Corso di Laurea in Matematica

Analisi Matematica II

Esercizi sugli spazi metrici, normati, limiti e continuità
Versione del 27/10/2016

Esercizi di base

Esercizio 1. (Giusti 20.1) Dire se le seguenti funzioni sono distanze in $\mathbb{R}$

1. $\begin{cases} x^3 - y^3 & \text{se } x \geq y \\ y - x & \text{se } x < y, \end{cases}$
2. $|x-y| + |x^3 - y^3|$,
3. $x^2 + y^2 + xy$,
4. $\dfrac{|x-y|}{1+|x-y|}$,
5. $\min\{|x-y|, 1\}$,
6. $(1+|xy|)|x-y|$,
7. $\sqrt{|x-y|}$.

Esercizio 2. La funzione $d(x,y) = d_2^2(x,y) = (x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2$ è una distanza in $\mathbb{R}^2$?

Esercizio 3. (in parte, Giusti 20.5) Sia d distanza su X. Provare che $\delta(x,y) = \min\{d(x,y), 1\}$ definisce un'altra distanza su X. Verificare che d e δ sono distanze equivalenti. Dimostrare che d e δ sono Lipschitz equivalenti se e solo se X è limitato rispetto alla distanza d.

Esercizio 4. (Giusti 20.8) Dimostrare che $d(x,y) = \left|\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{y}\right|$ è una distanza in $X =]0,1]$.

Esercizio 5. Provare che le distanze del pettine e del riccio sono effettivamente due distanze in $\mathbb{R}^2$.

Esercizio 6. Si verifichi la validità dei seguenti limiti:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x \operatorname{sen} y}{(\mathrm{e}^x - 1)y} = 1, \qquad \lim_{\|(x,y)\|\to\infty} (x^2 + 3y^2 - xy) = +\infty,$$

$$\lim_{\|(x,y)\|\to\infty} \frac{x}{\|(x,y)\|^2} = 0, \qquad \nexists \lim_{\|(x,y)\|\to\infty} \frac{x}{\|(x,y)\|}.$$

Esercizio 7. Studiare l'esistenza e l'eventuale valore dei seguenti limiti:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2+1}-1}, \qquad \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{1-\cos(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)xy},$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} (1+x^2y^2)^{\frac{1}{x^2+y^2}}, \qquad \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^4-y^4}{x^4+y^4},$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2+3y^2}{x^4+y^4}, \qquad \lim_{\|(x,y)\|\to\infty} \frac{1}{x+y},$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} x^2 \log(x^2+y^2), \qquad \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3+y^2}{x^3+y},$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{1-\cos\sqrt{xy}}{y}, \qquad \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2}{x^2+y^2-x}.$$

Esercizio 8. Per ciascuna delle seguenti funzioni, determinare il dominio E e dire se è aperto, chiuso, limitato o illimitato. Determinare la frontiera e l'interno del dominio. Studiare la continuità della funzione e, ove possibile, discutere l'eventuale prolungamento per continuità in qualche punto di $\overline{E} \setminus E$.

$$f_1(x,y) = \operatorname{arctg}\Big(\frac{x}{x^2+y^2}\Big), \qquad f_2(x,y) = \operatorname{arctg}\Big|\frac{x}{x^2-y^2}\Big|,$$

$$f_3(x,y) = \operatorname{sen}\Big(\frac{x^2+y^2}{x}\Big), \qquad f_4(x,y) = \operatorname{arctg}\Big(\frac{y\log(xy)}{\sqrt{1-x^2-y^2}}\Big),$$

$$f_5(x,y) = \operatorname{arctg}\big(|x/y| - |y/x|\big), \qquad f_6(x,y) = |y|^x,$$

$$f_7(x,y) = \frac{xy}{x^2-y}, \qquad f_8(x,y) = \operatorname{arctg}\Big(\frac{x}{x^2-y}\Big),$$

$$f_9(x,y) = \frac{\operatorname{sen}(xy)}{y}, \qquad f_{10}(x,y) = \frac{1}{\log(\log x/\log y)},$$

$$f_{11}(x,y,z) = \frac{z}{\log(xy)}, \qquad f_{12}(x,y,z) = \frac{zx^2}{\log(|x|+|y|)},$$

$$f_{13}(x,y,z) = (x+y)\operatorname{sen}\frac{1}{x}\operatorname{sen}\frac{1}{y}, \qquad f_{14}(x,y,z) = \frac{zx^2}{\log(|x|+|y|)}.$$

