Università degli Studi di Udine | Anno Accademico 2015/2016

Dipartimento di Scienze Matematiche, Informatiche e Fisiche
Corso di Laurea in Matematica

# Equazioni Differenziali

Appello del 26 gennaio 2016

N.B.: scrivere nome, cognome e numero di matricola su ogni foglio consegnato. È ammesso l'utilizzo degli appunti del corso. Tempo a disposizione: 3 ore

**1** Data l'equazione differenziale

$$y' = \begin{cases} \sqrt[3]{y}\big(\sqrt[3]{y^2} - t^2\big)\ln(ty^2) & \text{se } y \neq 0 \\ 0 & \text{se } y = 0, \end{cases}$$

a) studiare l'esistenza locale per i relativi problemi di Cauchy. Discutere l'unicità delle soluzioni dei problemi di Cauchy, in particolare dire per quali dati iniziali è possibile applicare il Teorema di Cauchy-Lipschitz. Valgono le ipotesi dei teoremi di esistenza globale?

b) Trovare le eventuali soluzioni costanti, le regioni dove le soluzioni sono crescenti/decrescenti e rappresentarle nel piano $t - y$;

c) detta $y : ]\alpha, \beta[ \to \mathbb{R}$ la generica soluzione massimale, discutere l'esistenza globale in futuro di $y(t)$ e studiarne il comportamento in un intorno di $\beta$, calcolando eventualmente il $\lim_{t\to\beta^-} y(t)$;

d) discutere l'esistenza globale in passato di $y(t)$ e studiare il $\lim_{t\to\alpha^+} y(t)$. Si può escludere a priori che tale limite sia infinito? E finito? Verificare analiticamente le proprie affermazioni;

e) dimostrare che $u(t) = (t^2 - a^2)^{3/2}$ verifica $u'(t) < f(t, u(t))$ in un intorno destro di $a$. Utilizzarla per provare che esistono problemi di Cauchy senza unicità delle soluzioni massimali. Quali?

f) Dimostrare che esistono soluzioni che in futuro tendono all'infinito.

**2** Data l'equazione differenziale lineare

$$a(t)y'' + b(t)y' + c(t)y = 0,$$

con $a(t) \neq 0$, si assuma di conoscerne una soluzione $y_1(t)$ non nulla.

a) Verificare che è possibile trovare un'altra soluzione della forma $y_2(t) = z(t)y_1(t)$, dove $z$ è un'opportuna funzione non nulla e non costante. Più precisamente si trovi l'equazione differenziale che deve essere soddisfatta da $z$; si calcoli infine una formula (integrale) esplicita per $z$ in dipendenza da $a, b, c$ e $y_1$;

b) provare che $y_1$ e $y_2$ sono linearmente indipendenti; trovare la soluzione generale del problema

$$\begin{cases} 4t^2y'' + 4t^3y' + (2t^2 - 3)y = 0 \\ y(1) = 0,\ y'(1) = 1, \end{cases} \qquad t > 0,$$

dopo aver verificato che $y_1(t) = 1/\sqrt{t}$ è effettivamente una soluzione dell'equazione.

**3** Utilizzando esclusivamente i risultati sull'esistenza e unicità per le soluzioni delle equazioni differenziali e le proprietà di $\operatorname{sen} x$ e $\cos x$ legate alle derivate, dimostrare la formula di addizione:

$$\cos(x + y) = \cos x \cos y - \operatorname{sen} x \operatorname{sen} y, \quad \text{per ogni } x, y \in \mathbb{R}.$$

*Punteggi indicativi: 5+2+5+6+4+4, 7+5, 6*

## Appello del 8 febbraio 2016

**1** La classe di sistemi planari di equazioni differenziali

$$\begin{cases} x' = ax - px^2 - \dfrac{bxy}{1+kx} \\ y' = -dy + \dfrac{cxy}{1+kx}, \end{cases}$$

con $a, b, c, d > 0$, $p, k \geq 0$ parametri reali, introduce delle possibili varianti per il sistema preda-predatore di Lotka-Volterra (riottenuto per $p = k = 0$); $x$ rappresentano le prede, $y$ i predatori. Si consideri la sottoclasse ottenuta per $a = p = k = 2$, $d = 1$, con $c = b > 0$ unico parametro.

