

Note sulle serie di Fourier

Rodica Toader, a.a. 2013/14

versione provvisoria (aggiornata al 13/02/2017)

1 Convergenza uniforme

Data una funzione $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, periodica di periodo $T > 0$, supponiamo di poter definire i coefficienti (reali) di Fourier:

$$a_k = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \cos\left(\frac{2\pi k}{T}t\right) dt, \quad b_k = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \sin\left(\frac{2\pi k}{T}t\right) dt$$

(ciò sarà possibile, ad esempio, se la funzione f è continua). Consideriamo allora le funzioni

$$f_n(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n \left(a_k \cos\left(\frac{2\pi k}{T}t\right) + b_k \sin\left(\frac{2\pi k}{T}t\right) \right),$$

e le loro “medie”

$$\sigma_n(t) = \frac{1}{n+1} [f_0(t) + f_1(t) + \dots + f_n(t)] .$$

Teorema 1.1 (Fejer). *Se $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ è periodica di periodo $T > 0$ e continua, allora*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_n(t) = f(t) ,$$

uniformemente in $t \in \mathbb{R}$.

Prima di iniziare la dimostrazione, per semplificare le notazioni, introduciamo i seguenti coefficienti (complessi) di Fourier:

$$c_k = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) e^{-i \frac{2\pi k}{T}t} dt .$$

Si vede allora che

$$c_k = \begin{cases} \frac{1}{2}(a_{-k} + ib_{-k}) & \text{se } k < 0, \\ \frac{1}{2}a_0 & \text{se } k = 0, \\ \frac{1}{2}(a_k - ib_k) & \text{se } k > 0, \end{cases}$$

per cui

$$f_n(t) = \sum_{k=-n}^n c_k e^{i \frac{2\pi k}{T}t}$$

e

$$\begin{aligned}
\sigma_n(t) &= \frac{1}{n+1} \left[c_0 e^0 + (c_{-1} e^{-i\frac{2\pi}{T}t} + c_0 e^0 + c_1 e^{i\frac{2\pi}{T}t}) + \dots + \right. \\
&\quad \left. + (c_{-n} e^{-i\frac{2\pi n}{T}t} + \dots + c_{-1} e^{-i\frac{2\pi}{T}t} + c_0 e^0 + c_1 e^{i\frac{2\pi}{T}t} + \dots + c_n e^{i\frac{2\pi n}{T}t}) \right] \\
&= \frac{1}{n+1} \left[(n+1)c_0 e^0 + n(c_{-1} e^{-i\frac{2\pi}{T}t} + c_1 e^{i\frac{2\pi}{T}t}) + \dots + 1(c_{-n} e^{-i\frac{2\pi n}{T}t} + c_n e^{i\frac{2\pi n}{T}t}) \right] \\
&= \frac{1}{n+1} \sum_{k=-n}^n (n+1-|k|) c_k e^{i\frac{2\pi k}{T}t} .
\end{aligned}$$

Dimostrazione. Per semplicità, considereremo il caso $T = 2\pi$. Questa ipotesi non sarà comunque restrittiva, potendoci sempre ricondurre con un cambiamento di variabile. Abbiamo quindi

$$c_k = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) e^{-ikt} dt , \quad f_n(t) = \sum_{k=-n}^n c_k e^{ikt} ,$$

e

$$\begin{aligned}
\sigma_n(t) &= \frac{1}{n+1} \sum_{k=-n}^n (n+1-|k|) c_k e^{ikt} \\
&= \frac{1}{n+1} \sum_{k=-n}^n (n+1-|k|) \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(s) e^{-iks} ds \right) e^{ikt} \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(s) K_n(t-s) ds ,
\end{aligned}$$

avendo posto

$$K_n(x) = \sum_{k=-n}^n \frac{n+1-|k|}{n+1} e^{ikx} .$$

Notiamo che, se $x = 0$ (o un multiplo intero di 2π),

$$K_n(0) = \frac{1+2+\dots+n+(n+1)+n+\dots+2+1}{n+1} = \frac{n(n+1)+(n+1)}{n+1} = n+1 ,$$

mentre, se x non è un multiplo intero di 2π ,

$$\begin{aligned}
K_n(x) &= \frac{1}{n+1} \left[e^{-inx} + 2e^{-i(n-1)x} + \dots + ne^{-ix} + (n+1)e^0 + \right. \\
&\quad \left. + ne^{ix} + \dots + 2e^{i(n-1)x} + e^{inx} \right] \\
&= \frac{1}{n+1} \left[e^{-inx} (1 + 2e^{ix} + \dots + ne^{i(n-1)x}) + (n+1)e^0 + \right. \\
&\quad \left. + e^{inx} (1 + 2e^{-ix} + \dots + ne^{-i(n-1)x}) \right] .
\end{aligned}$$

Essendo, per $\alpha \neq 1$,

$$\sum_{k=1}^n k \alpha^{k-1} = \frac{1 - (n+1)\alpha^n + n\alpha^{n+1}}{(1-\alpha)^2}$$

(lo si può dimostrare per induzione), ponendo alternativamente $\alpha = e^{ix}$ oppure $\alpha = e^{-ix}$ otteniamo:

$$\begin{aligned} K_n(x) &= \frac{1}{n+1} \left(e^{-inx} \frac{1 - (n+1)e^{inx} + ne^{i(n+1)x}}{(1 - e^{ix})^2} + (n+1)e^0 + \right. \\ &\quad \left. + e^{inx} \frac{1 - (n+1)e^{-inx} + ne^{-i(n+1)x}}{(1 - e^{-ix})^2} \right) \\ &= \frac{1}{n+1} \frac{e^{-inx} - 2e^{ix} + e^{i(n+2)x}}{(1 - e^{ix})^2} = \frac{e^{-inx}}{n+1} \left(\frac{1 - e^{i(n+1)x}}{1 - e^{ix}} \right)^2 \\ &= \frac{1}{n+1} \left(\frac{e^{-\frac{i(n+1)x}{2}} - e^{\frac{i(n+1)x}{2}}}{e^{-\frac{ix}{2}} - e^{\frac{ix}{2}}} \right)^2 = \frac{1}{n+1} \left(\frac{\sin\left(\frac{(n+1)x}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)} \right)^2. \end{aligned}$$