Esercizio 9. Verificare che la funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{1}{x}\operatorname{sen}(xy) & \text{se } x \neq 0 \\ y & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

è lipschitziana in $\mathbb{R}^2$.

Esercizi di base di carattere teorico

Esercizio 1. Sia dato uno spazio metrico (X,d) , siano $E, F \subseteq X$ e si denoti con $\mathrm{Fr}E$ la frontiera dell'insieme E. Dimostrare che

a) l'intersezione tra due aperti e un aperto, l'unione di due chiusi è un chiuso;

b) se $E \subseteq F$ allora $\overline{E} \subseteq \overline{F}$, come anche $\operatorname{int} E \subseteq \operatorname{int} F$;

c) E è chiuso se e solo se $\overline{E} = E$;

d) $\overline{E} = E \cup \mathrm{Fr}E$;

e) $\overline{E \cup F} = \overline{E} \cup \overline{F}$, $\operatorname{int}(E \cap F) = \operatorname{int}(E) \cap \operatorname{int}(E)$, mentre in generale $\overline{E \cap F} \subseteq \overline{E} \cap \overline{F}$, $\operatorname{int}(E \cup F) \supseteq \operatorname{int}(E) \cup \operatorname{int}(E)$ (dare esempi in cui vale l'inclusione stretta) .

Esercizio 2. Dimostrare che le palle aperte (rispet. chiuse) in uno spazio metrico sono insiemi aperti (risp. chiusi).

Esercizio 3. Provare che in un generico spazio metrico X la chiusura di una palla aperta potrebbe non coincidere con la palla chiusa dello stesso raggio, ovvero che per qualche $x_o \in X$, $R > 0$, potrebbe accadere $\overline{B(x_o,R)} \subsetneq B(x_o,R]$. Dimostrare, invece, che in uno spazio normato X vale sempre $\overline{B(x_o,R)} = B(x_o,R]$.

Esercizio 4. (Giusti 20.4) Sia $E \subseteq X$, con X spazio metrico. Dimostrare che $\operatorname{diam} E = \operatorname{diam} \overline{E}$.

Esercizio 5. (in parte, Giusti 20.11) Dimostrare che $f : X \to Y$ (X, Y metrici) è continua se e solo se le controimmagini degli aperti di Y sono aperti in X, se e solo se le controimmagini dei chiusi di Y sono chiusi di X.

Esercizio 6. Sia (X, d) spazio metrico, $E \subseteq X$. Dimostrare che E è chiuso in X se e solo se E è *chiuso per successioni*, cioè se per ogni successione (x_n) di elementi di E tale che $x_n \to x_o \in X$ si ha necessariamente $x_o \in E$.

Esercizio 7. (Giusti 20.13) Sia (X, d) spazio metrico completo, $E \subseteq X$. Dimostrare che E è spazio metrico completo se e solo se E è chiuso.

Esercizio 8. Sia (x_n) una successione in X spazio metrico e sia $x_o \in X$. Dimostrare che le seguenti affermazioni sono equivalenti:

a) (x_n) converge a x_o;

b) ogni sottosuccessione (x_{n_k}) converge a x_o;

c) ogni sottosuccessione (x_{n_k}) ammette una sotto-sottosuccessione $(x_{n_{k_h}})$ convergente a x_o.

