Corso di Laurea in Matematica

# Analisi Matematica II

Esercizi sulle Equazioni Differenziali
Versione del 15/03/2017

## Esercizi del Giusti

**Esercizio 1. (Giusti I ed., Cap.3, 1.3)** Ridurre a sistemi del primo ordine le seguenti equazioni differenziali

1. $u'' + 3u' - \mathrm{e}^{ut} = 0,$ 2. $u''' + 3tu\cos(u^2) = 0,$ 3. $u'' + tu'(1+u^2) = \operatorname{sen} t.$

**Esercizio 2. (Giusti I ed., Cap.3, 2.2)** Trovare almeno una soluzione dei seguenti problemi di Cauchy. Quando possibile, discutere anche l'unicità di tale soluzione.

1. $\begin{cases} u' = (1+u^2)\operatorname{sen} t \\ u(0) = 1, \end{cases}$ 2. $\begin{cases} u' = \mathrm{e}^t \cos^2 u \\ u(1) = \pi/4, \end{cases}$ 3. $\begin{cases} u' + t(u^2-1)/u = 0 \\ u(1) = 1, \end{cases}$

4. $\begin{cases} u' = \sqrt{(1+u)/(1+t^2)} \\ u(0) = 2, \end{cases}$ 5. $\begin{cases} u' + 2tu = tu^3 \\ u(0) = 0, \end{cases}$ 6. $\begin{cases} u' = t^2(\mathrm{e}^{tu} - t^3u - \cos u) \\ u(0) = 0. \end{cases}$

**Esercizio 3. (Giusti 17.2)** Trovare l'integrale generale delle seguenti equazioni, discutendo anche l'unicità dei problemi di Cauchy associati:

1. $u' = \dfrac{u+t}{t},$ 2. $u' = t + \dfrac{u^2}{t^3},$ 3. $u' = \sqrt{\dfrac{u}{t}} - \dfrac{u}{t}.$

---

## Esercizi vari

**Esercizio 1.** Scrivere le iterate di Picard relative ai problemi di Cauchy

$$\begin{cases} z' = w \\ w' = -z \\ z(0) = 0,\ w(0) = 1, \end{cases} \qquad \begin{cases} z' = w \\ w' = z \\ z(0) = 0,\ w(0) = 1, \end{cases}$$

e utilizzarle per trovare una soluzione locale; discutere l'unicità della soluzione trovata.

**Esercizio 2.** Provare a fare l'analogo dell'Esercizio 1 con il problema

$$\begin{cases} u' = \mathrm{e}^{-u} \\ u(1) = 0. \end{cases}$$

Trovare infine l'integrale generale dell'equazione $u' = \mathrm{e}^{-u}$.

**Esercizio 3.** Verificare che ciascuna delle seguenti funzioni è una soluzione dell'equazione differenziale scritta a fianco

1. $u(t) = \sqrt[3]{t^3 + 3t + 2}, \qquad u' = (t^2 + 1)/u^2;$
2. $u(t) = \log(t^2 + 1), \qquad u' = 2t\mathrm{e}^{-u};$
3. $u(t) = \sqrt{t^2 + 4t + 5}, \qquad u' = (t + 2)/u;$
4. $u(t) = \sqrt{2t^2 + 1} - 3, \qquad u' = 2t/(u + 3).$

**Esercizio 4.** Verificare che sull'intervallo $[-\sqrt{\pi/2}, \sqrt{\pi/2}]$ la funzione $u(t) = \operatorname{sen}(t^2)$ è soluzione dell'equazione differenziale

$$u' = 2t\sqrt{1 - u^2}.$$

La funzione è ancora soluzione in $[\sqrt{\pi/2}, \sqrt{3\pi/2}]$?

**Esercizio 5.** Trovare l'integrale generale delle seguenti equazioni, discutendo anche l'unicità dei problemi di Cauchy associati:

