 1 e tende a 0 si ha $F_n = \Theta(\alpha^n)$ con $\alpha > 1$.

Consideriamo il caso più difficile dei numeri di Catalan. Definiamo i seguenti problemi:

– quante stringhe di n zeri e n uni esistono in cui in ogni prefisso (un prefisso di una stringa sono i simboli dal primo fino ad un determinato simbolo) il numero di uni è maggiore del numero di zeri? Ad esempio per $n = 3$ la stringa 110100 è ammessa, mentre la stringa 110010 non lo è. Per $n = 4$ le stringhe ammesse sono: 11110000, 11101000, 11100100, 11011000, 11010100.

– quanti cammini esistono sui nodi $0, 1, 2, 3, \ldots$ con archi $(i, i+1)$ che partono da 0 e ritornano a 0 (senza toccarlo durante il cammino) e di lunghezza $2n$? Questo problema è equivalente al precedente in quanto ogni spostamento $i \to i+1$ corrisponde ad un 1, mentre ogni spostamento $i \to i-1$ corrisponde ad uno 0.

– quanti cammini esistono in una griglia quadrata di $n \times n$ lati che partono dal nodo in alto a sinistra e arrivano al nodo in basso a destra senza mai toccare la diagonale (tranne nel primo e nell'ultimo punto) e andando sempre verso sinistra o verso il basso? Questo problema è equivalente al primo in quanto ogni spostamento orizzontale corrisponde ad un 1, e ogni spostamento verticale ad uno 0.

– in quanti modi si può eseguire il prodotto (o la somma, o qualsiasi operazione binaria) di n numeri, sfruttando ogni volta in modo diverso la regola associativa? Ad esempio $a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot a_4$ si può eseguire come $a_1 \cdot (a_2 \cdot (a_3 \cdot a_4))$, $a_1 \cdot ((a_2 \cdot a_3) \cdot a_4)$, $(a_1 \cdot a_2) \cdot (a_3 \cdot a_4)$, $((a_1 \cdot a_2) \cdot a_3) \cdot a_4$, $(a_1 \cdot (a_2 \cdot a_3)) \cdot a_4$.

Anche il quarto problema è uguale al primo. Per dimostrarlo si consideri di eseguire l'operazione come in una pila. I numeri vengono immessi uno sopra l'altro in una pila. Ogni immissione di un numero corrisponde ad un 1 della stringa. Ogni tanto si può decidere di eseguire l'operazione sugli ultimi due numeri della pila che vengono tolti e sostituiti dall'unico numero risultato della precedente operazione. Eseguire l'operazione corrisponde ad uno 0 nella stringa. Il numero di operazioni è $n-1$, quindi ci sono $n-1$ zeri e l'ultimo zero viene aggiunto in ogni caso. Ad esempio $a_1 \cdot ((a_2 \cdot a_3) \cdot a_4)$ corrisponde a 11101000 e $(a_1 \cdot (a_2 \cdot a_3)) \cdot a_4$ corrisponde a 11100100.

Il numero in questione è data dai cosiddetti numeri di Catalan

$$\frac{1}{n}\binom{2\,(n-1)}{n-1}$$

Dimostriamolo facendo riferimento al caso della griglia. Sia A_n il numero di tali cammini che chiamiamo di tipo a. Inoltre, sia C_n il numero di cammini che possono toccare la diagonale e stanno tutti nella parte triangolare alta della griglia (cioè in ogni prefisso il numero di 1 è maggiore o uguale al numero di 0). Questi cammini siano di tipo b. Allora

$$A_n = C_{n-1} \tag{6}$$

Etichettiamo i nodi della diagonale a partire dal nodo in alto a sinistra come $\{0, 1, 2, \ldots, n\}$. Sia k l'ultimo nodo sulla diagonale (escluso il nodo finale) che viene toccato da un cammino di tipo b. Questo nodo può essere uno qualsiasi dei nodi $\{0, 1, 2, \ldots, n-1\}$.

