Università degli Studi di Udine Anno Accademico 2016/2017

Dipartimento di Scienze Matematiche, Informatiche e Fisiche
Corso di Laurea in Matematica

Programma del Analisi Matematica II
primo modulo e parte del secondo modulo
Docente: Paolo Baiti

Spazi metrici, normati, di Hilbert. I concetti di distanza e di spazio metrico. Gli spazi metrici e e pseudometrici. Intorni circolari, intorni, aperti, chiusi. Proprietà degli intorni, degli aperti e dei chiusi. Le palle aperte/chiuse sono insiemi aperti/chiusi. Alcuni esempi di distanze in $\mathbb{R}^n$ e di spazi metrici. Funzioni limitate e diametro di un insieme. Funzioni continue tra spazi metrici. La metrica lagrangiana. Cenni agli spazi topologici e alle funzioni continue tra spazi topologici. Funzioni lipschitziane e funzioni hölderiane tra spazi metrici e loro continuità. In uno spazio metrico, la distanza da un punto fissato è una funzione 1-lipschitziana. Metriche/distanze equivalenti, uniformemente equivalenti e Lipschitz equivalenti. Le distanze d_p in $\mathbb{R}^n$ sono Lipschitz equivalenti e generano tutte la stessa topologia e la stessa classe di funzioni continue a valori reali. Punti interni, di accumulazione, aderenti, isolati. Insieme interno, derivato, chiusura e alcune proprietà. Frontiera di un insieme. Insiemi densi. Definizione di limite per funzioni tra spazi metrici e in particolare per funzioni reali di più variabili reali. Definizione di limite infinito per funzioni da $X \to \mathbb{R}$, con X metrico. Definizione di limite per $\|x\| \to +\infty$ per funzioni da $\mathbb{R}^n \to Y$ con Y metrico. Relazione tra continuità e limiti. Una funzione da $\mathbb{R}^n$ a $\mathbb{R}^m$ è continua se e solo se lo sono tutte le sue componenti. Teoremi per funzioni reali a variabili reali che si estendono al caso di funzioni da $X \to Y$, con X, Y spazi metrici: 1) unicità del limite; 2) limite della restrizione; 3) locale limitatezza delle funzioni che ammettono limite "finito"; 4) teorema sul limite delle funzioni composte e continuità delle funzioni composte. Limitatamente alle funzioni da $X \to \mathbb{R}$: 4) limite (e continuità) della somma, prodotto, quoziente; 5) permanenza del segno. Limitatamente alle funzioni da $X \to \mathbb{R}^m$: 6) limite della somma e del prodotto per uno scalare; 7) estensione della "permanenza del segno": se il limite è non nullo, localmente la funzione è diversa da 0. I polinomi di più variabili reali sono funzioni continue. Successioni in uno spazio metrico. Limite di una successione. Sottosuccessioni di una successione e loro limite. Successioni di Cauchy. Ogni successione convergente è di Cauchy, ma non viceversa. Spazi metrici completi. Le successioni di Cauchy sono limitate. Se una successione di Cauchy ammette sottosuccessione convergente, essa stessa converge. Richiami sul Teorema di Bolzano-Weierstrass in $\mathbb{R}$. Conseguenza: $\mathbb{R}^n$ e $\mathbb{C}^n$ sono completi. Successioni di funzioni: convergenza puntuale e convergenza uniforme. Se Y è completo lo spazio $\mathcal{B}(X, Y)$ è completo. Se una successione di funzioni continue converge uniformemente, la funzione limite è continua. Conseguenza: se Y è completo lo spazio $\mathcal{C}_b(X,Y)$ è completo. Caso particolare: $C(K)$ con K compatto (per esempio $C([a,b])$). Passaggio al limite sotto il segno di integrale per la convergenza uniforme, con controesempi nel caso della convergenza non uniforme. Passaggio al limite sotto il segno di derivata. Esempi ed esercizi