a) Studiare l'esistenza e l'unicità locale per i relativi problemi di Cauchy. Valgono le ipotesi dei teoremi di esistenza globale?

b) Verificare che gli assi coordinati sono insiemi invarianti e calcolare esplicitamente tutte le soluzioni con orbite ivi contenute;

c) calcolare gli equilibri. Determinare per quali $c$ il sistema ammette un equilibrio $E_c = (x_c, y_c)$ interno al primo quadrante. Per tali valori di $c$ rappresentare indicativamente la direzione del campo vettoriale nel dominio "fisico" $\mathcal{D} := \{(x, y) : \ x, y \geq 0\}$ e, partendo da ciò, dimostrare che a priori in $\mathcal{D}$ non possono esistere soluzioni che esplodono in tempo finito in futuro;

d) verificare che per $c \geq 4$ gli autovalori del linearizzato in $E_c$ sono complessi; per tali $c$ studiare la stabilità lineare e, se possibile, nonlineare di tale equilibrio;

e) trovare $\bar{q}$ tale che per $q \geq \bar{q}$ l'insieme $\mathcal{T}_q := \{(x, y) : x, y \geq 0, \ x+y \leq q\}$ è positivamente invariante. Studiare l'esistenza globale in futuro di tutte le soluzioni massimali;

f) preso il dato iniziale $(x(0), y(0)) = (x_c, \bar{q} - x_c)$ dimostrare che esiste una successione crescente di tempi $\tau_n$ per cui la relativa soluzione soddisfa $x(\tau_n) = x_c$ e $y_c < y(\tau_n) < y(\tau_{n-1}) < \bar{q} - x_c$;

g) nei casi $c = 4$, $c = 8$, provare a indovinare il comportamento della soluzione in f) per $t \to \beta^-$.

**2** Risolvere il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y_1' = -y_1 + 2y_2 + 4y_3 + 2\mathrm{e}^t \\ y_2' = -4y_1 + 5y_2 + 4y_3 \\ y_3' = 2y_1 - 3y_2 - 3y_3 - \mathrm{e}^t \\ y(0) = (y_1(0), y_2(0), y_3(0)) = (-1, 2, -1). \end{cases}$$

**3** Data $f : \Omega \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ di classe $C^1(\Omega)$ sia $y(t; t_0, y_0)$ la soluzione del problema di Cauchy

$$(*) \qquad \begin{cases} y' = f(t, y) \\ y(t_0) = y_0. \end{cases}$$

Supponendo di aver dimostrato che le mappe $w : t_0 \mapsto y(t; t_0, y_0)$ e $z : t \mapsto \frac{\partial y}{\partial t_0}(t; t_0, y_0)$ sono differenziabili, caratterizzare $z(t)$ come soluzione di un opportuno problema di Cauchy (Suggerimento: utilizzare la formulazione integrale per le soluzioni di (*).)

*Punteggi indicativi: 2+3+7+4+4+3+2, 10, 5*

---

## Appello del 21 giugno 2016

**1** Data l'equazione differenziale

$$y' = (t^2y^2 - y + 1)/t, \tag{1}$$

a) studiare l'esistenza e unicità locale per i relativi problemi di Cauchy. Valgono le ipotesi dei teoremi di esistenza globale? Trovare eventuali simmetrie banali per l'insieme delle soluzioni;

b) determinare le eventuali soluzioni costanti, le regioni dove le soluzioni sono crescenti/decrescenti e rappresentarle nel piano $t - y$;

c) detta $y : ]\alpha, \beta[ \to \mathbb{R}$ la generica soluzione massimale limitatamente al sottodominio $\Omega^+ = ]0, +\infty[ \times \mathbb{R}$, dimostrare che $y(t)$ è definitivamente positiva e crescente. Studiare l'eventuale valore del limite delle soluzioni globalmente definite in futuro. Dimostrare che non esistono soluzioni globalmente definite in futuro. Qual è il comportamento delle soluzioni per $t \to \beta^-$?