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1. $u' = \dfrac{t\mathrm{e}^t}{\mathrm{e}^u}$, | 2. $u' = \dfrac{u^2 + 3}{tu}$, | 3. $u' = \dfrac{2t(u^3 + 1)}{3u^2(t^2 + 2)}$, | 3. $u' = \dfrac{1 - 3t^2}{u^2}$, |
| 5. $u' = tu^3$, | 6. $u' = \dfrac{u}{t} + \dfrac{t}{u}$, | 7. $u' = \dfrac{u^2 - 1}{2t}$, | 8. $u' = \dfrac{t\sqrt{1 - u^2}}{t^2 + 1}$, |
| 9. $u' = \sqrt{\dfrac{u}{t - 1}}$, | 10. $u' = \dfrac{1 - u^2}{t}$, | 11. $u' = \dfrac{u^2 - 1}{tu}$, | 12. $u' = \dfrac{2\sqrt{u}}{t + 2}$, |
| 13. $u' = \dfrac{3tu}{\ln u}$, | 14. $u' = \dfrac{tu(1 - u)}{t^2 + 1}$, | 15. $u' = \dfrac{(u^2 - 2)\cos t}{2u \operatorname{sen} t}$, | 16. $u' = \dfrac{2u(u + 1)}{t}$. |

**Esercizio 6.** Trovare l'integrale generale delle seguenti due equazioni, discutendo anche l'unicità dei problemi di Cauchy associati: $tu' = -u^2 \ln t - 2u$; $u' = (t^2 - u^2)/(2tu)$.

**Esercizio 7.** Trovare la soluzione generale per le seguenti equazioni lineari:

$$
\begin{array}{lll}
u'' + 4u' - 5u = 0, & u''' + 4u'' + 4u' = 0, & u'' + u' + 2u = 0, \\
u'' + 4u' - 5u = t, & u'' + 4u' - 5u = \mathrm{e}^t, & u'' + 4u' - 5u = t\mathrm{e}^{2t}, \\
u'' + u' + 2u = \mathrm{e}^{-t}\operatorname{sen}(3t), & u''' + 4u'' + 4u' = \mathrm{e}^t, & u''' + 4u'' + 4u' = t, \\
u'' + 2u' + u = 2\mathrm{e}^{-t}, & u''' + 4u' = 4 + 3\cos t, & u''' - u'' + u' + u = \mathrm{e}^t \cos t.
\end{array}
$$

**Esercizio 8.** Risolvere i seguenti problemi per equazioni lineari:

$$\begin{cases} u'' + 2u' + u = 2\mathrm{e}^{-t}, \\ u(0) = 0, \ u'(0) = 0, \end{cases} \qquad \begin{cases} u'' + 2u' + u = 2\mathrm{e}^{t} + t^3, \\ u(0) = 1, \ u'(0) = 0, \end{cases}$$

$$\begin{cases} u'' - u' - 6u = 3t^2 - 5t, \\ u(0) = -1, \ u'(0) = 0, \end{cases} \qquad \begin{cases} u'' - 2u' + 5u = 5, \\ u(0) = 2, \ u'(0) = 1, \end{cases}$$

$$\begin{cases} u'' + 2u' - 3u = -4\mathrm{e}^{-3t}, \\ u(0) = 1, \ u'(0) = -2, \end{cases} \qquad \begin{cases} u'' - 6u' + 5u = 12t\mathrm{e}^{-t}, \\ u(0) = 0, \ u'(0) = -6, \end{cases}$$

$$\begin{cases} u'' - 3u' - 4u = -5\mathrm{e}^{-t}, \\ u(0) = 1, \ \lim\limits_{t \to +\infty} u(t) = 0, \end{cases} \qquad \begin{cases} u'' - u' - 2u = \mathrm{e}^{-t}, \\ u(0) = -1, \ \lim\limits_{t \to +\infty} u(t) = 0. \end{cases}$$

## Esercizi di carattere teorico

**Esercizio 1.** Dimostrare che ogni funzione localmente lipschitziana è lipschitziana sui compatti.

**Esercizio 2.** Dimostrare che le tre formulazioni del criterio di sublinearità presentate a lezione sono logicamente equivalenti.

**Esercizio 3.** Data l'equazione differenziale $u' = f(u)$ con $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ localmente lipschitziana, dimostrare che ogni soluzione è strettamente monotona oppure è un equilibrio. È ancora vero se $f$ è solamente continua?

**Esercizio 4.** Per quali delle seguenti equazioni ci si deve aspettare sicuramente l'esplosione in norma delle eventuali soluzioni non globalmente definite? a) $u' = (t^2 + u^3)/t$; b) $u' = t \ln |u|$; c) $u' = (u - t)/(u + t)$.

**Esercizio 5.** Dire quali tra le seguenti equazioni ha unicità delle soluzioni di tutti i problemi di Cauchy: a) $u' = \sqrt[3]{|u|}$; b) $u' = 1 + \sqrt[3]{|u|}$; c) $u' = u \sqrt[3]{|u|}$.

