



Dipartimento di Scienze Matematiche, Informatiche e Fisiche
Corso di Laurea in Matematica

EQUAZIONI DIFFERENZIALI

Appello Straordinario del 13 febbraio 2017

N.B.: scrivere nome, cognome e numero di matricola su ogni foglio consegnato. È ammesso l'utilizzo degli appunti del corso. Tempo a disposizione: 3 ore

1 Data l'equazione differenziale del secondo ordine

$$x'' - (x')^2 + x^2 - x = 0, \quad (1)$$

- riscriverla sotto forma di un sistema 2×2 del primo ordine nelle incognite (x, y) , dove $y = x'$. Per quest'ultimo, studiare l'esistenza e l'unicità locale per i relativi problemi di Cauchy. Valgono le ipotesi dei teoremi di esistenza globale? Disegnare l'andamento del campo vettoriale; utilizzarlo per individuare qualitativamente le possibili orbite;
- trovare gli equilibri del sistema e studiare la loro stabilità lineare ed eventualmente non lineare;
- detta $\omega(x, y)$ la 1-forma differenziale associata al sistema, trovare un fattore integrante λ e utilizzarlo per calcolare una primitiva F di $\lambda\omega$;
- utilizzare F per studiare l'orbita delle soluzioni del sistema. In particolare, dire se esistono orbite periodiche, orbite omocline oppure orbite eterocline;
- studiare l'esistenza globale in futuro e passato della generica soluzione. In particolare, verificare che tra le soluzioni non limitate alcune sono globalmente definite in futuro e passato, mentre altre non lo sono.

2 Risolvere il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y_1' = 4y_1 + 9y_3 + 2 \\ y_2' = 6y_1 - 2y_2 + 9y_3 - 6 \\ y_3' = -y_1 - 2y_3 \\ y(0) = (y_1(0), y_2(0), y_3(0)) = (3, 1, -2). \end{cases}$$

3 Scrivere un'equazione differenziale i cui problemi di Cauchy con dati $y(0) = y_0$ abbiano unicità in futuro e in passato per la soluzione se $|y_0| < 1$, abbiano unicità in futuro ma non in passato per qualche $y_0 \geq 1$, infine abbiano unicità in passato ma non in futuro per qualche $y_0 \leq -1$.

Punteggi indicativi: 4+2+5+6+4, 10, 5