Allora un cammino di tipo b è un cammino di tipo b fino a k e poi di tipo a. Quindi vale la ricorsione

$$C_n = C_0\,A_n + C_1\,A_{n-1} + C_2\,A_{n-2} + \ldots + C_{n-2}\,A_2 + C_{n-1}\,A_1$$

e, usando (6)

$$A_{n+1} = A_1\,A_n + A_2\,A_{n-1} + A_3\,A_{n-2} + \ldots + A_{n-1}\,A_2 + A_n\,A_1$$

cioè

$$A_n = A_1\,A_{n-1} + A_2\,A_{n-2} + A_3\,A_{n-3} + \ldots + A_{n-2}\,A_2 + A_{n-1}\,A_1 = \sum_{k=1}^{n-1} A_k\,A_{n-k}$$

Poniamo convenzionalmente $A_n = 0$ se $n \leqslant 0$. Quindi la ricorsione non è vera per $n = 1$, in quanto $A_1 = 1$. Per renderla vera per ogni n, aggiungiamo il termine $[n = 1]$ dove $[P] = 1$ se P è vero e $[P] = 0$ se P è falso. Allora la seguente ricorsione è vera per ogni n

$$A_n = \sum_k A_k\,A_{n-k} + [n = 1] \qquad \forall n$$

Moltiplichiamo per z^n

$$A_n\,z^n = \sum_k A_k\,z^k\,A_{n-k}\,z^{n-k} + [n = 1]\,z^n \qquad \forall n$$

e sommiamo su tutti gli n

$$\sum_n A_n\,z^n = \sum_n \sum_k A_k\,z^k\,A_{n-k}\,z^{n-k} + z$$

$$\sum_n A_n\,z^n = \sum_k \sum_n A_k\,z^k\,A_{n-k}\,z^{n-k} + z$$

$$\sum_n A_n\,z^n = \sum_k A_k\,z^k \sum_n A_{n-k}\,z^{n-k} + z$$

$$\sum_n A_n\,z^n = \sum_k A_k\,z^k \sum_h A_h\,z^h + z$$

$$\sum_n A_n z^n = (\sum_n A_n z^n)^2 + z$$

Definiamo

$$G(z) := \sum_n A_n z^n$$

Allora abbiamo

$$G(z) = G^2(z) + z \qquad \Longrightarrow \qquad G^2(z) - G(z) + z = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad G(z) = \frac{1 \pm \sqrt{1-4z}}{2}$$

Poiché $G(0) = A_0 = 0$ una radice viene scartata e si ha

$$G(z) = \frac{1 - \sqrt{1-4z}}{2} \tag{7}$$

Calcoliamo i valori A_n. Si ha

$$A_n = \frac{G^{(n)}(0)}{n!}$$

e quindi

$$\begin{aligned} G^{(1)}(z) &= -\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot(-4)\cdot(1-4z)^{-1/2} = (1-4z)^{-1/2} \\ G^{(2)}(z) &= -\frac{1}{2}\cdot(-4)\,(1-4z)^{-3/2} = 2\,(1-4z)^{-3/2} \\ G^{(3)}(z) &= -\frac{3}{2}\cdot(-4)\cdot 2\,(1-4z)^{-5/2} = 2^2\cdot 3\ (1-4z)^{-5/2} \\ G^{(4)}(z) &= -\frac{5}{2}\cdot(-4)\cdot 2^2\cdot 3\,(1-4z)^{-7/2} = 2^3\cdot 5\cdot 3\ (1-4z)^{-7/2} \end{aligned}$$

e in generale

$$G^{(n)} = 2^{n-1}\cdot(2n-3)!_o\,(1-4z)^{-(2n-1)/2}$$

dove $n!_o$ è il prodotto dei numeri dispari minori o uguali a n. Quindi

$$A_n = \frac{G^{(n)}(0)}{n!} = \frac{2^{n-1}\cdot(2n-3)!_o}{n!}$$

Ora, sia $n!_e$il prodotto dei numeri pari minori o uguali a n. Si noti che se n è pari $n!_e = (n/2)!\,2^{n/2}$. Quindi si ha

$$(2n)! = (2n)!_e\cdot(2n)!_o = n!\,2^n\,(2n)!_o \qquad \Longrightarrow \qquad (2n)!_o = \frac{(2n)!}{n!\,2^n} \qquad \Longrightarrow \qquad (2n-3)!_o = \frac{(2n-2)!}{(n-1)!\,2^{n-1}}$$

e allora

$$A_n = \frac{(2n-2)!}{n!\,(n-1)!} = \frac{1}{n}\binom{2n-2}{n-1} \qquad \Longrightarrow \qquad C_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$$