**Esercizio 6.** Sia $g$ continua e tale che per ogni $\overline{u}$ tale che $g(\overline{u}) = 0$ esista un intorno $U$ su cui $g$ è lipschitziana e $g(u) \neq 0$ per $u \in U \setminus \{\overline{u}\}$ (ovvero $g$ ha solamente zeri isolati ed è localmente lipschitziana in un intorno di ciascuno di essi). Dimostrare che gli integrali impropri

$$\int^{\overline{u}} \frac{1}{g(z)}\, dz, \qquad \int_{\overline{u}} \frac{1}{g(z)}\, dz$$

sono divergenti. Senza utilizzare il Teorema di Cauchy-Lipschitz dedurre che l'equazione differenziale $u' = h(t)g(u)$, con $h : I \to \mathbb{R}$ continua e $g$ come sopra, ha unicità delle soluzioni per tutti i problemi di Cauchy associati.

**Esercizio 7.** Verificare che le seguenti equazioni soddisfano le ipotesi di almeno uno dei tre criteri di sublinearità presentati a lezione. Dire a quali si può anche applicare il criterio di lipschitzianità globale.

1. $u' = h(t) \operatorname{sen} u$,
2. $u' = u \cos(tu)$,
3. $u' = \operatorname{sen}(u^2)$,
4. $u' = t^3/(u^2 + t^2 + 1)$,
5. $u' = \sqrt{|u + t|}$,
6. $u' = \dfrac{tu^2 + 1}{|u| + 2}$.

**Esercizio 8.** Per le equazioni differenziali

1. $u' = \dfrac{u^2 - 1}{|tu| + 1}$,
2. $u' = \dfrac{1}{u^2 + t^2}$,

dimostrare che il campo vettoriale non è globalmente lipschitziano né sublineare.

**Esercizio 9.** Scrivere esplicitamente un'equazione differenziale $u' = g(u)$ con un equilibrio $\overline{u}$ tale che il relativo problema di Cauchy con dati $u(0) = \overline{u}$ abbia unicità delle soluzioni in futuro ma non in passato.

**Esercizio 10.** Sia $z_A : \mathbb{R} \mapsto \mathcal{M}(n, \mathbb{R})$ l'unica soluzione del problema di Cauchy per l'equazione differenziale matriciale

$$\begin{cases} Y' = AY \\ Y(0) = I, \end{cases} \tag{1}$$

con $A \in \mathcal{M}(n, \mathbb{R})$ matrice fissata, dove $AY$ denota il prodotto matriciale e $I$ la matrice identità. Utilizzando *solamente i risultati sull'esistenza e unicità* per le equazioni differenziali, dimostrare che se $A$ e $B$ commutano allora $z_{A+B}(t) = z_A(t)z_B(t)$ per ogni $t \in \mathbb{R}$, dove $z_A(t)z_B(t)$ denota ancora il prodotto tra matrici.

**Esercizio 11.** Dato il sistema

$$\begin{cases} x' = f(x) \\ y' = g(x)y, \end{cases}$$

con $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ localmente lipschitziana e $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua, dimostrare che i relativi problemi di Cauchy hanno unicità locale delle soluzioni.

**Esercizio 12.** Dimostrare che se $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ sono reali distinti, allora le funzioni $\mathrm{e}^{\lambda_1 t}, \mathrm{e}^{\lambda_2 t}, \dots, \mathrm{e}^{\lambda_n t}$ sono linearmente indipendenti. Fare l'analogo con le funzioni

$$\mathrm{e}^{\alpha_1 t}\cos(\beta_1 t),\ \mathrm{e}^{\alpha_1 t}\operatorname{sen}(\beta_1 t), \dots, \mathrm{e}^{\alpha_n t}\cos(\beta_n t),\ \mathrm{e}^{\alpha_n t}\operatorname{sen}(\beta_n t),$$

dove i numeri complessi $\lambda_k = \alpha_k + i\beta_k$ sono tutti distinti. Infine, fare ancora l'analogo con le funzioni

$$t^h\mathrm{e}^{\alpha_1 t}\cos(\beta_1 t),\ t^h\mathrm{e}^{\alpha_1 t}\operatorname{sen}(\beta_1 t), \dots, t^h\mathrm{e}^{\alpha_n t}\cos(\beta_n t),\ t^h\mathrm{e}^{\alpha_n t}\operatorname{sen}(\beta_n t),$$

con $h = 0, \dots, p$ e i $\lambda_k$ ancora distinti.