Cenni di Algoritmi approssimati per TSP

In Ottimizzazione Combinatoria il termine approssimazione non ha un significato generico di 'sufficientemente vicino', ma un preciso significato tecnico dato dalla seguente definizione.
Definizione. Un algoritmo δ-approssimato per un problema X è un algoritmo polinomiale che, per ogni istanza i di X, fornisce una soluzione di valore $w(i)$ tale che

$$1 \leq \frac{w(i)}{v(i)} \leq \delta \qquad i \in X$$

se X è un problema di minimizzazione, e

$$1 \leq \frac{v(i)}{w(i)} \leq \delta \qquad i \in X$$

se X è un problema di massimizzazione, e dove $v(i) > 0$ è il valore ottimo dell'istanza i e δ viene detto fattore di approssimazione. ∎

Quindi l'errore relativo è sempre limitato da $\delta - 1$. Si noti che per problemi di massimo la definizione fa riferimento ai reciproci $1/w(i)$ e $1/v(i)$. Questa scelta è infatti più significativa. Se, ad esempio, tutte le istanze di un problema di massimizzazione hanno valori di funzione obiettivo non negativi e un algoritmo fornisce sistematicamente una soluzione di valore nullo, ha senso considerare tale errore uguale ad infinito piuttosto che uguale ad uno.

Può essere sorprendente scoprire che per alcuni problemi non può esistere alcun algoritmo δ-approssimato per nessun valore di δ non importa quanto grande, a meno che $\mathbf{P} = \mathbf{NP}$. Il TSP appartiene a questa categoria. Infatti se esistesse un tale algoritmo allora si potrebbero assegnare lunghezze 1 agli archi di un grafo $G = (N, E)$ e lunghezze $\delta\, n$ agli archi complementari e risolvere un problema di TSP sul grafo completo. Se G è hamiltoniano, un circuito ottimo è hamiltoniano in G ed ha lunghezza n, mentre un circuito non hamiltoniano ha lunghezza almeno $(n-1) + n\,\delta$. Siccome $(n - 1 + n\,\delta)/n = \delta + (n-1)/n > \delta$, l'algoritmo approssimato fornirà sempre un circuito hamiltoniano. Se invece il grafo non è hamiltoniano l'algoritmo approssimato (come un qualsiasi altro algoritmo) fornirà un circuito non hamiltoniano. Quindi si sarebbe in grado di decidere in tempo polinomiale se un grafo è hamiltoniano oppure no.

D'altra parte una classe ristretta di problemi di TSP in cui valga la diseguaglianza triangolare, cioè $c_{ij} \leq c_{ik} + c_{kj}$, $\forall i, j, k$, ammettono algoritmi approssimati.

Ad esempio si può dapprima calcolare il minimo albero di supporto del grafo, di costo $c(T)$, raddoppiare tutti gli archi e costruire un circuito euleriano di costo $2\,c(T)$ sul multigrafo ottenuto. Dal circuito euleriano si ottiene un circuito hamiltoniano H 'saltando' i nodi già visitati. Per la diseguaglianza triangolare $c(H) \leq 2\,c(T)$. Si noti ora che se si toglie un arco dal tour ottimo di costo c^* si ottiene un albero di supporto non necessariamente minimo. Quindi $c(T) < c^*$ e

$$c(H) \leq 2\,c(T) < 2\,c^*$$

da cui si ottiene un valore $\delta = 2$

Un migliore algoritmo approssimato si deve a a Christofides [1976]. Si calcola sempre un minimo albero di supporto, ma, anziché raddoppiare gli archi per ottenere un grafo euleriano, si aggiungono archi fra i nodi di grado dispari dell'albero. In particolare si calcola il minimo accoppiamento di costo $c(M)$ fra questi nodi. Il circuito euleriano ha costo $c(T) + c(M)$. Se dal tour ottimo si estraggono i cammini che connettono i nodi di grado dispari (dell'albero) si ha che

$$c^* = c(P(i_1, i_2)) + c(P(i_2, i_3)) + c(P(i_3, i_4)) + \ldots + c(P(i_(r-1), i_r)) + c(P(i_r, i_1))$$

dove r è il numero di nodi dispari e $c(P(i_p, i_{p+1}))$ è il costo del cammino fra il p-mo e il $(p+1)$-mo nodo dispari (nell'ordine in cui appaiono nel tour ottimo). Per la diseguaglianza triangolare si ha

$$c_{i_p, i_{p+1}} \leq c(P(i_p, i_{p+1}))$$

e se si prendono gli archi così ottenuti fra i nodi dispari si possono formare due accoppiamenti M_1 e M_2 per cui abbiamo

$$c(M_1) + c(M_2) \leq c^* \quad \Longrightarrow \quad 2\, c(M) \leq c^*$$

Quindi

$$c(H) \leq c(T) + c(M) \leq c^* + \frac{1}{2}\, c^*$$

da cui $\delta = 3/2$.