Osserviamo che $K_n(x) \geq 0$ per ogni x . Inoltre, fissato un $\delta \in]0, 2\pi[$, abbiamo che, se $x \in]\delta, 2\pi - \delta[$,

$$K_n(x) \leq \frac{1}{n+1} \left(\frac{1}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)} \right)^2 \leq \frac{1}{n+1} \left(\frac{1}{\sin\left(\frac{\delta}{2}\right)} \right)^2,$$

per cui $K_n(x)$ tende a 0 uniformemente in $]\delta, 2\pi - \delta[$. Osserviamo inoltre che

$$\int_0^{2\pi} K_n(x) dx = \sum_{k=-n}^n \frac{n+1-|k|}{n+1} \int_0^{2\pi} e^{ikx} dx = 2\pi,$$

indipendentemente da n . Ritornando a $\sigma_n(t)$, si ha:

$$\begin{aligned} \sigma_n(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(s) K_n(t-s) ds \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{t-2\pi}^t f(t-x) K_n(x) dx \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t-x) K_n(x) dx. \end{aligned}$$

Dimostriamo che $\sigma_n(t)$ converge a $f(t)$ uniformemente. Fissiamo $\varepsilon > 0$. Essendo f continua, esiste un $M > 0$ tale che

$$t \in [0, 2\pi] \Rightarrow |f(t)| \leq M,$$

e f è uniformemente continua su $[0, 2\pi]$, per cui esiste un $\delta > 0$ tale che

$$|t - t'| < \delta \Rightarrow |f(t) - f(t')| < \frac{\varepsilon}{4}.$$

Inoltre, esiste un $\bar{n}$ tale che

$$n \geq \bar{n} \Rightarrow \forall x \in [\delta, 2\pi - \delta], \quad |K_n(x)| \leq \frac{\varepsilon}{4M},$$

e quindi:

$$\begin{aligned}
|\sigma_n(t) - f(t)| &= \left| \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t-x) K_n(x) dx - \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) K_n(x) dx \right| \\
&= \frac{1}{2\pi} \left| \int_0^{2\pi} (f(t-x) - f(t)) K_n(x) dx \right| \\
&= \frac{1}{2\pi} \left| \int_0^\delta \dots dx + \int_\delta^{2\pi-\delta} \dots dx + \int_{2\pi-\delta}^{2\pi} \dots dx \right| \\
&\leq \frac{1}{2\pi} \left(\frac{\varepsilon}{4} \int_0^\delta K_n(x) dx + \frac{\varepsilon}{4M} \int_\delta^{2\pi-\delta} (|f(t-x)| + |f(t)|) dx + \frac{\varepsilon}{4} \int_{2\pi-\delta}^{2\pi} K_n(x) dx \right) \\
&\leq \frac{\varepsilon}{4} + 2M \frac{\varepsilon}{4M} + \frac{\varepsilon}{4} = \varepsilon .
\end{aligned}$$

Per stimare il terzo termine si è utilizzato che $|f(t-x) - f(t)| = |f(t-x+2\pi) - f(t)|$ e che $|(t-x+2\pi) - t| = |2\pi - x| \leq \delta$. La dimostrazione è così completa. $\square$

Ne segue immediatamente il seguente importante

Corollario 1.2. *Siano $f, \tilde{f} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ due funzioni continue e T -periodiche. Se per i rispettivi coefficienti di Fourier c_k e $\tilde{c}_k$ si ha che $c_k = \tilde{c}_k$ per ogni k , allora f e $\tilde{f}$ coincidono.*

Dimostrazione. Con le ovvie notazioni, avremo che $\sigma_n(t) = \tilde{\sigma}_n(t)$, per ogni n , per cui

$$f(t) - \tilde{f}(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} (\sigma_n(t) - \tilde{\sigma}_n(t)) = 0 ,$$

per ogni $t \in \mathbb{R}$. $\square$

Ci interessiamo ora alla convergenza delle funzioni f_n . Useremo la notazione

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \alpha_k = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sum_{k=-n}^n \alpha_k \right) .$$

Teorema 1.3. *Sia $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione continua e periodica di periodo $T > 0$. Se la serie $\sum_{k=-\infty}^{+\infty} |c_k|$ converge, allora*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(t) = f(t) ,$$

uniformemente in $t \in \mathbb{R}$. Scriveremo quindi:

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k e^{i \frac{2\pi k}{T} t} .$$

Dimostrazione. Essendo

$$\left| c_k e^{i \frac{2\pi k}{T} t} \right| \leq |c_k| ,$$

siccome la serie $\sum_{k=-\infty}^{+\infty} |c_k|$ converge, per il criterio di Weierstrass si ha che le f_n convergono uniformemente ad una certa funzione continua $\tilde{f}$. D'altra parte, per tale funzione si ha:

$$\begin{aligned}
\tilde{c}_k &= \frac{1}{T} \int_0^T \tilde{f}(t) e^{-i \frac{2\pi k}{T} t} dt = \frac{1}{T} \int_0^T \left(\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(t) \right) e^{-i \frac{2\pi k}{T} t} dt \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T f_n(t) e^{-i \frac{2\pi k}{T} t} dt = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \sum_{j=-n}^n c_j e^{i \frac{2\pi j}{T} t} e^{-i \frac{2\pi k}{T} t} dt \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=-n}^n \frac{1}{T} \int_0^T c_j e^{i \frac{2\pi(j-k)}{T} t} dt = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T c_k dt = c_k ,
\end{aligned}$$

per ogni k . Per il corollario al teorema di Fejer, f e $\tilde{f}$ coincidono, per cui la dimostrazione è completa. $\square$

Corollario 1.4. Sia $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione periodica di periodo $T > 0$. Se f è di classe C^2 , allora

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k e^{i \frac{2\pi k}{T} t} ,$$

uniformemente in $t \in \mathbb{R}$.