sulla convergenza puntuale, uniforme e convergenza integrale. Lo spazio $C([a,b])$ con la distanza integrale non è completo. Norma, spazi normati e spazi di Banach. Distanza indotta da una norma. Le norme $\|\cdot\|_p$ in $\mathbb{R}^n$ inducono le distanze d_p. La norma infinito in $\mathcal{B}(X,Y)$ e $\mathcal{C}_b(X,Y)$ rende gli spazi completi. Norme equivalenti. In uno spazio normato finito dimensionale tutte le norme sono equivalenti. La norma è una funzione continua. Le palle in uno spazio normato sono insiemi convessi. Applicazione: la funzione $\|\cdot\|_p$ per $0<p<1$ non definisce una norma in $\mathbb{R}^n$. Lo spazio $C^1([a,b])$ è completo nella norma $\|f\|_{C^1}=\|f\|_\infty+\|f'\|_\infty$ mentre non è completo nella norma infinito. Prodotto scalare, spazi hilbertiani e prehilbertiani. Norma e distanza indotti da un prodotto scalare. Elementi/insiemi ortogonali/ortonormali. Teorema di Pitagora. L'identità del parallelogramma. Il Teorema di polarizzazione: una norma è indotta da un prodotto scalare se e solo se vale l'identità del parallelogramma (senza dim). Gli insiemi formati da elementi ortogonali e non nulli sono costituiti da vettori linearmente indipendenti. Basi ortogonali/ortonormali. In uno spazio di Hilbert finito dimensionale esistono basi di spazio vettoriale costituiti da elementi ortonormali; il metodo di ortogonalizzazione di Gram-Schmidt (richiami). Teorema di caratterizzazione delle basi ortonormali, identità di Parseval (cenni). Le norme p per $p\neq 2$ non sono dedotte da prodotti scalari. Le norme che derivano da un prodotto scalare: negli L^p oppure in $(\mathbb{R}^n,d_p)$ solo per $p=2$. Il teorema della proiezione su un sottospazio chiuso (cenni). Coefficienti di Fourier e disuguaglianza di Bessel; identità di Parseval. Spazi metrici compatti per successioni e relativamente compatti per successioni. Spazi topologici compatti (per ricoprimenti) e relativamente compatti (per ricoprimenti). I sottoinsiemi di uno spazio completo sono completi se e solo se sono chiusi. Gli spazi metrici sequenzialmente compatti sono completi. Gli spazi metrici sequenzialmente compatti sono chiusi e limitati, ma non vale il viceversa. La palla unitaria in $(C([a,b]),\|\cdot\|_\infty)$ è limitata, chiusa ma non sequenzialmente compatta. Spazi metrici totalmente limitati. Teorema di caratterizzazione degli spazi metrici completi mediante successioni decrescente di chiusi non vuoti. Teorema di caratterizzazione degli spazi metrici compatti. In $\mathbb{R}^n$ i compatti sono tutti e soli i chiusi e limitati. In uno spazio normato X, la palla unitaria è compatta se e solo se X è finito dimensionale (senza dim). Le funzioni continue trasformano i (sequenzialmente) compatti in (sequenzialmente) compatti. Il Teorema di Weierstrass (le funzioni continue da X compatto in $\mathbb{R}$ ammettono massimo e minimo). Conseguenza della compattezza della palla unitaria in $\mathbb{R}^n$: in uno spazio normato finito tutte le norme sono equivalenti e rendono lo spazio completo. Funzioni uniformemente continue. Teorema di Heine-Cantor. Teorema del Dini sulla convergenza uniforme. Insiemi connessi e insiemi connessi per archi. Gli insiemi connessi per archi sono connessi (senza dim). Gli aperti di $\mathbb{R}^n$ sono connessi se e solo se sono connessi per archi (senza dim). In $\mathbb{R}$ i sottoinsiemi connessi/connessi per archi sono tutti e soli gli intervalli. Il Teorema dei valori intermedi per funzioni da uno spazio connesso in $\mathbb{R}$.