d) Dimostrare che tutte le soluzioni definitivamente decrescenti in un intorno di $\alpha$ sono globalmente definite in passato. In tutti i casi, studiare l'esistenza e l'eventuale valore del $\lim_{t\to\alpha^+} y(t)$.

**2** L'*equazione di Riccati*

$$y' = a(t)y^2 + b(t)y + c(t), \tag{2}$$

con $a, b, c$ funzioni continue, in generale non è esplicitamente integrabile. Tuttavia, se si conosce una soluzione particolare $\overline{y}(t)$ allora è possibile trovare quella generale in termini di opportuni integrali delle funzioni $a, b, c, \overline{y}$. Più precisamente,

a) posto $z(t) = y(t) - \overline{y}(t)$, verificare che $z(t)$ è soluzione di un'equazione di Bernoulli della forma $z' = g(t)z + h(t)z^2$. Trovare esplicitamente la forma di $g, h$ in funzione di $a, b, c, \overline{y}$;

b) se $a(t) \in C^1$, per risolvere (2) si può usare in alternativa la variabile $w(t) = \exp(-\int a(t)y(t)\,dt)$. Verificare che se $y(t)$ è soluzione di (2) allora $w(t)$ è soluzione di un'equazione lineare di ordine 2.

c) utilizzare a) per trovare la soluzione generale dell'equazione (1) in $\Omega^+$, dopo aver verificato che $\overline{y}(t) = (\operatorname{tg} t)/t$ è effettivamente una soluzione;

d) utilizzare b) per trovare la soluzione generale dell'equazione (1) in $\Omega^+$ e verificare che coincide con quella calcolata in c).

**3** Dato il sistema planare

$$\begin{cases} t' = t \\ y' = t^2y^2 - y + 1, \end{cases} \qquad (\cdot)' = \frac{d}{ds} \tag{3}$$

a) studiare l'esistenza locale/globale e l'unicità per i problemi di Cauchy. Verificare che l'asse $y$ è un insieme invariante e calcolare esplicitamente tutte le soluzioni con orbite ivi contenute;

b) trovare l'unico equilibrio $E$ del sistema. Studiare la stabilità lineare e non lineare di $E$. Determinare la varietà stabile di $E$; è possibile "indovinare" l'equazione della varietà instabile?

c) Detta $\omega(t, y)$ la 1-forma differenziale associata al sistema, dopo avere verificato che $\omega$ non è esatta e che non ammette fattori integranti della forma $\lambda(t)$ oppure $\lambda(y)$, calcolare un fattore integrante del tipo $\lambda(t, y) = \mu(ty)$ e utilizzarlo per ottenere una primitiva di $\lambda\omega$;

d) sfruttare un'opportuna relazione tra le soluzioni di (1) e di (3) per trovare la soluzione generale di (1); verificare che coincide con quella in 2-c). Discutere la validità di tale relazione.