Dimostrazione. Integrando per parti due volte,

$$\begin{aligned} c_k &= \frac{1}{T} \int_0^T f(t) e^{-i \frac{2\pi k}{T} t} dt \\ &= \frac{1}{T} \left(\left[f(t) \frac{T}{-i2\pi k} e^{-i \frac{2\pi k}{T} t} \right]_0^T + \frac{T}{i2\pi k} \int_0^T f'(t) e^{-i \frac{2\pi k}{T} t} dt \right) \\ &= \frac{1}{i2\pi k} \int_0^T f'(t) e^{-i \frac{2\pi k}{T} t} dt \\ &= \frac{1}{i2\pi k} \left(\left[f'(t) \frac{T}{-i2\pi k} e^{-i \frac{2\pi k}{T} t} \right]_0^T + \frac{T}{i2\pi k} \int_0^T f''(t) e^{-i \frac{2\pi k}{T} t} dt \right) \\ &= \frac{T}{(i2\pi k)^2} \int_0^T f''(t) e^{-i \frac{2\pi k}{T} t} dt . \end{aligned}$$

Essendo f'' continua su $[0, T]$, esiste un $M > 0$ per cui

$$t \in [0, T] \quad \Rightarrow \quad |f''(t)| \leq M .$$

Quindi,

$$|c_k| = \frac{T}{(2\pi k)^2} \left| \int_0^T f''(t) e^{-i \frac{2\pi k}{T} t} dt \right| \leq \frac{T}{(2\pi k)^2} \int_0^T |f''(t) e^{-i \frac{2\pi k}{T} t}| dt \leq \frac{T^2 M}{(2\pi k)^2} ,$$

per cui la serie $\sum_{k=-\infty}^{+\infty} |c_k|$ converge, e il risultato segue dal teorema precedente. $\square$

Nota. I risultati sopra dimostrati si estendono senza difficoltà alle funzioni a valori complessi anziché reali.

Esercizi e osservazioni

1. Calcolare i coefficienti di Fourier associati alla funzione $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ periodica di periodo $T = 1$ definita da $f(t) = t$ per $0 \leq t < 1$.

Soluzione. Si ha

$$a_0 = 2 \int_0^1 t \, dt = 1,$$

e per ogni $k \geq 1$ numero naturale,

$$a_k = 2 \int_0^1 t \cos(2\pi kt) \, dt = \frac{2}{2\pi k} \left[t \sin(2\pi kt) \right]_0^1 - \frac{2}{2\pi k} \int_0^1 \sin(2\pi kt) \, dt = 0$$

$$b_k = 2 \int_0^1 t \sin(2\pi kt) \, dt = -\frac{2}{2\pi k} \left[t \cos(2\pi kt) \right]_0^1 + \frac{2}{2\pi k} \int_0^1 \cos(2\pi kt) \, dt = -\frac{1}{\pi k}.$$

2. Calcolare i coefficienti di Fourier associati alla funzione $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ periodica di periodo $T = 2\pi$ definita da $f(t) = t^2 + \sin(3t)$ per $0 \leq t < 2\pi$.

Soluzione. Siano a_k, b_k i coefficienti di Fourier della funzione f e siano α_k, β_k i coefficienti di Fourier della funzione 2π -periodica g definita da $g(t) = t^2$ per $0 \leq t < 2\pi$. Dal Corollario al Teorema di Fejer segue che $a_k = \alpha_k$ per ogni k , $b_k = \beta_k$ per ogni $k \neq 3$, mentre $b_3 = \beta_3 + 1$. Calcoliamo ora i coefficienti α_k e β_k :

$$\alpha_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} t^2 \, dt = \frac{8}{3}\pi^2,$$

$$\begin{aligned} \alpha_k &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} t^2 \cos(kt) \, dt = \frac{1}{\pi} \left(\left[\frac{1}{k} t^2 \sin(kt) \right]_0^{2\pi} - \frac{1}{k} \int_0^{2\pi} 2t \sin(kt) \, dt \right) \\ &= \frac{2}{k^2 \pi} \left(\left[t \cos(kt) \right]_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi} \cos(kt) \, dt \right) = \frac{4}{k^2}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \beta_k &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} t^2 \sin(kt) \, dt = \frac{1}{\pi} \left(\left[-\frac{1}{k} t^2 \cos(kt) \right]_0^{2\pi} + \frac{1}{k} \int_0^{2\pi} 2t \cos(kt) \, dt \right) \\ &= -\frac{4\pi}{k} + \frac{2}{k^2 \pi} \left(\left[t \sin(kt) \right]_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi} \sin(kt) \, dt \right) = -\frac{4\pi}{k}. \end{aligned}$$

Osservazioni Se $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ è una funzione periodica di periodo T e integrabile sui intervalli compatti, allora

$$\int_0^T g(x) \, dx = \int_a^{a+T} g(t) \, dt,$$

per qualsiasi $a \in \mathbb{R}$. Infatti, si ha

$$\int_a^{a+T} g(t) \, dt = \int_0^T g(t) \, dt + \int_T^{a+T} g(t) \, dt - \int_0^a g(t) \, dt = \int_0^T g(t) \, dt,$$

essendo

$$\int_T^{a+T} g(t) \, dt = \int_0^a g(t+T) \, dt = \int_0^a g(t) \, dt.$$

In particolare, ponendo $a = -\frac{T}{2}$ si ha

$$\int_0^T g(x)dx = \int_{-T/2}^{T/2} g(t)dt.$$

Useremo questa osservazione nel calcolo dei coefficienti di Fourier per funzioni pari e per funzioni dispari.

La seguente osservazione ci permette di passare da una funzione periodica di periodo $T > 0$ ad una funzione di periodo 2π e viceversa: se $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ è una funzione periodica di periodo T , la funzione $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definita da $h(x) = g(\frac{T}{2\pi}x)$ è periodica di periodo 2π . Infatti,

$$h(x + 2\pi) = g\left(\frac{T}{2\pi}(x + 2\pi)\right) = g\left(\frac{T}{2\pi}x + T\right) = g\left(\frac{T}{2\pi}x\right) = h(x).$$

2 Convergenza in media quadratica

Date due funzioni continue $f, g : [0, T] \rightarrow \mathbb{C}$, definiamo il **prodotto scalare** di f e g :

$$\langle f|g \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T f(t)\overline{g(t)} dt$$

(dove $\bar{z}$ indica il complesso coniugato del numero complesso z). Si dimostra facilmente il

Lemma 2.1. *Valgono le seguenti proprietà:*

1. $\langle f|f \rangle$ è un numero reale ≥ 0 ;
2. $\langle f|f \rangle = 0 \Leftrightarrow f = 0$;
3. $\langle g|f \rangle = \overline{\langle f|g \rangle}$;
4. $\langle \lambda f_1 + \mu f_2|g \rangle = \lambda \langle f_1|g \rangle + \mu \langle f_2|g \rangle$,
dove $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$.

