Università degli Studi di Udine — Anno Accademico 2016/2017

Dipartimento di Scienze Matematiche, Informatiche e Fisiche
Corso di Laurea in Matematica

Analisi Matematica II

Prova parziale del 6 febbraio 2017

N.B.: scrivere nome, cognome e numero di matricola su ogni foglio consegnato.
Tempo a disposizione: 2 ore

1 Data la serie di funzioni

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\mathrm{e}^{(x-2)n}}{1+|x|n^2}$$

a) determinare l'insieme $P \subseteq \mathbb{R}$ su cui la serie data converge puntualmente;

b) determinare tutti e soli gli intervalli $I \subseteq P$ su cui la serie converge totalmente oppure uniformemente.

2 Data la funzione $f(x,y) = x^2 - x^2y^2 + y^2$

a) trovare gli eventuali estremi relativi e assoluti di f e individuare $f(\mathbb{R}^2)$;

b) dopo averne dimostrato l'esistenza, trovare gli estremi assoluti di f ristretta all'insieme $E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ x^2 + x^2y^2 + y^2 \leq 15\}$.

3 Detta $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la funzione periodica di periodo 2π tale che $f(x) = |2x-\pi|$ per $x \in [0, 2\pi[$,

a) scrivere la serie di Fourier su $[0, 2\pi]$ associata a f e studiarne la convergenza puntuale. Individuare gli intervalli sui quali la convergenza è uniforme;

b) utilizzare l'analisi effettuata in a) per calcolare la somma delle due serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(2n)^2} = \frac{1}{2^2} - \frac{1}{4^2} + \frac{1}{6^2} - \frac{1}{8^2} + \dots$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} = \frac{1}{1^2} - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} + \dots$$

Soluzioni della prova parziale del 6 febbraio 2017

1a La funzione $f_n(x) = \mathrm{e}^{(x-2)n}/(1+|x|n^2)$ è una funzione ovunque definita e positiva. Essendo $f_n(x) < \mathrm{e}^{(x-2)n} = (\mathrm{e}^{x-2})^n$, il termine generale è maggiorato dal termine generale di una serie geometrica di ragione $\mathrm{e}^{x-2} < 1$, convergente per $x < 2$. Per confronto anche la serie data converge nei medesimi x. Se $x > 2$ si ha $\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = +\infty$, dunque la serie diverge. Al medesimo risultato si può pervenire utilizzando, per esempio, il criterio della radice: essendo $\sqrt[n]{f_n(x)} = \mathrm{e}^{x-2}/\sqrt[n]{1+|x|n^2} \to \mathrm{e}^{x-2}$ per $n \to +\infty$, allora la serie converge (risp. diverge) se $\mathrm{e}^{x-2} < 1$ (risp. > 1). Nel rimanente caso $x = 2$ si ha $f_n(2) = 1/(1+2n^2) \sim 1/n^2$ dunque c'è ancora convergenza. In definitiva la serie converge puntualmente su $P :=]-\infty, 2]$.

1b Valutiamo la convergenza totale in P, controllando se la serie di termine generale $M_n = \max_P |f_n|$ converge. Per calcolare *esattamente* M_n bisogna studiare la funzione f_n (cosa non sempre agevole). In questo caso f_n è derivabile tranne che in $x = 0$ e si ha

$$f_n'(x) = \frac{n\mathrm{e}^{(x-2)n}\big[(1+|x|n^2) - \operatorname{sgn}(x)n\big]}{(1+|x|n^2)^2}, \quad x \neq 0.$$

Si osserva subito che $f_n'(x) > 0$ per $x < 0$. Per $x > 0$ si ha invece $f_n'(x) > 0$ se e solo se $(1+xn^2) - n > 0$ cioè se $x > (n-1)/n^2$. Da quest'analisi si evince che $M_n = \max\{f(0), f(2)\} = \max\{\mathrm{e}^{-2n}, 1/(1+2n^2)\} = 1/(1+2n^2)$ il quale è il termine generale di una serie convergente, da cui la convergenza totale e uniforme in P della serie data.

