Una nota sulle successioni di Cauchy in spazi metrici

Se d e δ sono distanze equivalenti sul medesimo spazio X, è noto che generano i medesimi intorni, dunque la stessa topologia e le medesime successioni convergenti.

Problema: Accade lo stesso per le successioni di Cauchy?

La risposta è: dipende dalla scelta del concetto di equivalenza tra distanze su uno spazio metrico.

Dette B_d e B_δ le palle rispetto alle due metriche, diamo le seguenti tre definizioni:

Definizione 0.1 *Due distanze d e δ sul medesimo spazio X si dicono* equivalenti *se*

i) $\forall\, x_o \in X\ \forall r > 0\ \exists R = R(x_o, r) > 0$ *tale che* $B_\delta(x_o, R) \subseteq B_d(x_o, r)$,

ii) $\forall\, x_o \in X\ \forall R > 0\ \exists \rho = \rho(x_o, R) > 0$ *tale che* $B_d(x_o, \rho) \subseteq B_\delta(x_o, R)$.

Definizione 0.2 *Due distanze d e δ sul medesimo spazio X si dicono* uniformemente equivalenti *se*

i) $\forall r > 0\ \exists R = R(r) > 0$ *tale che* $\forall\, x_o \in X\ B_\delta(x_o, R) \subseteq B_d(x_o, r)$,

ii) $\forall R > 0\ \exists \rho = \rho(R) > 0$ *tale che* $\forall\, x_o \in X\ B_d(x_o, \rho) \subseteq B_\delta(x_o, R)$.

Definizione 0.3 *Due distanze d e δ sul medesimo spazio X si dicono* Lipschitz equivalenti *se esistono $\alpha, \beta > 0$ tali che*

$$\alpha\, d(x, y) \le \delta(x, y) \le \beta\, d(x, y) \quad \forall x, y \in X.$$

È facile verificare che per due distanze si ha:

Lipschitz equivalenti $\Longrightarrow$ uniformemente equivalenti $\Longrightarrow$ equivalenti

Le precedenti definizioni possono essere date in maniera equivalente come segue:

Proposizione 0.4 *Siano d e δ due distanze su X. Valgono se seguenti affermazioni:*

i) d e δ sono equivalenti se e solo se la mappa identità $Id : (X, \delta) \to (X, d)$ è continua insieme alla sua inversa (che è l'identità $Id : (X, d) \to (X, \delta)$);

ii) d e δ sono uniformemente equivalenti se e solo se la mappa $Id : (X, \delta) \to (X, d)$ è uniformemente continua insieme alla sua inversa;

iii) d e δ sono Lipschitz equivalenti se e solo se la mappa $Id : (X, \delta) \to (X, d)$ è lipschitziana con inversa lipschitziana.

Come si è visto a lezione vale il seguente risultato:

Teorema 0.5 *Siano date d e δ distanze Lipschitz equivalenti su X e sia (x_n) successione in X. Allora (x_n) è di Cauchy in (X, d) se e solo se (x_n) è di Cauchy in (X, δ).*

Più in generale è anche possibile dimostrare che (farlo per esercizio)

Teorema 0.6 *Siano d, δ distanze uniformemente equivalenti su X e sia (x_n) successione in X. Allora (x_n) è di Cauchy in (X, d) se e solo se (x_n) è di Cauchy in (X, δ).*

In ogni caso, la generalizzazione dei teoremi precedenti al caso di distanze solamente equivalenti è *falsa*! Forniamone un controesempio.

Sia $X = \mathbb{R}^+ =]0, +\infty[$ e sia $d(x, y) = |x - y|$, mentre sia $\delta(x, y) = \left|\frac{1}{x} - \frac{1}{y}\right|$. Si verifica che δ è una distanza (si veda l'Esercizio 20.8 del Giusti, sebbene in quel caso $X =]0, 1]$). Le due distanze sono equivalenti. La palla $B_d(x_o, r)$ in X è data dalla palla $B_d(x_o, r)$ in $\mathbb{R}$ intersecata X, dunque da $\{x_o - r < x < x_o + r\} \cap \{x > 0\} =]\max\{0, x_o - r\}, x_o + r[$. La palla $B_\delta(x_o, R)$ è più complicata; si ha $x \in B_\delta(x_o, R)$ se e solo se

$$\left|\frac{1}{x} - \frac{1}{x_o}\right| < R \quad \iff \quad |x - x_o| < Rxx_o \quad \iff \quad -Rxx_o < x - x_o < Rxx_o.$$