Definiamo la seguente **norma** di f :

$$\|f\|_2 = \sqrt{\langle f|f \rangle} = \left(\frac{1}{T} \int_0^T |f(t)|^2 dt \right)^{1/2}.$$

Lemma 2.2. *Vale la disuguaglianza di Schwarz:*

$$|\langle f|g \rangle| \leq \|f\|_2 \|g\|_2.$$

Dimostrazione. Se $f = 0$, essa è chiaramente verificata. Supponiamo quindi $f \neq 0$. Abbiamo

$$\begin{aligned} 0 &\leq \|\lambda f + g\|_2^2 = \langle \lambda f + g|\lambda f + g \rangle \\ &= |\lambda|^2 \|f\|_2^2 + \lambda \langle f|g \rangle + \bar{\lambda} \overline{\langle f|g \rangle} + \|g\|_2^2 \end{aligned}$$

Ponendo $\lambda = -\|f\|_2^{-2} \langle g|f \rangle$ otteniamo

$$0 \leq -\|f\|_2^{-2} |\langle f|g \rangle|^2 + \|g\|_2^2,$$

da cui la disuguaglianza cercata. □

Ne segue direttamente il

Lemma 2.3. Valgono le seguenti proprietà della norma:

1. $\|f\|_2 \geq 0$;
2. $\|f\|_2 = 0 \Leftrightarrow f = 0$;
3. $\|\lambda f\|_2 = |\lambda| \|f\|_2$;
4. $\|f + g\|_2 \leq \|f\|_2 + \|g\|_2$.

Tornando alle serie di Fourier, abbiamo che $c_k = \langle f|e_k \rangle$, dove con e_k abbiamo indicato la funzione

$$e_k(t) = e^{i\frac{2\pi k}{T}t} ,$$

e

$$f_n = \sum_{k=-n}^n \langle f|e_k \rangle e_k .$$

Siccome

$$\langle e_k|e_j \rangle = \begin{cases} 0 & \text{se } k \neq j , \\ 1 & \text{se } k = j , \end{cases}$$

facendo i conti abbiamo:

$$\begin{aligned} \|f - f_n\|_2^2 &= \langle f - f_n|f - f_n \rangle \\ &= \left\langle f - \sum_{k=-n}^n \langle f|e_k \rangle e_k \left| f - \sum_{j=-n}^n \langle f|e_j \rangle e_j \right. \right\rangle \\ &= \|f\|^2 - \sum_{j=-n}^n \overline{\langle f|e_j \rangle} \langle f|e_j \rangle - \sum_{k=-n}^n \langle f|e_k \rangle \overline{\langle f|e_k \rangle} + \sum_{k=-n}^n |\langle f|e_k \rangle|^2 \\ &= \|f\|^2 - \sum_{k=-n}^n |\langle f|e_k \rangle|^2 . \end{aligned}$$

Ne deduciamo la **disuguaglianza di Bessel**:

$$\sum_{k=-n}^n |\langle f|e_k \rangle|^2 \leq \|f\|^2 .$$

Definiamo ora una funzione S_n che alla funzione f associa la relativa funzione f_n :

$$S_n(f) = \sum_{k=-n}^n \langle f|e_k \rangle e_k .$$

Notiamo che:

- la funzione S_n è lineare;
- se P è un polinomio trigonometrico del tipo

$$P(t) = \sum_{j=-m}^m \lambda_j e^{i\frac{2\pi j}{T}t} ,$$

con $m \leq n$, allora $S_n(P) = P$;

- per ogni funzione f , si ha $\|S_n(f)\|_2 \leq \|f\|_2$. Infatti, per la disuguaglianza di Bessel,

$$\|S_n(f)\|_2^2 = \left\langle \sum_{k=-n}^n \langle f|e_k \rangle e_k \left| \sum_{j=-n}^n \langle f|e_j \rangle e_j \right. \right\rangle = \sum_{k=-n}^n |\langle f|e_k \rangle|^2 \leq \|f\|_2^2 .$$

Teorema 2.4. *Se f è continua, allora*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|f - f_n\|_2 = 0.$$

Dimostrazione. Supponiamo inizialmente che $f(0) = f(T)$ per cui l'estensione T -periodica di f su $\mathbb{R}$ (che continueremo a chiamare f) è continua. Fissato $\varepsilon > 0$, per il teorema di Fejer possiamo trovare un polinomio trigonometrico $P = \sigma_m$ tale che

$$t \in [0, T] \Rightarrow |f(t) - P(t)| \leq \varepsilon.$$

Ne segue che $\|f - P\|_2 \leq \varepsilon$ e, se $n \geq n_\varepsilon$ si ha

$$\begin{aligned} \|f - f_n\|_2 &= \|f - S_n(f)\|_2 \\ &\leq \|f - P\|_2 + \|P - S_n(P)\|_2 + \|S_n(P) - S_n(f)\|_2 \\ &= \|f - P\|_2 + \|S_n(f - P)\|_2 \leq 2\|f - P\|_2 \leq 2\varepsilon, \end{aligned}$$

il che dimostra l'enunciato. Nel caso in cui $f(0) \neq f(T)$ è sufficiente approssimare f con una funzione g continua, tale $g(0) = g(T)$, e applicare il risultato precedente (scrivere i dettagli). $\square$

Corollario 2.5. *Se f è continua, si ha la seguente identità di Parseval:*

$$\|f\|_2^2 = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |\langle f | e_k \rangle|^2.$$

Dimostrazione. Come abbiamo visto sopra,

$$\|f - f_n\|_2^2 = \|f\|_2^2 - \sum_{k=-n}^n |\langle f | e_k \rangle|^2,$$

e il risultato segue dal teorema precedente, passando al limite per $n \rightarrow \infty$. $\square$

L'identità di Parseval

$$\frac{1}{T} \int_0^T |f(t)|^2 dt = \|f\|_2^2 = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |c_k|^2 = \frac{a_0^2}{4} + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{+\infty} (a_k^2 + b_k^2)$$

vale per funzioni integrabili secondo Riemann, in generale per funzioni di quadrato integrabile secondo Lebesgue.