Esercizio 9. (in parte, Giusti, Teorema 20.7) Sia data $f : E \subseteq X \to Y$ funzione tra due spazi metrici X, Y.

a) Provare che f è continua in $x_o \in E$ se e solo se per ogni successione x_n convergente a x_o in X, la successione $f(x_n)$ converge a $f(x_o)$ in Y;

b) più in generale, per $x_o \in \mathcal{D}E$ ed $\ell \in Y$, dimostrare che vale $\lim_{x \to x_o} f(x) = \ell$ se e solo se per ogni successione $x_n \to x_o$ in X, con $x_o \neq x_n \in E$ $\forall\, n \geq 1$, vale $\lim_{n \to +\infty} f(x_n) = \ell$.

Esercizio 10. Dimostrare che le funzioni lipschitziane/hölderiane tra spazi metrici sono continue. Dimostrare che sono anche uniformemente continue.

Esercizio 11. Siano d e δ due distanze su X. Verificare le seguenti affermazioni:

i) d e δ sono equivalenti se e solo se la mappa identità $Id : (X, \delta) \to (X, d)$ è continua insieme alla sua inversa (che è l'identità $Id : (X, d) \to (X, \delta)$);

ii) d e δ sono uniformemente equivalenti se e solo se la mappa $Id : (X, \delta) \to (X, d)$ è uniformemente continua insieme alla sua inversa;

iii) d e δ sono Lipschitz equivalenti se e solo se la mappa $Id : (X, \delta) \to (X, d)$ è lipschitziana con inversa lipschitziana.

Esercizio 12. Siano date d e δ distanze Lipschitz equivalenti su X e sia (x_n) successione in X. Dimostrare che (x_n) è di Cauchy in (X, d) se e solo se (x_n) è di Cauchy in (X, δ).

Esercizio 13. Siano d, δ distanze uniformemente equivalenti su X e sia (x_n) successione in X. Dimostrare che (x_n) è di Cauchy in (X, d) se e solo se (x_n) è di Cauchy in (X, δ).

Esercizio 14. (Giusti 20.14) Posto $X =]0, 1]$, $d(x, y) = \left|\frac{1}{x} - \frac{1}{y}\right|$, dimostrare che lo spazio metrico (X, d) è completo. Dimostrare inoltre che la distanza d è equivalente alla distanza classica $d_e(x, y) = |x - y|$.

Esercizio 15. Sia (X, d) spazio metrico completo e sia $C_1 \supseteq C_2 \supseteq \cdots$ una successione di chiusi non vuoti (N.B.: non si richiede che $\operatorname{diam} C_n \to 0$). Verificare che $\bigcap_{n \geq 1} C_n$ potrebbe essere vuoto.

Esercizi avanzati

Esercizio 1. Sia (X, d) spazio metrico. Dimostrare che la funzione

$$\delta(x, y) = \frac{d(x, y)}{1 + d(x, y)}, \quad x, y \in X$$

definisce una distanza in X. Verificare che X è limitato nella metrica δ e che δ e d sono metriche equivalenti. Dedurre che la limitatezza è una proprietà metrica e non topologica.

Esercizio 2. Dati (X_1, d_1), (X_2, d_2) spazi metrici, per ogni $x = (x_1, x_2), y = (y_1, y_2) \in X_1 \times X_2$ si definiscano

$$\begin{aligned}\delta_1(x, y) &= \max\{d_1(x_1, y_1),\, d_2(x_2, y_2)\},\\ \delta_2(x, y) &= \sqrt{d_1^2(x_1, y_1) + d_2^2(x_2, y_2)}.\end{aligned}$$

Verificare che $(X_1 \times X_2, \delta_i)$, $i = 1, 2$, è spazio metrico e che δ_1, δ_2 sono distanze equivalenti. Dimostrare infine che, dato (X, d) metrico, la funzione $d : X \times X \to \mathbb{R}$ è una funzione continua.

Esercizio 3. Siano date d_1 e d_2 distanze su X. Dimostrare che $d(x, y) = \max\{d_1(x, y), d_2(x, y)\}$ è ancora una distanza in X, mentre ciò non è detto per $\delta(x, y) = \min\{d_1(x, y), d_2(x, y)\}$.