La prima disequazione è verificata se $\frac{x_o}{1+Rx_o} < x$, per la seconda bisogna distinguere due casi. Se $R \geq 1/x_o$, la disequazione è sempre vera, essendo $0 < x_o + (Rx_o - 1)x$ per ogni $x > 0$. Altrimenti $R < 1/x_o$ e la seconda disuguaglianza equivale a $x < \frac{x_o}{1-Rx_o}$. In definitiva

$$B_\delta(x_o, R) = \begin{cases} \left]\dfrac{x_o}{1 + Rx_o}, +\infty\right[& \text{se } R \geq 1/x_o \\ \left]\dfrac{x_o}{1 + Rx_o}, \dfrac{x_o}{1 - Rx_o}\right[& \text{se } R < 1/x_o. \end{cases}$$

Verifichiamo ora l'equivalenza. Fissati $x_o, r > 0$ si vuole trovare R tale che $B_\delta(x_o, R) \subseteq B_d(x_o, r)$. Supponendo $R < 1/x_o$ (il che non è restrittivo) ciò equivale a

$$\left]\frac{x_o}{1 + Rx_o}, \frac{x_o}{1 - Rx_o}\right[\subseteq \left]\max\{0, x_o - r\}, x_o + r\right[$$

$$\iff \quad \max\{0, x_o - r\} \leq \frac{x_o}{1 + Rx_o} \quad \text{e} \quad \frac{x_o}{1 - Rx_o} \leq x_o + r.$$

Se $r \geq x_o$ la prima disuguaglianza è banalmente verificata per ogni R; il caso peggiore si ha dunque quando $r < x_o$ e la prima disuguaglianza diventa $x_o - r \leq \frac{x_o}{1+Rx_o}$ da cui si ricava $R \leq \frac{r}{(x_o-r)x_o}$. La seconda disuguaglianza $\frac{x_o}{1-Rx_o} \leq r + x_o$ fornisce invece $R \leq \frac{r}{(x_o+r)x_o}$. In definitiva si ottiene la condizione $R \leq \min\left\{\frac{r}{(x_o-r)x_o}, \frac{r}{(x_o+r)x_o}\right\} = \frac{r}{(x_o+r)x_o}$. Ne consegue che prendendo $R = R(x_o, r) = \frac{r}{(x_o+r)x_o}$ vale la condizione i) dell'equivalenza tra distanze.

Viceversa, dimostriamo ii). Fissati $x_o, R > 0$ si vuole trovare ρ tale che $B_d(x_o, \rho) \subseteq B_\delta(x_o, R)$. Supponendo $\rho < x_o$ e ancora $R < 1/x_o$ (il che non è restrittivo) ciò equivale a

$$\left]x_o - \rho, x_o + \rho\right[\subseteq \left]\frac{x_o}{1 + Rx_o}, \frac{x_o}{1 - Rx_o}\right[$$

$$\iff \quad \frac{x_o}{1 + Rx_o} \leq x_o - \rho \quad \text{e} \quad x_o + \rho \leq \frac{x_o}{1 - Rx_o}.$$

$$\iff \quad \rho \leq \frac{Rx_o^2}{1 + Rx_o} \quad \text{e} \quad \rho \leq \frac{Rx_o^2}{1 - Rx_o}.$$

$$\iff \qquad \rho \le \min\left\{\frac{Rx_o^2}{1+Rx_o}, \frac{Rx_o^2}{1-Rx_o}\right\} = \frac{Rx_o^2}{1+Rx_o}.$$

Scegliendo quindi $\rho = \rho(x_o, R) = \frac{Rx_o^2}{1+Rx_o}$ si ottiene che ii) è verificata. Vista l'arbitrarietà di $x_o \in X$ e di $r, R > 0$ si ottiene che le due distanze sono equivalenti. Si osservi che invece non sono uniformemente equivalenti, in quanto

$$\inf_{x_o>0} R(x_o, r) = \inf_{x_o>0} \frac{r}{(x_o+r)x_o} = 0, \qquad \inf_{x_o>0} \rho(x_o, R) = \inf_{x_o>0} \frac{Rx_o^2}{1+Rx_o} = 0.$$

Verifichiamo infine che esistono successioni di Cauchy in (X, d) che non lo sono in (X, δ). È sufficiente prendere $x_n = 1/n$ che è banalmente di Cauchy in (X, d), essendo convergente in $(\mathbb{R}, d)$. Si osservi che tale successione non è tuttavia convergente in X (ciò doveva essere aspettato, perché?). Tuttavia $\delta(x_n, x_m) = |n-m|$ dunque non è di Cauchy in (X, δ). (Viceversa, $y_n = 1/x_n = 1/n$ è di Cauchy in (X, δ) ma non lo è in (X, d).)