Facciamo ora qualche osservazione di carattere generale. Sia E uno spazio vettoriale (su $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ o su $\mathbb{K} = \mathbb{C}$) su cui è definito un prodotto scalare $\langle \cdot | \cdot \rangle$. Due elementi di E si dicono ortogonali se il loro prodotto scalare è nullo. Vale il seguente risultato.

Teorema 2.6 (di Pitagora). *Se $x_1, x_2, \dots, x_m \in E$ sono due a due ortogonali, allora*

$$\left\| \sum_{k=1}^m x_k \right\|^2 = \sum_{k=1}^m \|x_k\|^2.$$

Dimostrazione. Dalla definizione della norma e dalla linearità del prodotto scalare segue che

$$\left\| \sum_{k=1}^m x_k \right\|^2 = \left\langle \sum_{k=1}^m x_k, \sum_{j=1}^m x_j \right\rangle = \sum_{k,j=1}^m \langle x_k, x_j \rangle$$

e, essendo i vettori ortogonali due a due, la somma diventa

$$\sum_{k=1}^m \langle x_k, x_k \rangle = \sum_{k=1}^m \|x_k\|^2.$$

□

Supponiamo ora di avere un sottospazio di dimensione finita, E_0 , di E e un elemento x di E . L'elemento di E_0 che è più vicino a x nella distanza indotta dalla norma è la proiezione ortogonale di x su E_0 . Infatti, vale il seguente risultato.

Teorema 2.7. *Sia E_0 un sottospazio di dimensione finita di E e sia $\{x_1, \dots, x_m\}$ una base ortonormale di E_0 . Per un qualsiasi elemento $x \in E$ indichiamo con x_0 l'elemento di E_0 dato da*

$$x_0 = \sum_{j=1}^m \langle x, x_j \rangle x_j.$$

Allora

- (i) $x - x_0$ è ortogonale a ogni elemento di E_0 (x_0 è la proiezione ortogonale di x su E_0);
- (ii) $\|x_0\|^2 = \sum_{j=1}^m |\langle x, x_j \rangle|^2 \leq \|x\|^2$;
- (iii) $\|x - x_0\| \leq \|x - y\|$ per ogni $y \in E_0$ (x_0 è l'elemento di E_0 più vicino a x).

Inoltre, dato $x \in E$, x_0 è l'unico elemento di E_0 con queste proprietà.

Dimostrazione. (i) Basta verificare che $x - x_0$ è ortogonale ai vettori della base, (per linearità segue poi che $x - x_0$ è ortogonale a ogni elemento di E_0). Si ha

$$\begin{aligned} \langle x - x_0, x_j \rangle &= \langle x - \sum_{k=1}^m \langle x, x_k \rangle x_k, x_j \rangle = \langle x, x_j \rangle - \sum_{k=1}^m \langle x, x_k \rangle \langle x_k, x_j \rangle \\ &= \langle x, x_j \rangle - \langle x, x_j \rangle = 0. \end{aligned}$$

(ii) Per il Teorema di Pitagora

$$\|x\|^2 = \|x - x_0\|^2 + \|x_0\|^2 \geq \|x_0\|^2 = \left\| \sum_{j=1}^m \langle x, x_j \rangle x_j \right\|^2 = \sum_{j=1}^m |\langle x, x_j \rangle|^2.$$

(iii) Sia $y \in E_0$. Per il Teorema di Pitagora

$$\|x - y\|^2 = \|x - x_0\|^2 + \|x_0 - y\|^2 \geq \|x - x_0\|^2.$$

L'unicità: se sia x_0 che $\tilde{x}_0 \in E_0$ soddisfano la proprietà (iii), $\|x - x_0\| = \|x - \tilde{x}_0\|$. Per la proprietà (i), $x - x_0$ è ortogonale a $x_0 - \tilde{x}_0$. Allora dal Teorema di Pitagora segue che $\|x - x_0\|^2 = \|x - \tilde{x}_0\|^2 + \|x_0 - \tilde{x}_0\|^2$, e quindi $\|x_0 - \tilde{x}_0\| = 0$, per cui $x_0 = \tilde{x}_0$. □

3 Ulteriori risultati sulla convergenza delle serie di Fourier

Consideriamo ora funzioni non necessariamente continue e le corrispondenti serie di Fourier. Intanto osserviamo che per definire i coefficienti di Fourier basta l'integrabilità (per ora nel senso di Riemann) della funzione f sull'intervallo $[0, T]$. Infatti, se f è integrabile secondo Riemann anche i prodotti che definiscono i coefficienti di Fourier lo sono. Inoltre, se $f, g : [0, T] \rightarrow \mathbb{C}$ sono integrabili secondo Riemann si può definire il (semi-)prodotto scalare $\langle f|g \rangle$ come prima, e continua a valere la disuguaglianza di Bessel:

$$\sum_{k=-n}^n |\langle f|e_k \rangle|^2 \leq \|f\|_2^2,$$

da cui segue la convergenza della serie $\sum_{k=-\infty}^{+\infty} |c_k|^2$. Di conseguenza $\lim_{k \rightarrow \infty} c_k = 0$.

Definizione 3.1 (cf. [Giusti]). Una funzione f si dice continua a tratti in un intervallo $[a, b)$ se è continua in $[a, b)$ tranne al più in un numero finito di punti $t_1, \dots, t_N$ nei quali esistono finiti i limiti destro e sinistro: $f(t_j+) = \lim_{\substack{t \rightarrow t_j \\ t > t_j}} f(t)$ e $f(t_j-) = \lim_{\substack{t \rightarrow t_j \\ t < t_j}} f(t)$, per $j = 1, 2, \dots, N$.

Una funzione continua a tratti si dice regolare a tratti in $[a, b)$ se ha derivata continua eccetto ovviamente nei punti $t_1, \dots, t_N$ ed eventualmente in altri punti $s_1, \dots, s_k$, sempre in numero finito, e se $f'(t)$ è limitata.

Osserviamo che la derivata di una funzione regolare a tratti è integrabile secondo Riemann, quindi possiamo calcolare i coefficienti di Fourier sia della f che della sua derivata.