In generale è più conveniente provare a *maggiorare* M_n con una successione a_n, termine generale di una serie convergente. Si osservi che la disuguaglianza $f_n(x) < (\mathrm{e}^{x-2})^n$, ottenuta dallo studio della convergenza puntuale, permette di controllare il massimo di f_n per gli x lontani da $x = 2$; infatti per $x = 2$ il membro destro $(\mathrm{e}^{x-2})^n$ vale esattamente 1 e la serie con questo termine generale diverge. L'altra disuguaglianza, valida per $x \leq 2$, che viene naturale considerare è $f_n(x) < 1/(1+|x|n^2)$. Quest'ultima permette di controllare la convergenza di $f_n(x)$ in tutti i punti (anche in $x = 2$) tranne che in $x = 0$ dove il membro destro vale nuovamente 1. Converrà allora distinguere i casi in cui x è lontano da 2, dove si utilizzerà la prima stima, oppure x è lontano da 0 dove si utilizzerà la seconda. Per fare ciò, ad esempio, distingueremo i casi $x \leq 1$ e $1 \leq x \leq 2$. Se $x \leq 1$ si ha $f_n(x) < \mathrm{e}^{-n}$, mentre se $1 \leq x \leq 2$ si ha $f_n(x) \leq 1/(1+|x|n^2) \leq 1/(1+n^2) < 1/n^2$. In definitiva $\max_P |f_n(x)| = \max_P f_n(x) \leq a_n := \max\{\mathrm{e}^{-n}, 1/n^2\} = 1/n^2$. Poiché la serie di termine generale $1/n^2$ converge, per confronto la serie data converge totalmente, dunque anche uniformemente, su tutto P.

2a La funzione f è definita e di classe C^∞ su $\mathbb{R}^2$. Essendo $\nabla f(x,y) = (2x(1-y^2), 2y(1-x^2))$ i suoi punti critici sono soluzioni del sistema

$$\begin{cases} 2x(1-y^2) = 0 \\ 2y(1-x^2) = 0. \end{cases}$$

Se $x = 0$ necessariamente $y = 0$ e analogamente $y = 0$ implica $x = 0$, dunque $P_1 = (0,0)$ è l'unico punto critico con almeno una delle coordinate nulla. Gli altri punti critici hanno entrambe le coordinate non nulle, per cui soddisfano $1 - y^2 = 0$ e $1 - x^2 = 0$, dunque sono $P_{2/3} = (\pm1, \pm1)$ e $P_{4/5} = (\pm1, \mp1)$. Essendo

$$\nabla^2 f(x,y) = \begin{pmatrix} 2-2y^2 & -4xy \\ -4xy & 2-2x^2 \end{pmatrix},$$

si ha

$$\nabla^2 f(0,0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad \nabla^2 f(\pm 1, \pm 1) = \begin{pmatrix} 0 & -4 \\ -4 & 0 \end{pmatrix}, \quad \nabla^2 f(\pm 1, \mp 1) = \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}.$$

L'Hessiana in P_1 è definita positiva, perciò il punto è di minimo locale. Le seconde due matrici hanno autovalori ± 4 dunque i punti P_k per $k = 2, \dots, 5$ sono tutti punti di sella.

Siccome $\sup_{x \in \mathbb{R}} f(x, 0) = \sup_{x \in \mathbb{R}} x^2 = +\infty$ e $\inf_{x \in \mathbb{R}} f(x, x) = \inf_{x \in \mathbb{R}} (2x^2 - x^4) = -\infty$, la funzione non ammette né massimo né minimo su $\mathbb{R}^2$. Poiché f è continua e il dominio e connesso vale dunque $f(\mathbb{R}^2) = \mathbb{R}$.