Più in generale, data $(d_\alpha)_{\alpha \in J}$ collezione di distanze su X, allora

i. la funzione $d_S(x, y) = \sup\{d_\alpha(x, y) : \ \alpha \in J\}$, se ovunque finita, è una distanza;

ii. verificare che in i. è necessario aggiungere l'ipotesi di finitezza in quanto potrebbe accadere che $d_S(x, y) = +\infty$ (fornire un esempio);

iii. nel caso $J = \mathbb{N}$, se $(d_n(x, y))_{n \in \mathbb{N}}$ è una successione monotona decrescente per ogni $x, y \in X$, allora la funzione $d_I(x, y) = \inf\{d_n(x, y) : \ n \in \mathbb{N}\}$, se non nulla per $x \neq y$, è una distanza;

iv. verificare che le ipotesi sono necessarie in quanto potrebbe essere $d_I(x, y) = 0$ oppure d_I potrebbe non verificare la disuguaglianza triangolare;

v. estendere iii. al caso più generale in cui esiste il limite $d_\infty(x, y) = \lim_{n \to +\infty} d_n(x, y)$. Applicare i risultati al caso delle distanze d_p $(1 \leq p \leq +\infty)$ in $\mathbb{R}^n$.

Esercizio 4. Si consideri la seguente funzione $f : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$ definita da

$$f(x) = f\big((x_1, x_2)\big) := \begin{cases} \|x\| & \text{se } x_2/x_1 \in \mathbb{Q},\ x_1 \neq 0 \\ -\|x\| & \text{altrimenti,} \end{cases}$$

dove $\|x\| := \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$ è la norma euclidea di x. Si verifichi che

a) f è continua in ogni punto se $\mathbb{R}^2$ viene munito della distanza del riccio;

b) f è continua in 0 e discontinua in ogni $x \neq 0$ se $\mathbb{R}^2$ viene munito della distanza euclidea;

c) concludere che la distanza euclidea e quella del riccio non sono equivalenti.

Esercizio 5. (Giusti 20.15) Dimostrare che una successione f_k in $\mathcal{B}(X, Y)$ converge uniformemente a una funzione f se e solo se per ogni successione $x_k \in X$ si ha $d_Y(f_k(x_k), f(x_k)) \to 0$ per $k \to +\infty$.

Esercizio 6. (si veda anche Giusti 20.15) Siano $f, f_k \in \mathcal{C}_b(X, Y)$. Si dice che f_k *tende uniformemente a f sui compatti di X* se per ogni compatto $K \subseteq X$ la successione f_k tende uniformemente a f in $\mathcal{C}_b(K, Y)$. Dimostrare che f_k tende uniformemente a f sui compatti di X se e solo se per ogni successione $x_k \in X$ con $x_k \to x_o$ si ha $f_k(x_k) \to f(x_o)$ per $k \to +\infty$.

Esercizio 7. Siano d_∞ e d_I la distanza uniforme e la distanza integrale su $C([0,1])$. Dimostrare che $d_I(f,g) \le d_\infty(f,g)$ ma che tuttavia le due distanze non sono Lipschitz equivalenti, cioè che non esiste $\beta > 0$ tale che $d_\infty(f,g) \le \beta\, d_I(f,g)$ per ogni $f, g \in C([0,1])$.

Esercizio 8. (in parte, Giusti 20.10) Sia $X = C([0,1])$ e siano d_∞ e d_I la distanza uniforme e la distanza integrale; si definisca $F : X \to X$, $f \mapsto F(f)$ mediante la posizione $F(f)(x) := xf(x)$.

a) Dimostrare che le mappe $F : (X, d_\infty) \to (X, d_\infty)$, $F : (X, d_I) \to (X, d_I)$, come anche $F : (X, d_\infty) \to (X, d_I)$ sono continue;

b) verificare che invece $F : (X, d_I) \to (X, d_\infty)$ non è continua;

c) utilizzare b) per dimostrare che d_I e d_∞ non sono distanze equivalenti.

