



Dipartimento di Scienze Matematiche, Informatiche e Fisiche
Corso di Laurea in Matematica

ANALISI MATEMATICA II

Appello del 19 luglio 2017

N.B.: scrivere nome, cognome e numero di matricola su ogni foglio consegnato.

Tempo a disposizione: 3 ore

1 Data la serie di funzioni

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{x\sqrt{n}} \ln \left(1 + \frac{x^2}{n} \right)$$

- determinare l'insieme $P \subseteq \mathbb{R}$ su cui la serie data converge puntualmente;
- determinare tutti e soli gli intervalli $I \subseteq P$ su cui la serie converge totalmente;
- detta $f(x)$ la somma della serie, studiarne la continuità. Dimostrare che è possibile estendere f in maniera continua in $x = 0$, calcolando anche il valore $f(0)$.

2 Data la funzione $f(x, y) = x^6 - y^6 + x^2 + y^2 + x^2y^2$

- determinare i punti stazionari di f e studiarne la natura;
- dimostrare che l'equazione $f(x, y) = 0$ definisce implicitamente un'unica funzione $y = y(x)$ in un intorno di $x = 0$, di classe C^1 e tale che $y(0) = 1$. Scrivere la formula di Taylor di ordine 2 per $y(x)$ con punto iniziale $x = 0$ e con resto di Peano.
- individuare tutti i $c \in \mathbb{R}$ per cui esistono punti P_c tali che $f(P_c) = c$ e in un intorno dei quali l'equazione $f(x, y) = c$ non definisce implicitamente né una funzione $y = y(x)$ né una funzione $x = x(y)$.

3 Data l'equazione differenziale $u' = t^2u(u^2 - 1)$, dove $u = u(t)$,

- studiare l'esistenza e unicità locale delle soluzioni. È possibile applicare i teoremi di esistenza globale?
- trovare gli equilibri dell'equazione. Senza eventualmente calcolarle, dire se esistono soluzioni globalmente definite e diverse dagli equilibri, giustificandone il perché. Disegnare l'andamento qualitativo delle soluzioni al variare del dato iniziale;
- risolvere il problema di Cauchy con dati $u(0) = -2$.

4 Sia $R > 0$ un dato numero reale. In un riferimento Cartesiano x, y, z è dato l'insieme M dei punti $P = (x, y, z)$ che distano meno di $2R$ dall'origine e che verificano la condizione $4z^2 < R^2$. Calcolare

$$I = \int_M z^2 \, dx dy dz .$$