$\boxed{\textbf{2b}}$ E è insieme di sottolivello 15 per la funzione $g(x, y) = x^2 + x^2y^2 + y^2$. Tale insieme è chiuso essendo controimmagine di un chiuso tramite un'applicazione continua; inoltre $(x, y) \in E$ implica $x^2 \le 15$, $y^2 \le 15$, cioè $|x| \le \sqrt{15}$ e $|y| \le \sqrt{15}$, perciò è anche limitato. In definitiva E è compatto e per il teorema di Weierstrass f ammette massimo e minimo in E. All'interno di E cadono tutti i punti P_k ma solo P_1 può essere estremale; il punto di massimo deve necessariamente appartenere alla frontiera $\partial E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + x^2y^2 + y^2 = 15\}$. Siccome $\nabla g(x, y) = (2x(1 + y^2), 2y(1 + x^2))$ si annulla solamente in $(0, 0)$ che non appartiene a ∂E, si può applicare il Teorema dei moltiplicatori di Lagrange, per cui esiste $\lambda \in \mathbb{R}$ tale che

$$\begin{cases} \nabla f(x, y) = \lambda \nabla g(x, y) \\ g(x, y) = 15 \end{cases} \iff \begin{cases} 2x(1 - y^2) = \lambda 2x(1 + y^2) \\ 2y(1 - x^2) = \lambda 2y(1 + x^2) \\ x^2 + x^2y^2 + y^2 = 15. \end{cases}$$

Si ha che $x = 0$ è soluzione della prima equazione e sostituita nella terza equazione implica $y^2 = 15$ dunque $y = \pm\sqrt{15}$ (dalla seconda si trova poi λ che in questo caso non serve calcolare); analogamente $y = 0$ è soluzione della seconda equazione e inserita nella terza conduce a $x = \pm\sqrt{15}$. Si ottengono complessivamente le quattro soluzioni $Q_{1/2} = (0, \pm\sqrt{15})$, $Q_{3/4} = (\pm\sqrt{15}, 0)$. Le altre soluzioni soddisfano $x, y \neq 0$ e il sistema si riduce a

$$\begin{cases} 1 - y^2 = \lambda(1 + y^2) \\ 1 - x^2 = \lambda(1 + x^2) \\ x^2 + x^2y^2 + y^2 = 15. \end{cases}$$

Sottraendo le prime due equazioni si ha $x^2 - y^2 = \lambda(y^2 - x^2)$ cioè $(y^2 - x^2)(\lambda + 1) = 0$. Se $\lambda = -1$ la prima equazione diventa $1 - y^2 = -1 - y^2$ che non ha soluzioni; vale dunque $y^2 = x^2$ che inserita nella terza equazione fornisce $x^4 + 2x^2 - 15 = 0$ da cui $x^2 = 3$ cioè $x = \pm\sqrt{3}$. Si ottengono altre quattro soluzioni $Q_{5/6} = (\pm\sqrt{3}, \pm\sqrt{3})$ e $Q_{7/8} = (\pm\sqrt{3}, \mp\sqrt{3})$. Essendo $f(P_1) = 0$, $f(Q_k) = 15$ per $k = 1, \dots, 4$ e $f(Q_k) = -3$ per $k = 5, \dots, 8$, si ha che il massimo di f su E è 15 mentre il minimo è -3.

Per massimizzare/minimizzare f con vincolo $g = 15$ si poteva anche osservare che l'equazione $g(x, y) = 15$ implica $x^2 + y^2 = 15 - x^2y^2$ oppure $x^2y^2 = 15 - (x^2 + y^2)$ il che comporta che i valori di $f(x, y)$ ristretta al vincolo coincidono con quelli delle due funzioni $f_1(x, y) = x^2 - (15 - (x^2 + y^2)) + y^2 = 2(x^2 + y^2) - 15$ e $f_2(x, y) = (15 - x^2y^2) - x^2y^2 = 15 - 2x^2y^2$. A questo punto si può procedere a massimizzare/minimizzare f_1 oppure f_2 sempre con vincolo $g = 15$.

In ogni caso, il metodo più semplice per affrontare l'intero problema era quello di osservare inizialmente che sia f che g sono funzioni dipendenti solamente da x^2 e y^2, ovvero $f(x, y) = h(x^2, y^2)$, $g(x, y) = k(x^2, y^2)$ dove $h(s, t) = s - st + t$ e $k(s, t) = s + st + t$. Mediante il cambio di variabile $s = x^2$, $t = y^2$ ci si riconduce allora a massimizzare/minimizzare $h(s, t)$