Esercizio 9. Sia (X, d) spazio metrico e si definisca

$$\mathcal{L} = \mathrm{Lip}(X) := \{f : X \to \mathbb{R},\ f \text{ lipschitziana}\},$$

$$\mathrm{Lip}(f) := \sup\left\{\frac{|f(x) - f(y)|}{d(x,y)} \ :\ x, y \in X,\ x \ne y\right\}.$$

Verificare che $\mathcal{L}$ è uno spazio vettoriale. Fissato $x_o \in X$ e posto

$$\delta(f,g) = |f(x_o) - g(x_o)| + \mathrm{Lip}(f - g),$$

dimostrare che $(\mathcal{L}, \delta)$ è spazio metrico completo. Nel caso in cui X è compatto, si ponga anche

$$\delta_u(f,g) = \sup_{x \in X} |f(x) - g(x)| + \mathrm{Lip}(f - g).$$

Dimostrare che anche $(\mathcal{L}, \delta_u)$ è spazio metrico completo. La due distanze sono equivalenti?

Posto più in generale

$$C^{0,\alpha}(X) = \{f : X \to \mathbb{R},\ f \text{ hölderiana di esponente } \alpha\},$$
$$h_\alpha(f) := \sup\left\{\frac{|f(x) - f(y)|}{d(x,y)^\alpha} \ :\ x, y \in X,\ x \ne y\right\},$$
$$\delta_\alpha(f,g) = |f(x_o) - g(x_o)| + h_\alpha(f - g),$$

con $x_o \in X$ fissato, dimostrare che $(C^{0,\alpha}(X), \delta_\alpha)$ è spazio metrico completo.

Esercizio 10. Con riferimento alle notazioni dell'Esercizio 9, si verifichi che le posizioni

$$\|f\| = |f(x_o)| + \mathrm{Lip}(f),$$
$$\|f\|_u = \|f\|_\infty + \mathrm{Lip}(f),$$
$$\|f\|_\alpha = |f(x_o)| + h_\alpha(f),$$

definiscono tre norme su, rispettivamente, $\mathrm{Lip}(X)$ la prima, $\mathrm{Lip}(X)$ con X compatto la seconda, $C^{0,\alpha}(X)$ la terza. Tali norme inducono, rispettivamente, la distanze δ, δ_u e δ_α.

Esercizio 11. Sia $f_n : [a,b] \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, una successione di funzioni continue tali che: i) f_n converge uniformemente a f in ogni intervallo $[a+\delta, b]$ con $0 < \delta < b - a$; ii) $\{f_n\}$ sono uniformemente limitate in un intorno destro di a. Dimostrare che $\int_a^b f_n(x)\,dx \to \int_a^b f(x)\,dx$ se $n \to +\infty$. Verificare che il risultato non è più vero se si toglie l'ipotesi ii).

Esercizio 12. Sia A un insieme non vuoto e si definisca

$$\ell^2(A) := \Big\{ f : A \to \mathbb{R} : \sum_{a \in A} |f(a)|^2 < +\infty \Big\}.$$

Si può verificare che se $f \in \ell^2(A)$ allora l'insieme $\{a \in A : \ f(a) \neq 0\}$ è al più numerabile, dunque la somma $\sum_{a\in A}$ è in realtà una serie. Nel caso $A = \mathbb{N}$, $\ell^2(\mathbb{N})$ coincide con l'insieme delle successioni di numeri reali (a_n) "a quadrato sommabile" cioè tali che la serie di termine generale a_n^2 è convergente. Per $f, g \in \ell^2(A)$ si ponga ora

$$(f, g)_2 = \sum_{a \in A} f(a)g(a).$$

Dimostrare che $\big(\ell^2(A), (\cdot,\cdot)_2\big)$ è uno spazio di Hilbert. Verificare che una base ortonormale è data dalle funzioni $\{e_i(\cdot)\}_{i\in A}$ definite da $e_i(a) = \delta_{i,a}$, con $\delta_{i,a}$ delta di Kronecker, perciò la cardinalità della base coincide con la cardinalità di A. (Si potrebbe verificare che $\ell^2(A)$, al variare di A, fornisce tutti i possibili spazi di Hilbert su $\mathbb{R}$, a meno di omeomorfismi che conservano il prodotto scalare.)

