Università degli Studi di Udine Anno Accademico 2015/2016

Facoltà di Scienze Matematiche, Fisiche e Naturali
Corso di Laurea in Matematica

Programma del Corso di Equazioni Differenziali
Docente: Paolo Baiti

Definizioni di base e alcuni richiami. Definizione di equazione/sistema di equazioni differenziali ordinarie (EDO); soluzione di un'equazione/sistema, traiettoria e orbita di una soluzione. Equazioni e sistemi in forma normale. Sistemi autonomi. Riduzione di un'equazione in forma normale di ordine n a un sistema di n equazioni di ordine 1. Regolarità delle soluzioni in funzione della regolarità del campo vettoriale. Il problema di Cauchy. Richiami sul Teorema di Cauchy-Lipschitz di esistenza e unicità locale in ipotesi di Lipschitz. La lipschitzianità locale implica la lipschitzianità sui compatti.

Il Teorema di esistenza locale di Peano. Insiemi compatti e relativamente compatti in $C(E, R)$; insiemi equicontinui ed equiuniformemente continui. Il Teorema di Ascoli-Arzelà (senza dimostrazione). Introduzione al metodo delle poligonali di Eulero. Il Teorema di Peano: dimostrazione dell'esistenza di una soluzione tramite approssimazione con le poligonali di Eulero. Cenni di altre dimostrazioni. I teoremi di punto fisso di Brouwer e di Schauder (solo enunciati). Il Teorema di Peano sui compatti.

Analisi qualitativa delle soluzioni. Unicità e prolungabilità. Dipendenza dai dati iniziali. Integrali primi. Questioni legate all'unicità delle soluzioni: l'unicità locale implica l'unicità globale (richiami). Conseguenze dell'unicità sulle traiettorie e sulle orbite delle soluzioni. Il fenomeno di Peano, integrale superiore e inferiore (cenni). Il Teorema di Kneser (solo enunciato). Prolungabilità delle soluzioni, soluzioni massimali e intervallo massimale d'esistenza; l'intervallo massimale d'esistenza è aperto (richiami). Teorema di esistenza delle soluzioni massimali nel caso in cui il campo vettoriale è localmente lipschitziano (richiami) oppure continuo. Il grafico di una soluzione massimale è chiuso nella topologia indotta; fuga dai compatti (richiami). Esplosione delle soluzioni in tempo finito. Alcune conseguenze del Teorema della fuga dai compatti: compattezza e limitatezza implicano l'esistenza in grande. Il metodo delle funzioni ausiliarie; la sublinearità implica l'esistenza in grande delle soluzioni; la lipschitzianità globale implica l'esistenza in grande delle soluzioni. I sistemi lineari a coefficienti continui hanno esistenza e unicità in grande delle soluzioni. Esistenza e unicità per equazioni scalari di ordine n. Il Lemma di Gronwall. Alcuni teoremi sulla dipendenza continua dai dati iniziali e dal campo vettoriale (con dimostrazione). Il Teorema di Kamke. Differenziabilità rispetto al dato iniziale (cenni). Il Teorema del confronto (due versioni). Il criterio dell'asintoto e alcune sue conseguenze. Applicazione degli strumenti introdotti allo studio qualitativo delle soluzioni di un sistema di equazioni differenziali. Un modello di Lotka-Volterra per la competizione tra due specie: caso dell'estinzione. Sistemi autonomi e integrali primi. Sistemi conservativi. Sistemi fisici conservativi; caso dell'energia. La ricerca di integrali primi: il metodo della 1-forme; fattori integranti. Il pendolo non lineare: analisi qualitativa delle soluzioni. Analisi del modello nonlineare preda-predatore di Lotka-Volterra. Cenni alla stabilità/instabilità e alla stabilità /instabilità lineare degli equilibri.

Alcune classi di equazioni risolubili analiticamente. Equazioni a variabili separabili. Formula risolutiva per le equazioni lineari del primo ordine a coefficienti continui. L'equazione di Bernoulli. L'equazione di Malthus e l'equazione logistica di Verhulst. Equazioni omogenee e loro varianti. Equazioni del secondo ordine della forma $y'' = f(y, y')$ oppure $y'' = f(t, y')$. Applicazione al problemi della fune inestensibile (catenaria). Equazioni non in forma normale del tipo $y = g(y')$ oppure $t = g(y')$.

Sistemi ed equazioni lineari. Sistemi lineari. Sistema omogeneo associato. La soluzione generale di un sistema lineare è somma della generica soluzione del sistema omogeneo e di una qualsiasi soluzione fissata del sistema. L'insieme delle soluzioni di un sistema omogeneo è uno spazio vettoriale di dimensione n. Matrice soluzione e matrice fondamentale (risolvente). Teorema di Lagrange e formula della variazione delle costanti. Sistemi lineari a coefficienti costanti. Esponenziale di una matrice: definizione e proprietà. Soluzione del problema di Cauchy associato a un sistema lineare omogeneo a coefficienti costanti. Calcolo esplicito dell'esponenziale di una matrice in alcuni casi particolari: matrice multipla dell'identità, matrice di rotazione 2×2, matrice diagonalizzabile reale, matrice somma di una matrice diagonalizzabile e di una nilpotente che commutano. Decomposizione di una matrice nella somma di una matrice diagonalizzabile e di una nilpotente (senza dim) con applicazioni al calcolo della matrice esponenziale. Forma canonica di Jordan (senza dim) con applicazione ai sistemi lineari di equazioni differenziali: caso delle matrici 2×2 e 3×3. Applicazione della teoria svolta alle equazioni differenziali ordinarie di ordine n a coefficienti costanti.

Il metodo di separazione delle variabili per equazioni differenziali alle derivate parziali. Richiami sulle serie di Fourier trigonometriche: sviluppo in serie di seni e in serie di coseni, teoremi di convergenza uniforme e puntuale. Applicazione del metodo a vari problemi relativi all'equazione del calore, all'equazione delle onde e all'equazione di Laplace. Il metodo di Fourier.

Il metodo delle caratteristiche. L'equazione del trasporto lineare, semilineare e quasilineare, omogeneo e non omogeneo. Il metodo delle caratteristiche (cenni). Esempi.