Serie in spazi normati, serie di funzioni. Serie in spazi normati e in spazi di Banach. Il criterio di convergenza di Cauchy. Convergenza normale di una serie. In uno spazio di Banach la convergenza normale implica la convergenza. Serie di funzioni tra spazi normati o di Banach. Convergenza puntuale, uniforme e totale di una serie di funzioni. La convergenza totale implica la convergenza uniforme, ma non vale il viceversa. Integrazione e derivazione di serie di funzioni. Il criterio di Weierstrass (M-test) per la convergenza totale. Il criterio del Dini applicato alla convergenza uniforme di una serie di funzioni. Serie di potenze complesse e reali; disco/intervallo e insieme di convergenza. Raggio di convergenza e formula di Cauchy-Hadamard. Derivabilità e integrabilità di una serie di potenze reale. Le serie di potenze sono funzioni infinitamente derivabili, ma non vale il viceversa. Serie di Taylor e vari criteri per la sviluppabilità in serie di Taylor. Funzioni analitiche (sia reali che complesse), funzioni olomorfe e relazioni tra di loro (cenni). Teorema di Abel sulla convergenza continua sul bordo del disco di convergenza (senza dim). Gli sviluppi in serie di Taylor delle principali funzioni elementari.

Calcolo differenziale per funzioni di più variabili reali. Calcolo differenziale per funzioni di più variabili reali. Le derivate parziali e le derivate direzionali. Il gradiente di una funzione $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Funzione differenziabile secondo Gâteaux e secondo Fréchet; estensione delle definizioni al caso $f : X \to Y$, con X, Y spazi normati. Differenziale di una funzione in un punto. Unicità del differenziale e approssimazione lineare di una funzione differenziabile. Relazione tra differenziale e gradiente nel caso di funzioni $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Il differenziale come elemento del duale di $\mathbb{R}^n$. Relazione tra differenziale e derivate direzionali; relazione tra differenziale e derivata nel caso $n = 1$. Le funzioni Gâteaux-differenziabili non sono necessariamente continue. Le funzioni Fréchet-differenziabili sono continue. Le funzioni Fréchet-differenziabili sono Gâteaux-differenziabili ma non vale il viceversa. Teorema di caratterizzazione delle applicazioni lineari continue tra spazi normati (senza dimostrazione). Lo spazio $L(X, Y)$ delle applicazioni lineari continue tra X e Y. La norma operatoriale in $L(X, Y)$. Se Y è completo, lo spazio $L(X, Y)$ dotato della norma operatoriale è uno spazio di Banach (senza verifica). Le applicazioni lineari da uno spazio finito dimensionale X in uno spazio normato Y sono sempre continue. Il gradiente di una funzione individua la direzione di massimo accrescimento. (Iper)piano tangente al grafico di una funzione differenziabile in un suo punto. Condizioni sufficienti a garantire che una funzione Gâteaux-differenziabile sia anche Fréchet-differenziabile (senza dim). Teorema del differenziale totale (con dimostrazione nel caso $n = 2$). Esempi ed esercizi; differenziabilità della norma euclidea (per $x \neq 0$) e della norma euclidea al quadrato in $\mathbb{R}^n$. Alcune regole di calcolo: linearità della differenziazione, il differenziale delle applicazioni lineari e delle applicazioni bilineari e continue, differenziale della composta di funzioni differenziabili, la regola di Leibniz per la derivazione dei "prodotti", la differenziazione delle proiezioni. Vettore derivato di una curva in $\mathbb{R}^n$ e in un generico spazio normato. Vettore gradiente per funzioni da uno spazio di Hilbert H in $\mathbb{R}$ (cenni). Una funzione da $\mathbb{R}^n$ in $\mathbb{R}^m$ è differenziabile se e solo se lo sono tutte le sue componenti. Funzioni di classe C^1. Caratterizzazione delle funzioni $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ di classe C^1. La matrice Jacobiana per funzioni differenziabili da $\mathbb{R}^n$ in $\mathbb{R}^m$. Jacobiana e derivate parziali della funzioni composte. Le derivate parziali successive. Teorema di Schwarz-Euler per funzioni da $\mathbb{R}^n$ in $\mathbb{R}$ (con dimostrazione nel caso $n = 2$). Il Teorema del valor medio per derivate direzionali di funzioni a valori in $\mathbb{R}$. Il Teorema del valor medio per funzioni a valori in spazi normati (senza dim). Ricerca di massimi e minimi. Punti di massimo e minimo locale ed estremi locali per una funzione da uno spazio normato in $\mathbb{R}$. Il Teorema di Fermat per le derivate direzionali. Condizione necessaria: nei punti di massimo e minimo interni al dominio di una funzione differenziabile secondo Gâteaux (risp. Fréchet) la derivata (risp. il differenziale) è nulla. La matrice Hessiana per funzioni da $\mathbb{R}^n$ in $\mathbb{R}$. Condizione necessaria: se f ammette derivate seconde continue in un intorno di x_0 punto di massimo (risp. minimo) interno al dominio, allora nel punto il gradiente si annulla e l'Hessiana è semidefinita negativa (risp. positiva). Caratterizzazione variazionale degli autovalori minimo e massimo di una matrice reale simmetrica; relazione con la forma quadratica associata. Funzioni di classe $C^k(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$. Il polinomio di Taylor di ordine 2. Corollario: se in punto il gradiente si annulla e la matrice hessiana è definita positiva (rispet. negativa) allora il punto è di minimo (rispet. massimo) locale. Il differenziale secondo per funzioni tra spazi normati. Il differenziale secondo è un'applicazione bilineare e simmetrica (senza dim). Relazioni tra il differenziale secondo e la matrice Hessiana. Il differenziale n-esimo (cenni). Il polinomio di Taylor di ordine n (senza dim). Il caso particolare delle funzioni da $\mathbb{R}^n$ in $\mathbb{R}$. Le funzioni con derivate parziali nulle su un aperto connesso sono costanti. Il Teorema del Dini della funzioni implicita: casi $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ (con dimostrazione), $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ e $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ (senza dimostrazione). Il Teorema del Dini della funzioni implicita: caso $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ con $n > m$ e generalizzazione al caso di funzioni tra spazi di Banach (solo enunciati). Regolarità della funzione implicita. Omeomorfismi e diffeomorfismi. Il Teorema della funzione inversa. Massimi e minimi vincolati. Cenni alle p-varietà immerse in $\mathbb{R}^n$. Il Teorema dei moltiplicatori di Lagrange. Funzioni coercitive.

