Corso di Laurea in Matematica

Analisi Matematica II

Esercizi sulla convergenza uniforme e sulle serie di funzioni/potenze
Versione del 28/11/2016

Esercizi tratti dal Giusti

Esercizio 1. (Giusti 13.1 e 13.3) Calcolare il limite delle seguenti successioni di funzioni. Studiare la convergenza uniforme sull'insieme di convergenza.

1. $f_n(x) = \sqrt{x^2 + 1/n^2}$
2. $f_n(x) = \dfrac{nx}{1 + n^2x^2}$
3. $f_n(x) = \dfrac{x^n}{n + x^{2n}}$
4. $f_n(x) = \dfrac{x^{2n}}{1 + x^{2n}}$
5. $f_n(x) = \dfrac{\operatorname{sen}(nx)}{nx}$
6. $f_n(x) = \dfrac{x^n + x^{3n}}{1 + x^{2n}}$

Esercizio 2. (Giusti 13.2) Dire per quali $x \in \mathbb{R}$ convergono le seguenti serie:

1. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-1)^n}{n}$
2. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{x-1}}$
3. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} |x|^{nx}$
4. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|x|^{\sqrt{n}}}{n}$
5. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{1 + |x|^{n^2}}$
6. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{sen}\frac{x}{n}$
7. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}(1 - x^{2n})$

Esercizio 3. (Giusti 13.4) Dire se le seguenti successioni, che convergono puntualmente a 0 nell'intervallo $]0,1[$, vi convergono anche uniformemente:

1. x^n
2. n^{-x}
3. n^{-1-x}
4. $\dfrac{\operatorname{sen}(nx)}{nx}$
5. $\dfrac{\operatorname{sen}(\sqrt{n}x)}{nx}$
6. $\dfrac{\operatorname{sen}(nx^2)}{nx}$

Esercizio 4. (Giusti 13.5) Trovare il limite puntuale delle seguenti successioni di funzioni e dimostrare che la convergenza non è uniforme in $[0,\pi]$:

1. $\sqrt[n]{\operatorname{sen} x}$
2. $\operatorname{sen}^n x$
3. $\dfrac{nx}{1 + n^4x^4}$
4. $\dfrac{nx}{1 + nx}$

Esercizio 5. (Giusti 13.6, e Giusti 1.1, I edizione)) Dire se le seguenti serie convergono totalmente sugli insiemi indicati a fianco:

1. $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \operatorname{sen}^k x \quad [0,\pi/4]$
2. $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} k\mathrm{e}^{kx} \quad [-2,-1]$
3. $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x}{k^2}\cdot\frac{\mathrm{e}^{kx}}{1+\mathrm{e}^{kx}} \quad [1,3]$
4. $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} x(1-x)^k \quad [0,1]$
5. $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} x^2(1-x)^k \quad [0,1]$
6. $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} x^{kx} \quad [1/3,1/2]$
7. $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \left(\sqrt{9^k + x^k} - 3^k\right) \quad [-2,2]$

Esercizio 6. (Giusti 1.1 e 1.2, I edizione) Dimostrare che le seguenti serie convergono uniformemente sugli insiemi indicati a fianco. Verificare che è anche possibile derivarle termine a termine.

1. $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k x^k \quad [-1/2, 1/2]$
2. $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \mathrm{e}^{kx} \quad [-2, -1]$
3. $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x}{k^2}\mathrm{e}^{-kx} \quad [0, 1]$
4. $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k^2}\sqrt{1-x^{2k}} \quad]-1, 1[$

Altri esercizi sulle serie di funzioni

Esercizio 1. Dimostrare il seguente risultato:

Teorema 0.1 (dei due limiti) *Sia X spazio metrico, $E \subseteq X$, x_o punto di accumulazione di E, e sia $f_n : E \to \mathbb{R}$ una successione di funzioni tale che:*

i) f_n converge uniformemente su E a una funzione $f : E \to \mathbb{R}$;

ii) per ogni $n \in \mathbb{N}$ esiste finito il $\lim\limits_{\substack{x\to x_o\\ x\in E}} f_n(x) =: \ell_n$.

Allora

a) esiste finito il $\lim_{n\to\infty} \ell_n =: \ell$;

b) vale $\lim\limits_{\substack{x\to x_o\\ x\in E}} f(x) = \ell$. Detto in altri termini si ha

$$\lim_{\substack{x\to x_o\\ x\in E}} \Big(\lim_{n\to\infty} f_n(x)\Big) = \lim_{n\to\infty} \Big(\lim_{\substack{x\to x_o\\ x\in E}} f_n(x)\Big).$$

(Suggerimento: dimostrare che (ℓ_n) è di Cauchy, dunque converge a un $\ell \in \mathbb{R}$. Valutare poi la differenza tra $f(x)$ e ℓ.) In realtà il teorema vale per $f_n : X \to Y$ con X spazio topologico e Y spazio metrico completo.