nel dominio $s, t \geq 0$ e con vincolo $k(s,t) \leq 15$, abbassando così il grado del problema. Si noti che l'equazione della frontiera $k(s,t) = 15$ può essere esplicitata rispetto a una delle due variabili, per esempio t, essendo $t = (15-s)/(1+s)$, per cui la funzione $h(s,t)$ con vincolo $k(s,t) = 15$ coincide con

$$r(s) := h\Big(s, \frac{15-s}{1+s}\Big) = \frac{2s^2 - 15s + 15}{s+1}.$$

La condizione $t \geq 0$ insieme a $s \geq 0$ si traduce in $s \leq 15$. Alla fine ci si riduce a studiare il minimo e il massimo della funzione $r(s)$ sull'intervallo $[0, 15]$, problema risolubile mediante strumenti del primo corso di analisi matematica. Dallo studio della derivata prima di $r(s)$ si evince che tale funzione in $[0, 15]$ ha un minimo in $s = 3$ e un massimo in $s = 0$ e $s = 15$, ottenendo nuovamente

$$\max_{\partial E} f = \max_{s\in[0,15]} r(s) = 15, \qquad \min_{\partial E} f = \min_{s\in[0,15]} r(s) = -3.$$

3a La funzione f estesa per 2π-periodicità è derivabile tranne che nei punti della forma $2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$, dove non è nemmeno continua, e nei punti $\pi/2 + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$, dove è continua ma ha dei punti angolosi. Avendo anche derivata limitata, f è regolare a tratti. Si può già concludere che la serie di Fourier associata convergerà puntualmente e uniformemente a f in tutti i sottointervalli chiusi dove f è continua, mentre nei punti di discontinuità convergerà alla media tra il limiti sinistro e destro. Calcoliamo i coefficienti di Fourier; vale

$$\begin{aligned} a_0(f) &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\,dx = \frac{1}{\pi}\Big[\int_0^{\pi/2} (\pi - 2x)\,dx + \int_{\pi/2}^{2\pi} (2x-\pi)\,dx\Big] \\ &= \frac{1}{\pi}\Big[\frac{\pi^2}{4} + \frac{9\pi^2}{4}\Big] = \frac{5}{2}\pi. \end{aligned}$$

La frequenza è $\omega = 2\pi/T = 1$. Troviamo anzitutto le seguenti primitive

$$\begin{aligned} F(x) &:= \int (2x-\pi)\cos(nx)\,dx = (2x-\pi)\frac{\operatorname{sen}(nx)}{n} - \int 2\frac{\operatorname{sen}(nx)}{n}\,dx \\ &= \frac{2x-\pi}{n}\operatorname{sen}(nx) + \frac{2}{n^2}\cos(nx) + c, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} G(x) &:= \int (2x-\pi)\operatorname{sen}(nx)\,dx = -(2x-\pi)\frac{\cos(nx)}{n} + \int 2\frac{\cos(nx)}{n}\,dx \\ &= -\frac{2x-\pi}{n}\cos(nx) + \frac{2}{n^2}\operatorname{sen}(nx) + c, \end{aligned}$$

dalle quali segue che

$$\begin{aligned} a_n(f) &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos(nx)\,dx = \frac{1}{\pi}\Big[\int_0^{\pi/2} (\pi-2x)\cos(nx)\,dx + \int_{\pi/2}^{2\pi}(2x-\pi)\cos(nx)\,dx\Big] \\ &= \frac{1}{\pi}\bigg[\Big[-F(x)\Big]_0^{\pi/2} + \Big[F(x)\Big]_{\pi/2}^{2\pi}\bigg] = \frac{1}{\pi}\big[F(2\pi) - 2F(\pi/2) + F(0)\big] \\ &= \frac{1}{\pi}\Big[\frac{2}{n^2} - \frac{4}{n^2}\cos\big(\frac{n\pi}{2}\big) + \frac{2}{n^2}\Big] = \frac{4}{\pi n^2}\Big[1 - \cos\big(\frac{n\pi}{2}\big)\Big], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b_n(f) &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\operatorname{sen}(nx)\,dx = \frac{1}{\pi}\Big[\int_0^{\pi/2} (\pi-2x)\operatorname{sen}(nx)\,dx + \int_{\pi/2}^{2\pi}(2x-\pi)\operatorname{sen}(nx)\,dx\Big] \\ &= \frac{1}{\pi}\bigg[\Big[-G(x)\Big]_0^{\pi/2} + \Big[G(x)\Big]_{\pi/2}^{2\pi}\bigg] = \frac{1}{\pi}\big[G(2\pi) - 2G(\pi/2) + G(0)\big] \\ &= \frac{1}{\pi}\Big[-\frac{3\pi}{n} - \frac{4}{n^2}\operatorname{sen}\big(\frac{n\pi}{2}\big) + \frac{\pi}{n}\Big] = -\frac{2}{\pi}\Big[\frac{1}{n} + \frac{2}{n^2}\operatorname{sen}\big(\frac{n\pi}{2}\big)\Big]. \end{aligned}$$

