



Dipartimento di Matematica e Informatica
Corso di Laurea in Matematica

EQUAZIONI DIFFERENZIALI

Appello del 8 febbraio 2016

N.B.: scrivere nome, cognome e numero di matricola su ogni foglio consegnato. È ammesso l'utilizzo degli appunti del corso. Tempo a disposizione: 3 ore

1 La classe di sistemi planari di equazioni differenziali

$$\begin{cases} x' = ax - px^2 - \frac{bxy}{1+kx} \\ y' = -dy + \frac{cxy}{1+kx}, \end{cases}$$

con $a, b, c, d > 0$, $p, k \geq 0$ parametri reali, introduce delle possibili varianti per il sistema preda-predatore di Lotka-Volterra (riottenuto per $p = k = 0$); x rappresentano le prede, y i predatori. Si consideri la sottoclasse ottenuta per $a = p = k = 2$, $d = 1$, con $c = b > 0$ unico parametro.

- Studiare l'esistenza e l'unicità locale per i relativi problemi di Cauchy. Valgono le ipotesi dei teoremi di esistenza globale?
- Verificare che gli assi coordinati sono insiemi invarianti e calcolare esplicitamente tutte le soluzioni con orbite ivi contenute;
- calcolare gli equilibri. Determinare per quali c il sistema ammette un equilibrio $E_c = (x_c, y_c)$ interno al primo quadrante. Per tali valori di c rappresentare indicativamente la direzione del campo vettoriale nel dominio "fisico" $\mathcal{D} := \{(x, y) : x, y \geq 0\}$ e, partendo da ciò, dimostrare che a priori in $\mathcal{D}$ non possono esistere soluzioni che esplodono in tempo finito in futuro;
- verificare che per $c \geq 4$ gli autovalori del linearizzato in E_c sono complessi; per tali c studiare la stabilità lineare e, se possibile, nonlineare di tale equilibrio;
- trovare $\bar{q}$ tale che per $q \geq \bar{q}$ l'insieme $\mathcal{T}_q := \{(x, y) : x, y \geq 0, x + y \leq q\}$ è positivamente invariante. Studiare l'esistenza globale in futuro di tutte le soluzioni massimali;
- preso il dato iniziale $(x(0), y(0)) = (x_c, \bar{q} - x_c)$ dimostrare che esiste una successione crescente di tempi τ_n per cui la relativa soluzione soddisfa $x(\tau_n) = x_c$ e $y_c < y(\tau_n) < y(\tau_{n-1}) < \bar{q} - x_c$;
- nei casi $c = 4$, $c = 8$, provare a indovinare il comportamento della soluzione in f) per $t \rightarrow \beta^-$.

2 Risolvere il problema

$$\begin{cases} y_1' = -y_1 + 2y_2 + 4y_3 + 2e^t \\ y_2' = -4y_1 + 5y_2 + 4y_3 \\ y_3' = 2y_1 - 3y_2 - 3y_3 - e^t \\ y(0) = (y_1(0), y_2(0), y_3(0)) = (-1, 2, -1). \end{cases}$$

3 Data $f : \Omega \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ di classe $C^1(\Omega)$ sia $y(t; t_0, y_0)$ la soluzione del problema di Cauchy

$$(*) \quad \begin{cases} y' = f(t, y) \\ y(t_0) = y_0. \end{cases}$$

Supponendo di aver dimostrato che le mappe $w : t_0 \mapsto y(t; t_0, y_0)$ e $z : t \mapsto \frac{\partial y}{\partial t_0}(t; t_0, y_0)$ sono differenziabili, caratterizzare $z(t)$ come soluzione di un opportuno problema di Cauchy. (Suggerimento: utilizzare la formulazione integrale per le soluzioni di (*).)