Dimostreremo il seguente risultato

Teorema 3.2. Sia $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ una funzione periodica di periodo $T > 0$ regolare a tratti in $[0, T)$. Allora la serie di Fourier associata a f converge per ogni $t \in \mathbb{R}$ e si ha

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k e^{i \frac{2\pi k}{T} t} = \frac{1}{2} (f(t-) + f(t+)).$$

La convergenza è uniforme su ogni intervallo chiuso in cui la funzione f è continua. In particolare, se f è continua e regolare a tratti la serie di Fourier converge a f uniformemente.

Iniziamo con delle osservazioni di carattere algebrico.

Lemma 3.3. Per ogni $n \in \mathbb{N}$

$$D_n(t) := \sum_{k=-n}^n e^{i \frac{2\pi k}{T} t} = \frac{\sin((n + \frac{1}{2}) \frac{2\pi}{T} t)}{\sin(\frac{\pi}{T} t)} \quad \text{per ogni } t \in (0, T).$$

Dimostrazione. Si ha

$$\begin{aligned} \sum_{k=-n}^n e^{i \frac{2\pi k}{T} t} &= e^{-in \frac{2\pi}{T} t} \sum_{k=-n}^n e^{i(k+n) \frac{2\pi}{T} t} = e^{-in \frac{2\pi}{T} t} \sum_{\ell=0}^{2n} e^{i \ell \frac{2\pi}{T} t} = e^{-in \frac{2\pi}{T} t} \frac{e^{i(2n+1) \frac{2\pi}{T} t} - 1}{e^{i \frac{2\pi}{T} t} - 1} \\ &= \frac{e^{i(n+1) \frac{2\pi}{T} t} - e^{-in \frac{2\pi}{T} t}}{e^{i \frac{2\pi}{T} t} - 1} = \frac{e^{i(n+\frac{1}{2}) \frac{2\pi}{T} t} - e^{-i(n+\frac{1}{2}) \frac{2\pi}{T} t}}{e^{i \frac{\pi}{T} t} - e^{-i \frac{\pi}{T} t}} = \frac{\sin((n + \frac{1}{2}) \frac{2\pi}{T} t)}{\sin \frac{\pi t}{T}}. \end{aligned}$$

□

Mettendo insieme i termini di indice k e $-k$ nella sommatoria che definisce D_n si ottiene:

$$D_n(t) = 1 + 2 \sum_{k=1}^n \cos\left(\frac{2\pi k}{T}t\right).$$

La funzione D_n è pari e

$$\int_{-T/2}^0 D_n(t)dt = \int_0^{T/2} D_n(t)dt = \frac{T}{2},$$

essendo $\int_0^T \cos\left(\frac{2\pi k}{T}t\right)dt = 0$ per tutti $k \neq 0$.

Calcoliamo ora f_n . Si ha

$$\begin{aligned} f_n(t) &= \sum_{k=-n}^n c_k e^{i\frac{2\pi}{T}kt} = \sum_{k=-n}^n \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(s) e^{-i\frac{2\pi}{T}ks} e^{i\frac{2\pi}{T}kt} ds \\ &= \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(s) \sum_{k=-n}^n e^{i\frac{2\pi}{T}k(t-s)} ds = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(s) \frac{\sin((n + \frac{1}{2})\frac{2\pi}{T}(t-s))}{\sin(\frac{\pi}{T}(t-s))} ds \\ &= \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t+\tau) \frac{\sin((n + \frac{1}{2})\frac{2\pi}{T}\tau)}{\sin(\frac{\pi}{T}\tau)} d\tau. \end{aligned}$$

Nell'ultima uguaglianza, posto $s = t + \tau$, si è tenuto conto che $\sin(-\alpha) = -\sin(\alpha)$.

Dimostrazione. 1. **convergenza puntuale.** Sia $t \in [-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}]$. Abbiamo

$$\begin{aligned} f_n(t) - \frac{f(t-) + f(t+)}{2} &= \frac{1}{T} \int_{-T/2}^0 (f(t+\tau) - f(t-)) D_n(\tau) d\tau + \frac{1}{T} \int_0^{T/2} (f(t+\tau) - f(t+)) D_n(\tau) d\tau \\ &= \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} g(\tau) \sin\left(\left(n + \frac{1}{2}\right)\frac{2\pi}{T}\tau\right) d\tau, \end{aligned}$$

dove

$$g(\tau) = \begin{cases} \frac{f(t+\tau) - f(t-)}{\sin(\frac{\pi}{T}\tau)} & -\frac{T}{2} \leq \tau < 0 \\ 0 & \tau = 0 \\ \frac{f(t+\tau) - f(t+)}{\sin(\frac{\pi}{T}\tau)} & 0 < \tau \leq \frac{T}{2} \end{cases}$$

Usando il teorema di Cauchy deduciamo che per $|\tau|$ abbastanza piccolo

$$g(\tau) = \frac{f'(t+\xi)}{\frac{\pi}{T} \cos(\frac{\pi\xi}{T})} \quad \text{per un certo } \xi \text{ tra } 0 \text{ e } \tau.$$

Quindi g è una funzione limitata in un intorno di 0 e dunque in tutto l'intervallo $[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}]$. Essendo g continua eccetto in un numero finito di punti, risulta integrabile (secondo Riemann). Appliciamo il risultato sulla convergenza a zero dei coefficienti di Fourier di una funzione integrabile alle funzioni $g(\tau) \sin(\frac{\pi\tau}{T})$ e $g(\tau) \cos(\frac{\pi\tau}{T})$ e otteniamo che

$$\begin{aligned} &\frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} g(\tau) \sin\left(\left(n + \frac{1}{2}\right)\frac{2\pi}{T}\tau\right) d\tau \\ &= \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} g(\tau) \sin\left(\frac{\pi\tau}{T}\right) \cos\left(\frac{2\pi n\tau}{T}\right) d\tau + \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} g(\tau) \cos\left(\frac{\pi\tau}{T}\right) \sin\left(\frac{2\pi n\tau}{T}\right) d\tau \rightarrow 0 \end{aligned}$$

per $n \rightarrow \infty$.