Serie di Fourier trigonometriche. Il problema dell'approssimazione di una data funzione mediante polinomi trigonometrici. Coefficienti di Fourier, disuguaglianza di Bessel, identità di Parseval e convergenza in media quadratica (con dimostrazione nel caso di una funzione continua). La continuità non è sufficiente per la convergenza puntuale della serie di Fourier (cenni). Il Teorema di Fejer sulla convergenza uniforme delle medie. Se due funzioni continue e periodiche hanno i medesimi coefficienti di Fourier allora coincidono. Se la serie dei coefficienti di Fourier di una funzione continua e periodica converge assolutamente la serie di Fourier converge totalmente e uniformemente a f. Se una funzione è periodica e di classe C^2 la serie di Fourier converge totalmente e uniformemente a f. Se una funzione è continua oppure integrabile sui compatti, i suoi coefficienti di Fourier sono uniformemente limitati. Relazione tra regolarità di f e assoluta sommabilità della serie dei coefficienti di Fourier. Le funzioni regolari a tratti. Convergenza puntuale delle serie di Fourier per funzioni regolari a tratti. Convergenza totale e uniforme delle serie di Fourier per funzioni regolari a tratti e continue. Convergenza uniforme sugli intervalli chiusi di continuità per la serie di Fourier di una funzione regolare a tratti. Estensione al caso delle funzioni a variazione limitata (cenni).

Equazioni Differenziali. Equazioni differenziali ordinarie (EDO) ed equazioni differenziali alle derivate parziali. Alcuni esempi classici di soluzioni di equazioni differenziali. Definizione di sistema di equazioni differenziali di ordine N. Il concetto di soluzione. Equazioni in forma normale. Riduzione di un sistema di n equazioni di ordine N a un sistema di nN equazioni di ordine 1. Equazioni autonome e non autonome. Un primo esempio di EDO: il problema della ricerca delle primitive di una funzione. Esempi di soluzioni di equazioni differenziali. L'integrale generale di una EDO. Il problema di Cauchy. Il problema di Cauchy per equazioni di ordine $N \geq 2$. L'equazione integrale di Volterra. Un problema di punto fisso: il principio delle contrazioni. Locale lipschitzianità e lipschitzianità sui compatti. Il Teorema di Cauchy-Lipschitz (con due dimostrazioni). Il Teorema di Peano (solo enunciato). Una funzione di classe C^1 è localmente lipschitziana. L'unicità locale implica unicità globale. Traiettorie e orbite. Conseguenze dell'unicità sulle orbite e sulle traiettorie. Incollamento di due soluzioni. Prolungamento di una soluzione. Soluzioni massimali e intervallo di esistenza massimale. Teorema di esistenza di prolungamenti massimali nel caso di un campo vettoriale localmente lipschitziano, con cenni al caso di un campo solamente continuo. La sublinearità implica l'esistenza globale (tre formulazioni). La lipschitzianità globale implica l'esistenza globale. Il Teorema della fuga dai compatti (senza dimostrazione). Il Teorema dell'esplosione in norma. Alcune classi di equazioni risolubili: equazioni a variabili separabili, equazioni lineari di ordine 1, equazioni di Bernoulli, equazioni omogenee o riconducibili a equazioni a variabili separabili. L'equazione di Malthus e l'equazione logistica di Verhulst. Equazioni lineari di ordine n. Equazioni omogenee e non omogenee. Equazione omogenea associata. Polinomio ed equazione caratteristica associati. L'insieme delle soluzioni di un'equazione omogenea è uno spazio vettoriale di dimensione n. Equazioni lineari di ordine n a coefficienti costanti. La soluzione generale di un'equazione lineare omogenea di ordine n a coefficienti costanti. Il metodo per simiglianza. Il metodo di variazione delle costanti. Cenni ai sistemi lineari. Teorema della variazione delle costanti, di Lagrange.