Applicare il teorema per dimostrare i seguenti risultati:

Corollario 0.2 *Sia X spazio metrico, $E \subseteq X$, Se una serie $\sum_n f_n$ di funzioni continue $f_n : \overline{E} \to \mathbb{R}$ converge uniformemente su E, allora converge uniformemente su tutto $\overline{E}$.*

Corollario 0.3 *Sia X spazio metrico, $E \subseteq X$, Se una successioni $f_n : E \to \mathbb{R}$ di funzioni continue converge uniformemente a $f : E \to \mathbb{R}$ in E, allora anche f è continua in E.*

Esercizio 2. Data la successione di funzioni $f_n : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ definita da

$$f_n(x) = \frac{\cos(nx)}{1+nx}$$

a) calcolare il limite puntuale;

b) dati $0 < a < b$, dire se la convergenza è anche uniforme su ciascuno dei seguenti intervalli: $I_1 = [0, +\infty[$, $I_2 =]0, +\infty[$, $I_3 = [0, b]$, $I_4 = [a, b]$, $I_5 = [a, +\infty[$.

c) dimostrare che valgono

$$\lim_{n\to+\infty} \int_a^b f_n(x)\,dx = 0, \ (a > 0), \qquad \lim_{n\to+\infty} \int_0^b f_n(x)\,dx = 0.$$

Esercizio 3. Determinare il seguente limite giustificando la risposta:

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 \frac{1+nx^2}{(1+x^2)^n}\, dx.$$

Esercizio 4. Data la successione di funzioni $f_n(x) = \operatorname{sen}(\pi x^n)$ per $x \in [0,1]$

a) calcolare il limite puntuale;

b) dire in quali sottointervalli di $[0,1]$ si ha convergenza puntuale.

Considerata ora la serie $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$

c) si dica se la serie converge puntualmente, uniformemente e totalmente in $[0,1]$ o in eventuali opportuni sottointervalli;

d) dimostrare che la serie definisce una funzione di classe C^1 in $[0,1[$; dati $0 < a < b$, dire se la convergenza è anche uniforme su

e) dimostrare che

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 f_n(x)\, dx = 0.$$

Esercizio 5. Mostrare che la serie di funzioni $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{x+n}$ converge uniformemente sui compatti di $\mathbb{R} \setminus \{-1,-2,-3,\ldots\}$.

Esercizio 6. (da risolvere senza utilizzare il Lemma di Abel) Sia data la serie di funzioni

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots + (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n} + \cdots$$

e sia $0 < \varepsilon < 1$.

a) Dopo aver riconosciuto di che tipo di serie si tratta, dimostrare che converge puntualmente per $x \in]-1,1]$;

b) verificare che la serie non converge totalmente in $]-1,1]$ ma converge totalmente in ogni intervallo $[-1+\varepsilon, 1-\varepsilon]$;

c) dimostrare che la serie converge uniformemente in ogni intervallo del tipo $[-1+\varepsilon, 1]$;

d) provare che la serie è derivabile termine a termine in $]-1,1[$ e che la derivata è ivi una funzione di classe C^1. Calcolare esplicitamente la somma della serie delle derivate;

e) dedurre che per ogni $x \in]-1,1[$ vale

$$\log(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n}.$$

f) utilizzare la convergenza uniforme per concludere che anche per $x = 1$ vale

$$\log 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + (-1)^{n+1} \frac{1}{n} + \cdots$$

Esercizio 7. Analogamente a quanto fatto nell'esercizio precedente, provare che

$$\frac{\pi}{4} = \operatorname{arctg} 1 = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \cdots + (-1)^n \frac{1}{2n+1} + \cdots$$

Esercizio 8. Data la serie di funzioni

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+n^2x}$$

a) verificare che f è definita in $]0,+\infty[$;

b) verificare che la serie non converge né totalmente, né uniformemente in $]0,+\infty[$. Determinare su quali sottointervalli di $]0,+\infty[$ c'è convergenza uniforme;

c) è vero che f è continua in $]0,+\infty[$? È ivi limitata?

d) Per quali x è possibile derivare termine a termine la serie? Su quali insiemi la funzione f è di classe C^1?

Esercizio 9. Data la serie di funzioni

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{x^2+n}{n^2}$$

a) dimostrare che converge puntualmente ovunque;

b) provare che converge uniformemente su ogni intervallo limitato;

c) dimostrare che non converge assolutamente in nessun $x \in \mathbb{R}$.

Esercizio 10. Data la serie di funzioni

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n+\mathrm{e}^{nx}}$$

a) individuare l'insieme E di convergenza puntuale;

b) dimostrare che la serie non converge totalmente su E e determinare i sottointervalli di E su cui c'è convergenza totale;

c) verificare che invece la serie converge uniformemente su tutto E.

Esercizio 11. Dimostrare che se una serie di funzioni $\sum_n f_n$ converge uniformemente, allora la successione f_n tende uniformemente a zero. Utilizzando dei controesempi, mostrare che il contrario in generale non è vero.

Esercizio 12. Dimostrare che la successione di funzioni $f_n(x) = \operatorname{arctg}(x-n)$ tende puntualmente ovunque alla funzione costante uguale a $-\pi/2$, ma la convergenza non è uniforme.