I numeri C_n sono i numeri di Catalan e loro funzione generatrice si può calcolare dalla funzione generatrice degli A_n. Infatti

$$G(z) = \frac{1-\sqrt{1-4z}}{2} = \sum_{n\geqslant 1} A_n z^n = \sum_{n\geqslant 1} C_{n-1} z^n = z\sum_{n\geqslant 1} C_{n-1} z^{n-1}$$

per cui

$$\sum_n C_n z^n = \frac{1-\sqrt{1-4z}}{2z}$$

Tabella delle funzioni generatrici di uso più comune

successione	funzione generatrice	forma chiusa
$< 1, 0, , 0, 0, \ldots >$	$\sum_{k \geqslant 0} [k = 0]\, x^k$	1
$< 0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots >$	$\sum_{k \geqslant 0} [k = m]\, x^k$	x^m
$< 1, 1, \ldots, 1, 0, \ldots >$	$\sum_{k \geqslant 0} [k \leqslant m]\, x^k$	$\frac{1 - x^{m+1}}{1 - x}$
$< 1, 1, 1, \ldots >$	$\sum_{k \geqslant 0} x^k$	$\frac{1}{1 - x}$
$< 1, -1, 1, -1, 1, -1, \ldots >$	$\sum_{k \geqslant 0} (-1)^k\, x^k$	$\frac{1}{1 + x}$
$< 1, 2, 4, 8, 16, \ldots >$	$\sum_{k \geqslant 0} 2^k\, x^k$	$\frac{1}{1 - 2\,x}$
$< 1, a, a^2, a^3, \ldots >$	$\sum_{k \geqslant 0} a^k\, x^k$	$\frac{1}{1 - a\,x}$
$< 1, 0, 1, 0, 1, 0, \ldots >$	$\sum_{k \geqslant 0} [k \text{ pari }]\, x^k$	$\frac{1}{1 - x^2}$
$< 1, 2, 3, 4, 5, 6, \ldots >$	$\sum_{k \geqslant 0} (k + 1)\, x^k$	$\frac{1}{(1 - x)^2}$
$< 1, \binom{m+1}{m}, \binom{m+2}{m}, \ldots >$	$\sum_{k \geqslant 0} \binom{m+k}{m}\, x^k$	$\frac{1}{(1 - x)^{m+1}}$
$< 1, m+1, \binom{m+2}{2}, \binom{m+3}{3}, \ldots >$	$\sum_{k \geqslant 0} \binom{m+k}{k}\, x^k$	$\frac{1}{(1 - x)^{m+1}}$
$< 1, 2, 1, 0, 0, \ldots >$	$\sum_{k \geqslant 0} \binom{2}{k}\, x^k$	$(1 + x)^2$
$< 1, m, \binom{m}{2}, \binom{m}{3}, \ldots >$	$\sum_{k \geqslant 0} \binom{m}{k}\, x^k$	$(1 + x)^m$
$< 1, 1, 2, 5, 14, 42, \ldots >$	$\sum_{k \geqslant 0} \frac{1}{k+1} \binom{2\,k}{k}\, x^k$	$\frac{1 - \sqrt{1 - 4\,z}}{2\,z}$
$< 0, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots >$	$\sum_{k \geqslant 1} \frac{1}{k}\, x^k$	$\ln \frac{1}{1 - x}$
$< 0, 1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{4}, \ldots >$	$\sum_{k \geqslant 1} (-1)^{k+1}\, \frac{1}{k}\, x^k$	$\ln(1 + x)$
$< 1, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{6}, \frac{1}{24}, \ldots >$	$\sum_{k \geqslant 1} \frac{1}{k!}\, x^k$	e^x