Esercizio 13. (distanza da un punto e da un insieme) Sia (X, d_X) spazio metrico, $x_o \in X$, $E \subseteq X$. Allora

a) la funzione $f_o : X \to \mathbb{R}$ data da $f_o(x) := d_X(x, x_o)$ è lipschitziana di costante $\mathrm{Lip}(f_o) \le 1$;
b) la funzione $f_E : X \to \mathbb{R}$ definita da $f_E(x) := d(x, E) := \inf\big\{d_X(x, y) : y \in E\big\}$ è lipschitziana di costante $\mathrm{Lip}(f_E) \le 1$;
c) si ha $d(x, E) = 0$ se e solo se $x \in \overline{E}$.

Esercizio 14. (continuità per multifunzioni) Una *multifunzione* da X in Y è un'applicazione $F : X \to 2^Y$. Si vuole introdurre un concetto di continuità per tali funzioni. Si supponga che (X, d_X), (Y, d_Y) siano spazi metrici; si vorrebbe definire una metrica su 2^Y. Si ponga

$$\mathcal{K}(Y) := \big\{A \subseteq Y : \ A \neq \varnothing \text{ chiuso e limitato}\big\}.$$

Se A, B sono elementi di $\mathcal{K}(Y)$ si definiscano

$$\delta(A, B) := \sup\big\{d(a, B) : \ a \in A\big\} + \sup\big\{d(b, A) : \ b \in B\big\} =: \sup_{a\in A} d(a, B) + \sup_{b\in B} d(b, A)$$

(si veda l'Esercizio 13 per la definizione e le proprietà di $d(a, B)$) e la *distanza di Hausdorff*

$$\delta_H(A, B) := \max\Big\{\sup_{a\in A} d(a, B), \sup_{b\in B} d(b, A)\Big\}.$$

Verificare che δ e δ_H sono due distanze equivalenti su $\mathcal{K}(Y)$. Le distanze δ e δ_H permettono di introdurre il concetto di continuità per multifunzioni, almeno se $F : X \to \mathcal{K}(Y)$, cioè per multifunzioni a "valori" chiusi e limitati. Provare che invece δ e δ_H non definiscono delle distanze su $\big\{A \subseteq Y : A \neq \varnothing \text{ limitato}\big\}$, né su $\big\{A \subseteq Y : A \neq \varnothing \text{ chiuso}\big\}$ (né tantomeno nell'insieme delle parti 2^Y), perché?

Esercizio 15. Sia X un insieme e sia $\delta : X \times X \mapsto [0, +\infty]$ un'applicazione tale che

(i) $\delta(x, y) = 0 \iff x = y$,
(ii) $\delta(x, y) = \delta(y, x)$, per ogni $x, y \in X$,
(ii) $\delta(x, y) \le \delta(x, z) + \delta(z, y)$, per ogni $x, y, z \in X$.

Si osservi che δ non è una distanza su X perché può assumere il valore $+\infty$. Per ogni $x, y \in X$ si ponga

$$\bar{\delta}(x,y) = \begin{cases} \dfrac{\delta(x,y)}{1+\delta(x,y)}, & \text{se } \delta(x,y) < +\infty, \\ 1, & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

a) Verificare che $\bar{\delta}$ definisce una distanza su X.

b) Sia $E \subseteq X$ un sottoinsieme tale che $\forall x, y \in E$ si abbia $\delta(x,y) < \infty$. Allora δ ristretta su E definisce una distanza in E. Verificare che δ e $\bar{\delta}$ sono distanze equivalenti in E.

c) Utilizzare a) per definire una distanza sull'insieme $\mathcal{C}(\mathbb{R}^2) := \big\{A \subseteq \mathbb{R}^2 : \ A \neq \varnothing \text{ chiuso}\big\}$.