2. convergenza totale se f è regolare a tratti e continua. Segue dalla disuguaglianza di Bessel per la derivata di f . Si ha

$$f(t) = f(0) + \int_0^t f'(s) ds \quad \text{per ogni } t \in \mathbb{R}.$$

Siano γ_k i coefficienti di Fourier di f' ; integrando per parti si ottiene

$$\gamma_k = \frac{1}{T} \int_0^T f'(t) e^{-i \frac{2k\pi}{T} t} dt = \frac{1}{T} \frac{i2k\pi}{T} \int_0^T f(t) e^{-i \frac{2k\pi}{T} t} dt = \frac{i2k\pi}{T} c_k.$$

Dalla disuguaglianza di Bessel per f' deduciamo che $\sum_{k=-\infty}^{+\infty} |\gamma_k|^2 < +\infty$. Siccome $2|c_k| = 2k|c_k| \frac{1}{k} \leq k^2 |c_k|^2 + \frac{1}{k^2}$, si ha $\sum_{k=-\infty}^{+\infty} |c_k| < +\infty$ e quindi la serie di Fourier di f converge totalmente. Essendo f regolare a tratti e continua, dal primo passo della dimostrazione segue la convergenza puntuale della serie di Fourier di f alla funzione f . Si può allora concludere che la convergenza verso la funzione f è uniforme.

3. convergenza uniforme su ogni intervallo chiuso di continuità. Supponiamo per semplicità che $T = 2\pi$ e che f abbia un solo punto $a \in [0, 2\pi)$ di discontinuità. Siano $f(a-)$ e $f(a+)$ i limiti laterali di f in a . Il salto della funzione f in a è $f(a+) - f(a-)$. Modifichiamo la funzione f nel punto a ponendo $f(a) = \frac{1}{2}(f(a-) + f(a+))$ e continuiamo a chiamare f questa nuova funzione.

Consideriamo la funzione $\phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ periodica di periodo 2π definita da:

$$\phi(t) = \begin{cases} \pi - t & t \in (0, 2\pi) \\ 0 & t = 0. \end{cases}$$

La serie di Fourier associata alla funzione ϕ

$$2 \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\sin(kt)}{k}$$

converge uniformemente a ϕ su ogni intervallo $[\alpha, \beta] \subset (0, 2\pi)$. Infatti, la serie converge puntualmente e su $[\alpha, \beta]$ la somma della serie coincide con la funzione ϕ . Per verificare che la successione ϕ_n delle somme parziali è di Cauchy rispetto alla norma uniforme notiamo che

$$\begin{aligned} \phi_n(t) - \phi_m(t) &= 2 \sum_{k=m+1}^n \frac{\sin(kt)}{k} = \frac{2}{\sin \frac{t}{2}} \sum_{k=m+1}^n \frac{\sin(kt) \sin \frac{t}{2}}{k} \\ &= \frac{1}{\sin \frac{t}{2}} \sum_{k=m+1}^n \frac{1}{k} \left(\cos \left(\left(k - \frac{1}{2} \right) t \right) - \cos \left(\left(k + \frac{1}{2} \right) t \right) \right) = \\ &= \frac{1}{\sin \frac{t}{2}} \left[\frac{1}{m+1} \cos \left(\left(m + \frac{1}{2} \right) t \right) - \frac{1}{n} \cos \left(\left(n + \frac{1}{2} \right) t \right) \right. \\ &\quad \left. + \sum_{k=m+1}^{n-1} \cos \left(\left(k + \frac{1}{2} \right) t \right) \left(\frac{1}{k+1} - \frac{1}{k} \right) \right] \end{aligned}$$

Fissiamo $\delta > 0$ e mostriamo che la successione ϕ_n è di Cauchy rispetto alla norma uniforme su $[\delta, 2\pi - \delta]$. Sia $\epsilon > 0$. Dall'espressione calcolata prima segue che

$$|\phi_n(t) - \phi_m(t)| \leq \frac{1}{\sin \frac{\delta}{2}} \left[\frac{1}{m+1} + \frac{1}{n} + \sum_{k=m+1}^{n-1} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) \right] \leq \frac{2}{m \sin \frac{\delta}{2}} \quad \text{per ogni } t \in [\delta, 2\pi - \delta].$$

Quindi, scegliendo $\overline{m} \geq \frac{2}{\epsilon \sin \frac{\delta}{2}}$, per ogni $m, n \geq \overline{m}$ si ha $|\phi_n(t) - \phi_m(t)| \leq \epsilon$ per ogni $t \in [\delta, 2\pi - \delta]$.

Per concludere la dimostrazione in questo caso particolare, consideriamo la funzione $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ periodica di periodo 2π definita da

$$g(t) = f(t) - \frac{f(a+) - f(a-)}{2\pi} \phi(t - a) \quad \text{per } t \in [0, 2\pi).$$

Essendo g continua e regolare a tratti, la sua serie di Fourier converge uniformemente, quindi la serie di Fourier della funzione f converge uniformemente in ogni intervallo $[\alpha, \beta] \subset (0, 2\pi)$. $\square$

Funzioni a variazione limitata

Definizione 3.4. Sia $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione e siano c, d tali che $a \leq c \leq d \leq b$. La variazione totale di f su $[c, d]$, indicata con $\mathcal{V}_c^d(f)$, è definita da

$$\mathcal{V}_c^d(f) = \sup \left\{ \sum_{i=1}^n |f(x_i) - f(x_{i-1})| : c = x_0 < x_1 < \dots < x_n = d, n \in \mathbb{N} \right\}.$$

Per brevità indichiamo la variazione di f su $[a, b]$ con $\mathcal{V}(f)$. Si dice che la funzione f è a variazione limitata se $\mathcal{V}(f) < +\infty$.

Esempio. La variazione totale della funzione $f : [0, 2] \rightarrow \mathbb{R}$ definita da $f(x) = 1$ se $0 \leq x \leq 1$ e $f(x) = 4$ se $1 < x \leq 2$, è uguale a 3.

Esempio. Se la funzione f è monotona su $[a, b]$ allora $\mathcal{V}(f) = |f(b) - f(a)|$.

