



Dipartimento di Scienze Matematiche, Informatiche e Fisiche
Corso di Laurea in Matematica

EQUAZIONI DIFFERENZIALI

Appello del 6 settembre 2016

N.B.: scrivere nome, cognome e numero di matricola su ogni foglio consegnato. È ammesso l'utilizzo degli appunti del corso. Tempo a disposizione: 3 ore

1 Data l'equazione differenziale del secondo ordine

$$x'' + x^2(x')^2 + x(1 + x^3) = 0, \quad (1)$$

- trasformarla in un sistema 2×2 del primo ordine nelle incognite (x, y) , dove $y = x'$. Per quest'ultimo, studiare l'esistenza e l'unicità locale per i relativi problemi di Cauchy. Valgono le ipotesi dei teoremi di esistenza globale? Disegnare l'andamento del campo vettoriale; utilizzarlo per individuare qualitativamente le possibili orbite;
- trovare gli equilibri del sistema e studiare la loro stabilità lineare ed eventualmente non lineare;
- detta $\omega(x, y)$ la 1-forma differenziale associata al sistema, trovare un fattore integrante λ e utilizzarlo per trovare una primitiva F di $\lambda\omega$;
- utilizzare F per studiare l'orbita delle soluzioni del sistema. In particolare, dire se esistono orbite periodiche, orbite omocline oppure orbite eterocline;
- dimostrare che tutte le soluzioni del sistema (o dell'equazione (1)) non limitate in futuro, risp. in passato, non sono globalmente definite in futuro, risp. in passato. Esistono soluzioni globalmente definite in futuro ma non in passato, o viceversa? E orbite limitate e non periodiche?

2 Data la matrice

$$A := \begin{pmatrix} -2 & -2 & 0 \\ -4 & 2 & 8 \\ 0 & -2 & -2 \end{pmatrix}$$

- calcolare la matrice fondamentale e^{tA} ;
- dimostrare che tutte le soluzioni dell'equazione $y' = Ay$ sono globalmente limitate in futuro. Cosa si può dire in passato?

Considerata ora l'equazione non omogenea $y' = Ay + b(t)$, dove $b : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ è una funzione continua e limitata, dimostrare che

- se b è costante tutte le soluzioni sono globalmente limitate in futuro; tuttavia
- esistono funzioni b non costanti e limitate per le quali le soluzioni non sono globalmente limitate in futuro. Fornirne un esempio.