Dipartimento di Scienze Matematiche, Informatiche e Fisiche
Corso di Laurea in Matematica

Equazioni Differenziali

Appello del 21 giugno 2016

N.B.: scrivere nome, cognome e numero di matricola su ogni foglio consegnato. È ammesso l'utilizzo degli appunti del corso. Tempo a disposizione: 3 ore

1 Data l'equazione differenziale

$$y' = (t^2y^2 - y + 1)/t, \tag{1}$$

a) studiare l'esistenza e unicità locale per i relativi problemi di Cauchy. Valgono le ipotesi dei teoremi di esistenza globale? Trovare eventuali simmetrie banali per l'insieme delle soluzioni;

b) determinare le eventuali soluzioni costanti, le regioni dove le soluzioni sono crescenti/decrescenti e rappresentarle nel piano $t - y$;

c) detta $y :]\alpha, \beta[\to \mathbb{R}$ la generica soluzione massimale limitatamente al sottodominio $\Omega^+ =]0, +\infty[\times \mathbb{R}$, dimostrare che $y(t)$ è definitivamente positiva e crescente. Studiare l'eventuale valore del limite delle soluzioni globalmente definite in futuro. Dimostrare che non esistono soluzioni globalmente definite in futuro. Qual è il comportamento delle soluzioni per $t \to \beta^-$?

d) Dimostrare che tutte le soluzioni definitivamente decrescenti in un intorno di α sono globalmente definite in passato. In tutti i casi, studiare l'esistenza e l'eventuale valore del $\lim_{t\to\alpha^+} y(t)$.

2 L'*equazione di Riccati*

$$y' = a(t)y^2 + b(t)y + c(t), \tag{2}$$

con a, b, c funzioni continue, in generale non è esplicitamente integrabile. Tuttavia, se si conosce una soluzione particolare $\overline{y}(t)$ allora è possibile trovare quella generale in termini di opportuni integrali delle funzioni $a, b, c, \overline{y}$. Più precisamente,

a) posto $z(t) = y(t) - \overline{y}(t)$, verificare che $z(t)$ è soluzione di un'equazione di Bernoulli della forma $z' = g(t)z + h(t)z^2$. Trovare esplicitamente la forma di g, h in funzione di $a, b, c, \overline{y}$;

b) se $a(t) \in C^1$, per risolvere (2) si può usare in alternativa la variabile $w(t) = \exp(-\int a(t)y(t)\,dt)$. Verificare che se $y(t)$ è soluzione di (2) allora $w(t)$ è soluzione di un'equazione lineare di ordine 2.

c) utilizzare a) per trovare la soluzione generale dell'equazione (1) in Ω^+, dopo aver verificato che $\overline{y}(t) = (\operatorname{tg} t)/t$ è effettivamente una soluzione;

d) utilizzare b) per trovare la soluzione generale dell'equazione (1) in Ω^+ e verificare che coincide con quella calcolata in c).

3 Dato il sistema planare

$$\begin{cases} t' = t \\ y' = t^2y^2 - y + 1, \end{cases} \qquad (\cdot)' = \frac{d}{ds} \tag{3}$$

a) studiare l'esistenza locale/globale e l'unicità per i problemi di Cauchy. Verificare che l'asse y è un insieme invariante e calcolare esplicitamente tutte le soluzioni con orbite ivi contenute;

b) trovare l'unico equilibrio E del sistema. Studiare la stabilità lineare e non lineare di E. Determinare la varietà stabile di E; è possibile "indovinare" l'equazione della varietà instabile?

c) Detta $\omega(t, y)$ la 1-forma differenziale associata al sistema, dopo avere verificato che ω non è esatta e che non ammette fattori integranti della forma $\lambda(t)$ oppure $\lambda(y)$, calcolare un fattore integrante del tipo $\lambda(t, y) = \mu(ty)$ e utilizzarlo per ottenere una primitiva di $\lambda\omega$;

d) sfruttare un'opportuna relazione tra le soluzioni di (1) e di (3) per trovare la soluzione generale di (1); verificare che coincide con quella in 2-c). Discutere la validità di tale relazione.

Punteggi indicativi: 2+3+7+5, 3+5+6+3, 2+3+7+2