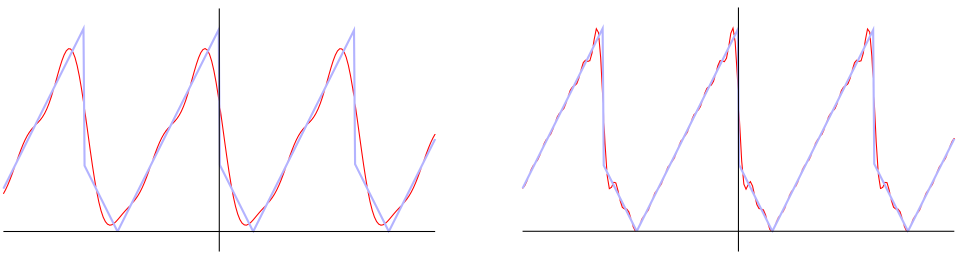
In definitiva la serie di Fourier $Sf(x)$ relativa a $f(x)$ in $[0, 2\pi]$ è

$$Sf(x) = \frac{5}{4}\pi + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{\pi n^2}\Big[1 - \cos\big(\frac{n\pi}{2}\big)\Big]\cos(nx) - \frac{2}{\pi}\Big[\frac{1}{n} + \frac{2}{n^2}\,\mathrm{sen}\,\big(\frac{n\pi}{2}\big)\Big]\,\mathrm{sen}(nx).$$

Per il teorema di convergenza puntuale/uniforme, $Sf(x) = f(x)$ in tutti i punti di continuità di f, cioè per ogni $x \neq 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$, mentre nei rimanenti punti $2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$ la serie di Fourier converge alla media tra il limite sinistro e quello destro, dunque $Sf(2\pi k) = (f(2\pi k-) + f(2\pi k+))/2 = 2\pi$, essendo $f(2\pi k+) = f(0+) = \pi$, $f(2\pi k-) = f(0-) = 3\pi$, cioè

$$2\pi = \frac{5}{4}\pi + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{\pi n^2}\Big[1 - \cos\big(\frac{n\pi}{2}\big)\Big]. \tag{1}$$

In figura il confronto della funzione (in blu) con la somme parziali N-esime con $N = 3$ e $N = 10$ (in rosso).



Sempre per il medesimo teorema la convergenza è uniforme sugli intervalli chiusi su cui f è continua, dunque su tutti gli intervalli del tipo $[\delta, 2\pi - \delta]$, con $0 < \delta < \pi$, e per periodicità anche su $[\delta + 2\pi k, 2\pi - \delta + 2\pi k]$ al variare di $k \in \mathbb{Z}$.

3b La prima somma richiesta si può scrivere nella forma

$$S_1 = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}\cos\big(\frac{n\pi}{2}\big).$$

Dalla relazione (1) segue che

$$2\pi = \frac{5}{4}\pi + \frac{4}{\pi}\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} + S_1\right),$$

e ricordando il valore della somma $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n^2 = \pi^2/6$ si ottiene

$$S_1 = \frac{\pi}{4}\left(2\pi - \frac{5}{4}\pi\right) - \frac{\pi^2}{6} = \frac{\pi^2}{48}.$$

Per quanto riguarda la seconda somma S_2 vale

$$S_1 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(2n)^2} = \frac{1}{2^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^2} = \frac{S_2}{4},$$

da cui $S_2 = 4S_1 = \pi^2/12$.