Esercizio 16. Sia $k \in [0, +\infty[$ e siano $x = (x_1, x_2)$, $y = (y_1, y_2)$ due generici punti di $\mathbb{R}^2$. Si definisca

$$d_k(x,y) = \max\big\{k|x_1 - y_1| + |x_2 - y_2|, \, |x_1 - x_2| + k|y_1 - y_2|\big\}.$$

a) Verificare che $\forall k > 0$, d_k definisce una distanza su $\mathbb{R}^2$.

b) Disegnare $B_k(0;1] = \big\{x \in \mathbb{R}^2 : \ d_k(x,0) \le 1\big\}$, la palla chiusa di centro 0 e raggio 1 per la distanza d_k. (Suggerimento: distinguere i casi $k = 0, 1$, oppure $k > 1$ oppure $0 < k < 1$.) Osservare che per $k = 0, 1$ si riottengono due distanze conosciute. Quali?

c) Dire per quali valori di k, la distanza d_k è equivalente alla distanza euclidea d_e su $\mathbb{R}^2$.

d) Verificare che $\forall k > 0$, $B_k(0;1]$ è un chiuso e limitato nella topologia euclidea di $\mathbb{R}^2$.

e) Sia $\mathcal{K}(\mathbb{R}^2) = \big\{A \subseteq \mathbb{R}^2 : \ A \neq \varnothing \text{ chiuso e limitato}\big\}$. È noto che $\mathcal{K}(\mathbb{R}^2)$ è uno spazio metrico con la distanza di Hausdorff δ_H (si veda l'Esercizio 14). Si consideri l'applicazione tra spazi metrici $F : [0, +\infty[\mapsto \mathcal{K}(\mathbb{R}^2)$ definita da $F(k) = B_k(0;1]$.

(i) Verificare che F è continua, anzi, Lipschitziana. Più precisamente verificare che per ogni $0 \le h, k \le 1$ vale

$$\delta_H\big(F(k), F(h)\big) \le \frac{\sqrt{2}}{(1+k)(1+h)} \cdot |k-h|,$$

per ogni $h, k \ge 1$ vale

$$\delta_H\big(F(k), F(h)\big) \le \max\left\{\frac{\sqrt{2}}{(1+k)(1+h)}, \, \frac{1}{hk}\right\} \cdot |k-h|,$$

mentre se $h < 1 \le k$ si ha

$$\delta_H\big(F(k), F(h)\big) \le \max\left\{\frac{\sqrt{2}|k-h|}{(1+k)(1+h)}, \, \frac{|k-1|}{k}\right\} \le \max\left\{\frac{\sqrt{2}}{(1+k)(1+h)}, \, \frac{1}{k}\right\}|k-h|.$$

Dedurre che F è Lipschitziana con costante di Lipschitz minore o uguale a $\sqrt{2}$;

(ii) calcolare il $\lim_{k \to +\infty} F(k)$.

Esercizio 17. Sia $k \in [0, +\infty[$ e siano $x = (x_1, x_2)$, $y = (y_1, y_2)$ due generici punti di $\mathbb{R}^2$. Definiamo

$$d_k(x,y) = \max\big\{|k(x_1 - y_1) + (x_2 - y_2)|, \, |(x_1 - y_1) + k(x_2 - y_2)|\big\}.$$

a) Si dica per quali valori di k, la funzione d_k definisce una distanza su $\mathbb{R}^2$ e si disegni la palla chiusa $B_k(0;1]$. Verificare che $B_k(0;1]$ è chiuso nella topologia euclidea di $\mathbb{R}^2$. Trovare infine per quali k, d_k è equivalente alla distanza euclidea di $\mathbb{R}^2$.

b) Sia ora E l'insieme dei valori k per cui d_k *non* è una distanza e si fissi un $k \in E$.

(i) Verificare che la collezione d'insiemi $\mathcal{U}(\bar{x}) = \{U \subseteq \mathbb{R}^2 : \ \exists\, r > 0, \, B_k(\bar{x}, r) \subseteq U\}$, al variare di $\bar{x} \in \mathbb{R}^2$, costituisce la famiglia degli intorni per una topologia su $\mathbb{R}^2$.