Dalla definizione di estremo superiore segue la proprietà di additività della variazione rispetto al dominio:

$$\mathcal{V}_a^b(f) = \mathcal{V}_a^c(f) + \mathcal{V}_c^b(f), \quad \text{per ogni } c \in [a, b].$$

Se $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, $\alpha \in \mathbb{R}$ si ha

$$\begin{aligned} \mathcal{V}(f + g) &\leq \mathcal{V}(f) + \mathcal{V}(g) \\ \mathcal{V}_a^b(\alpha f) &= |\alpha| \mathcal{V}(f). \end{aligned}$$

Vale il seguente risultato.

Teorema 3.5. Se $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ è una funzione a variazione limitata allora esistono due funzioni crescenti $g, h : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ tali che $f = g - h$.

Dimostrazione. Poniamo $g(x) = \mathcal{V}_a^x(f)$. Quindi $h = \mathcal{V}_a^x(f) - f$. La funzione g è crescente. Infatti, se $x_1 < x_2$, essendo la variazione un estremo superiore tra tutte le partizioni dell'intervallo, $\mathcal{V}_a^{x_2}(f)$ è maggiore del numero corrispondente a una qualsiasi partizione del tipo $a = \xi_0 < \xi_1 < \dots < \xi_{n-1} = x_1 < \xi_n = x_2$, per cui

$$\mathcal{V}_a^{x_2}(f) \geq |f(x_2) - f(x_1)| + \mathcal{V}_a^{x_1}(f).$$

Verifichiamo ora che anche la funzione h è crescente: per $x_1 < x_2$ abbiamo

$$h(x_2) - h(x_1) = \mathcal{V}_a^{x_2}(f) - f(x_2) - (\mathcal{V}_a^{x_1}(f) - f(x_1)) \geq |f(x_2) - f(x_1)| - (f(x_2) - f(x_1)) \geq 0.$$

$\square$

Di conseguenza una funzione a variazione limitata ammette limite destro e limite sinistro in un qualsiasi punto dell'intervallo di definizione. Inoltre l'insieme degli eventuali punti di discontinuità è al più numerabile.

Già con il primo esempio abbiamo visto che la variazione limitata non implica la continuità. Il seguente esempio mostra che la continuità non implica la limitatezza della variazione.

Esempi. 1. Sia $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ la funzione così definita: $f(0) = 0$, per ogni $n \geq 1$ numero naturale $f(\frac{1}{2n}) = 0$, $f(\frac{1}{2n-1}) = \frac{1}{2n-1}$, e f è lineare su $[\frac{1}{2n}, \frac{1}{2n-1}]$ e su $[\frac{1}{2n+1}, \frac{1}{2n}]$.

2. La funzione $f(x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x} & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$ è continua ma non è a variazione limitata, per esempio su $[-1, 1]$.

Il teorema sulla convergenza delle serie di Fourier (Teorema 3.2) si può estendere alle funzioni a variazione limitata.

Teorema 3.6. Sia $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione periodica di periodo 2π a variazione limitata su $[0, 2\pi]$. Allora la serie di Fourier associata a f converge per ogni $t \in \mathbb{R}$ e si ha

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos(kt) + b_k \sin(kt)) = \frac{1}{2} \left(\lim_{s \rightarrow t^-} f(s) + \lim_{s \rightarrow t^+} f(s) \right).$$

In particolare, se f è continua in t_0 , $f_n(t_0) \rightarrow f(t_0)$ al tendere di n all'infinito.

Inoltre, se f è continua su (a, b) la convergenza è uniforme su ogni intervallo $[c, d]$, con $a < c < d < b$. In particolare, se f è continua su $\mathbb{R}$ la convergenza è uniforme su $\mathbb{R}$.

4 Esercizi

1. Calcolare le serie di Fourier associate alle seguenti funzioni $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ periodiche di periodo 2π e discuterne la convergenza

- $f(x) = x$ per $x \in [0, 2\pi[$
- $f(x) = x$ per $x \in [-\pi, \pi[$
- $f(x) = |x|$ per $x \in [-\pi, \pi[$
- $f(x) = \sin \frac{x}{2}$ per $x \in [-\pi, \pi[$
- $f(x) = |\sin \frac{x}{2}|$ per $x \in [-\pi, \pi[$
- $f(x) = x + \cos(3x)$ per $x \in [-\pi, \pi[$
- $f(x) = 0$ per $x \in [-\pi, 0[$, $f(x) = 1$ per $x \in [0, \pi[$
- $f(x) = \cos^2(3x)$ per $x \in [0, 2\pi]$.

2. Sia $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la funzione periodica di periodo π , tale che $f(x) = |x|$ per $x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.

- Scrivere la serie di Fourier associata alla funzione f e studiarne la convergenza.
- Disegnare il grafico di $f|_{[0, 2\pi]}$ e calcolare la variazione totale di $f|_{[0, 2\pi]}$.
- $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = ?$

3. Sia $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la funzione periodica di periodo 2π , tale che $f(x) = x + \cos(x)$ per $-\pi < x \leq \pi$.

- Calcolare $\mathcal{V}_{-\pi}^{\pi}(f)$.

- b. Scrivere la serie di Fourier associata alla funzione f e studiarne la convergenza.
4. Sia $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la funzione dispari periodica di periodo 2π con $f(x) = x(\pi - x)$ per $0 \leq x < \pi$.
- a. Scrivere la serie di Fourier associata alla funzione f e studiarne la convergenza.
- b. Disegnare il grafico di $f|_{[-2\pi, +2\pi]}$.
- c. $\mathcal{V}_0^2(f) = ?$
- d. Mostrare che

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^6} = \frac{\pi^6}{960} \quad \text{e} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^6} = \frac{\pi^6}{945}.$$

(Si ha $f(x) = \frac{8}{\pi} \sum_{k \text{ dispari} \geq 1} \frac{\sin(kx)}{k^3}$.)

5. Sia f la funzione definita su $[-\pi, \pi]$ da $f(t) = |t|$. Usando la serie di Fourier di f (es.1 [c.]) dimostrare che

$$\sum_{n \text{ dispari} \geq 1} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{8} \quad \text{e} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

(la serie è $\frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{n \text{ dispari} \geq 1} \frac{\cos(nt)}{n^2}$)
Usare l'identità di Parseval per trovare

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^4} \quad \text{e} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4}$$

$(\pi^4/96, \pi^4/90)$