Esercizio 13. Discutere l'insieme di convergenza puntuale, uniforme e totale della serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n!)^x}{(3n)!}$$

Esercizio 14. Data la serie di funzioni

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{x}{n+x^2}$$

a) determinare i domini $\mathcal{D}$, $\mathcal{D}_a$, $\mathcal{D}_u$ e $\mathcal{D}_t$, di convergenza, rispettivamente, puntuale, assoluta, uniforme e totale;

b) studiare la derivabilità termine a termine della serie in $\mathcal{D}$.

Esercizio 15. Data la serie di funzioni

$$\sum_{n=2}^{\infty} n^{-x}\left(\sqrt{n+2}-\sqrt{n-2}\right)$$

a) determinare il dominio di convergenza $\mathcal{D}$;

b) determinare i sottointervalli di $\mathcal{D}$ in cui la serie converge totalmente e/o uniformemente.

Esercizio 16. Dimostrare che la serie numerica

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}-\log\left(1+\frac{1}{n}\right)\right)$$

converge a un numero positivo γ. Dedurre che vale anche $\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n}-\log(N+1)\to\gamma$ per $N\to+\infty$. Utilizzare questi fatti per studiare la convergenza puntuale e uniforme della serie di funzioni

$$\sum_{n=1}^{\infty}\mathrm{e}^{-x(1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n})}$$

Esercizio 17. Dimostrare che

$$\int_0^1 x^{-x}\,dx=\sum_{n=1}^{\infty}n^{-n}$$

Esercizi sulle serie di potenze

Esercizio 1. (Giusti 13.7) Trovare i raggi di convergenza delle seguenti serie e studiarne il comportamento agli estremi dell'intervallo di convergenza:

1. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n^2}$, 2. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(2^n+1)x^n$, 3. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{3^n}{2+8^n}x^n$, 4. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(\sqrt[n]{n}-1)^n x^n$,

5. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\log(n+1)x^n$, 6. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}n^{\sqrt{n}}x^n$, 7. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{1+a^{2n}}$, al variare di $a\in\mathbb{R}$.

Esercizio 2. Trovare i raggi di convergenza delle seguenti serie e studiarne il comportamento agli estremi dell'intervallo di convergenza (in certi casi potrebbe tornare utile la formula di Stirling):

1. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(n!)^2}{(2n)!}x^n$, 2. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{(1-\sqrt{n})^n}$, 3. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{\log(n^2+1)}$, 4. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\mathrm{e}^n}{n^3}x^n$,

5. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{3^n x^{2n}}{\sqrt{n+1}}$, 6. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(-2)^n(x+3)^n$, 7. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n-1}{n}\right)^{n^2}x^{2n}$.

Esercizio 3. Trovare una primitiva di ciascuna delle seguenti funzioni: $f(x)=\mathrm{e}^{-x^2}$ (gaussiana), $f(x)=\operatorname{sinc}(x):=\frac{\operatorname{sen}x}{x}$ (funzione seno cardinale non normalizzata).

Esercizio 4. Trovare gli sviluppi di Taylor con punto iniziale $x_0=0$ per le seguenti funzioni:

1. $\log\sqrt{1+x^2}$, 2. e^{2x+1}, 3. $\operatorname{sen}(x-\pi/4)$, 4. $\sqrt{4+x}$.

Esercizio 5. Trovare gli sviluppi di Taylor per le seguenti funzioni:

1. e^{-3x}, con $x_0=-1$, 2. $\operatorname{sen}x$, con $x_0=\pi/2$, 3. $\dfrac{1}{x^2}$, con $x_0=-2$.

Esercizio 6. (in parte, Giusti 13.10) Trovare il raggio di convergenza e calcolare esplicitamente la somma delle seguenti serie di potenze:

1. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(3x)^n,$
2. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{3^n x^{2n}}{(2n)!},$
3. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(n+3)x^n,$
4. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n+3},$
5. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}2(n+1)x^{2n},$
6. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n n x^{2n-1},$
7. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\Big(1-\frac{1}{n}\Big)x^n$
8. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n+1}}{n(n+1)}.$

Esercizio 7. Trovare il raggio di convergenza delle seguenti serie di potenze al variare del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$. In seguito studiarne il comportamento sul bordo del disco di convergenza.

1. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\log(1+n^\alpha)}{\sqrt{n}}x^n,$
2. $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\Big(1-\frac{1}{n^\alpha \log n}\Big)^{n^2}x^n.$

Esercizio 8. (Giusti 13.8) Siano date due serie $\sum a_n x^n$, $\sum b_n x^n$ con raggi di convergenza r e ρ, rispettivamente. Dimostrare che la serie $\sum(a_n+b_n)x^n$ ha raggio di convergenza $R \geq \min\{r,\rho\}$. Può accadere che $R > \max\{r,\rho\}$?

Esercizio 9. (Giusti 13.9) Nella situazione dell'esercizio precedente dimostrare che almeno una delle due serie $\sum(a_n+b_n)x^n$ e $\sum(a_n-b_n)x^n$ ha raggio di convergenza esattamente uguale al $\min\{r,\rho\}$.