(ii) Dire se la topologia ottenuta è metrizzabile, cioè se esiste una distanza su $\mathbb{R}^2$ per cui $\mathcal{U}(\bar{x})$ è la famiglia di intorni corrispondente (chiaramente non può essere metrizzata con d_k perché non è una distanza, ma a priori potrebbe esistere un'altra metrica che induce la topologia).

Esercizio 18. Sia $\mathcal{C}(\mathbb{R}^2) = \{A \subseteq \mathbb{R}^2 : \ A \neq \varnothing \text{ chiuso}\}$. Per $x_o \in \mathbb{R}^2$ fissato si ponga $B_k = B_e(x_o, k]$, con $k \in \mathbb{N}$, e $\forall A, C \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^2)$ si definisca

$$\delta_o(A, C) := \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} \min\{1, \delta_H(A \cap B_k, C \cap B_k)\},$$

con la convenzione che $\delta_H(\varnothing, A) = \delta_H(A, \varnothing) = \delta_H(\varnothing, \varnothing) = 0$ per ogni insieme A.

a) Verificare che δ_o definisce una distanza su $\mathcal{C}(\mathbb{R}^2)$ (in un certo senso questa distanza è "localizzata" rispetto a x_o, nel senso che si pesano sempre meno le parti degli insiemi A e C che sono via via più lontane da x_o);

b) fissato $x_o = (0,0)$ e con riferimento all'Esercizio 17, spiegare (ed eventualmente provare) perché la mappa $F : [0,1[\to \mathcal{K}(\mathbb{R}^2)$ data da $F(k) = B_k(0,1]$ è continua se in $\mathcal{K}(\mathbb{R}^2)$ si scelgono indipendentemente la metrica δ_H oppure δ_o, ma $\lim_{k\to 1} F(k)$ non esiste se si sceglie δ_H mentre $\lim_{k\to 1} F(k) = B_1(0,1]$ se si sceglie la distanza δ_o (dunque $F : [0,1] \to \mathcal{C}(\mathbb{R}^2)$ è continua se in $\mathcal{C}(\mathbb{R}^2)$ si sceglie la distanza δ_o).

Esercizio 19. Sia $p \in]0,1[$.

a) Si dimostri la disuguaglianza $1 + t \leq (1 + t^p)^{1/p}$, $\forall t \in [0,1]$. Si deduca che $\forall a, b \geq 0$ vale $(a+b)^p \leq a^p + b^p$.

b) Si utilizzi il risultato di a) per verificare che la posizione

$$\delta_p(x, y) = |x_1 - y_1|^p + |x_2 - y_2|^p,$$

dove $x = (x_1, x_2), y = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$, definisce una distanza su $\mathbb{R}^2$. Disegnare (anche approssimativamente) la palla $B_p(0,1] = \{x \in \mathbb{R}^2 : \ \delta_p(x, 0) \leq 1\}$.

c) Dire per quali valori di p la distanza δ_p è equivalente alla distanza euclidea d_e.

d) Sia $F :]0,1[\mapsto \mathcal{K}(\mathbb{R}^2)$ definita da $F(p) = B_p(0,1]$. Si calcoli il limite $\lim_{p\to 0} F(p)$ e lo si indichi con $B_0(0,1]$. Dire se $B_0(0,1]$ è aperto oppure chiuso in $(\mathbb{R}^2, d_e)$. Allo stesso modo si può definire $B_0(\bar{x}, r] = \lim_{p\to 0} B_p(\bar{x}, r]$.

(i) Sia (E, d) uno spazio metrico. Provare che $E = \cup_{r>0} B_E(0, r) = \cup_{r>0} B_E(0, r]$.

(ii) Dedurre dal punto (a) che $\{B_0(0;\rho] : \ \rho > 0\}$ non può essere l'insieme delle palle chiuse centrate nell'origine per qualche distanza su $\mathbb{R}^2$.

(iii) Dire se $\{B_0(\bar{x}, r) : \ r > 0\}$ può essere una base d'intorni di un generico punto $\bar{x}$ per una topologia su $\mathbb{R}^2$ (per cui gli intorni del punto sono soprainsiemi degli insiemi della base).