



Dipartimento di Scienze Matematiche, Informatiche e Fisiche
Corso di Laurea in Matematica

EQUAZIONI DIFFERENZIALI

Appello del 26 luglio 2016

N.B.: scrivere nome, cognome e numero di matricola su ogni foglio consegnato. È ammesso l'utilizzo degli appunti del corso. Tempo a disposizione: 3 ore

1 Data l'equazione

$$y' = f(t, y) = \begin{cases} \frac{4t^3 y}{t^4 + y^2} & \text{se } (t, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{se } (t, y) = (0, 0), \end{cases} \quad (1)$$

- studiare l'esistenza locale per i relativi problemi di Cauchy. Supposto che $y(t)$ sia soluzione, dire quali tra $y(-t)$, $-y(t)$ e $-y(-t)$ sono ancora soluzioni;
- studiare l'unicità e individuare i problemi di Cauchy per cui non è possibile applicare il Teorema di Cauchy-Lipschitz; in particolare, dimostrare che non è possibile farlo per $(t_0, y_0) = (0, 0)$;
- applicando un opportuno teorema di esistenza globale, verificare che ogni soluzione massimale $y(t)$ è globalmente definita e individuare l'intervallo massimale di esistenza;
- studiare, con metodi qualitativi, l'esistenza e l'eventuale valore del limite $\lim_{t \rightarrow +\infty} y(t)$;
- si testino le funzioni $v_a(t) = at^2$, $a > 0$, come sotto/soprasoluzioni per $t \geq 0$ e le si utilizzino per:
 - dimostrare che il problema di Cauchy con dati iniziali $y(0) = 0$ non ha unicITÀ di soluzioni;
 - determinare il relativo pennello di Peano $\mathcal{P}$ in futuro e passato;
- calcolare esplicitamente tutte le soluzioni dell'equazione e utilizzarle per individuare il pennello di Peano $\mathcal{P}$; verificare che coincide con quello trovato in e);
- verificare che la trasformazione delle variabili dipendenti/indipendenti $(t, y) \mapsto (s, z) = (\ln |y|, t^4)$, trasforma l'equazione (1) per $y = y(t)$ in un'equazione lineare a coefficienti costanti e termine non-omogeneo continuo per l'incognita $z = z(s)$. Quest'ultima equazione ha unicITÀ di tutte le soluzioni: come si concilia con b)? Risolvere la nuova equazione e ritrovare le soluzioni di (1);
- trovare almeno altri due metodi (quattro in totale) per risolvere l'equazione (1).

2 Risolvere

$$\begin{cases} y'_1 = -5y_1 + 4y_2 + 8y_3 + 1 \\ y'_2 = y_1 - y_2 - 1 \\ y'_3 = -5y_1 + 4y_2 + 7y_3 + 1 \\ y(0) = (y_1(0), y_2(0), y_3(0)) = (-3, -3, 0). \end{cases}$$

3 Dimostrare che il sistema

$$\begin{cases} x' = -y \\ y' = x \end{cases}$$

è invariante per rotazioni, ovvero che ogni mappa $(x, y)^t \mapsto (z, w)^t := Q \cdot (x, y)^t$, con Q matrice di rotazione, trasforma il sistema in se stesso, cioè se (x, y) è soluzione, allora (z, w) soddisfa ancora

$$\begin{cases} z' = -w \\ w' = z. \end{cases}$$

Utilizzare questo fatto per ottenere le ben note formule di addizione $\cos(t+\tau) = \cos t \cos \tau - \sin t \sin \tau$, $\sin(t+\tau) = \sin t \cos \tau + \sin \tau \cos t$ per ogni $t, \tau \in \mathbb{R}$ (suggerimento: sfruttare opportunamente l'unicità e l'invarianza per traslazioni temporali delle soluzioni).