*Punteggi indicativi: 2+3+7+5, 3+5+6+3, 2+3+7+2*

---

## Appello del 26 luglio 2016

**1** Data l'equazione

$$y' = f(t, y) = \begin{cases} \dfrac{4t^3y}{t^4 + y^2} & \text{se } (t, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{se } (t, y) = (0, 0), \end{cases} \tag{4}$$

a) studiare l'esistenza locale per i relativi problemi di Cauchy. Supposto che $y(t)$ sia soluzione, dire quali tra $y(-t)$, $-y(t)$ e $-y(-t)$ sono ancora soluzioni;

b) studiare l'unicità e individuare i problemi di Cauchy per cui non è possibile applicare il Teorema di Cauchy-Lipschitz; in particolare, dimostrare che non è possibile farlo per $(t_0, y_0) = (0, 0)$;

c) applicando un opportuno teorema di esistenza globale, verificare che ogni soluzione massimale $y(t)$ è globalmente definita e individuare l'intervallo massimale di esistenza;

d) studiare, con metodi qualitativi, l'esistenza e l'eventuale valore del limite $\lim_{t\to+\infty} y(t)$;

e) si testino le funzioni $v_a(t) = at^2$, $a > 0$, come sotto/soprasoluzioni per $t \geq 0$ e le si utilizzino per: i) dimostrare che il problema di Cauchy con dati iniziali $y(0) = 0$ non ha unicità di soluzioni; ii) determinare il relativo pennello di Peano $\mathcal{P}$ in futuro e passato;

f) calcolare esplicitamente tutte le soluzioni dell'equazione e utilizzarle per individuare il pennello di Peano $\mathcal{P}$; verificare che coincide con quello trovato in e);

g) verificare che la trasformazione delle variabili dipendenti/indipendenti $(t, y) \mapsto (s, z) = (\ln |y|, t^4)$, trasforma l'equazione (4) per $y = y(t)$ in un'equazione lineare a coefficienti costanti e termine non-omogeneo continuo per l'incognita $z = z(s)$. Quest'ultima equazione ha unicità di tutte le soluzioni: come si concilia con b)? Risolvere la nuova equazione e ritrovare le soluzioni di (4);

h) trovare almeno altri due metodi (quattro in totale) per risolvere l'equazione (4).

**2** Risolvere

$$\begin{cases} y_1' = -5y_1 + 4y_2 + 8y_3 + 1 \\ y_2' = y_1 - y_2 - 1 \\ y_3' = -5y_1 + 4y_2 + 7y_3 + 1 \\ y(0) = (y_1(0), y_2(0), y_3(0)) = (-3, -3, 0). \end{cases}$$

**3** Dimostrare che il sistema

$$\begin{cases} x' = -y \\ y' = x \end{cases}$$

è invariante per rotazioni, ovvero che ogni mappa $(x, y)^t \mapsto (z, w)^t := Q \cdot (x, y)^t$, con $Q$ matrice di rotazione, trasforma il sistema in se stesso, cioè se $(x, y)$ è soluzione, allora $(z, w)$ soddisfa ancora

$$\begin{cases} z' = -w \\ w' = z. \end{cases}$$

Utilizzare questo fatto per ottenere le ben note formule di addizione $\cos(t+\tau) = \cos t \cos \tau - \operatorname{sen} t \operatorname{sen} \tau$, $\operatorname{sen}(t+\tau) = \operatorname{sen} t \cos \tau + \operatorname{sen} \tau \cos t$ per ogni $t, \tau \in \mathbb{R}$ (suggerimento: sfruttare opportunamente l'unicità e l'invarianza per traslazioni temporali delle soluzioni).

*Punteggi indicativi: 4+2+2+4+6+5+5+10, 10, 6*

---

## Appello del 6 settembre 2016

**1** Data l'equazione differenziale del secondo ordine

$$x'' + x^2(x')^2 + x(1 + x^3) = 0, \tag{5}$$

a) trasformarla in un sistema $2 \times 2$ del primo ordine nelle incognite $(x, y)$, dove $y = x'$. Per quest'ultimo, studiare l'esistenza e l'unicità locale per i relativi problemi di Cauchy. Valgono le ipotesi dei teoremi di esistenza globale? Disegnare l'andamento del campo vettoriale; utilizzarlo per individuare qualitativamente le possibili orbite;

b) trovare gli equilibri del sistema e studiare la loro stabilità lineare ed eventualmente non lineare;

c) detta $\omega(x, y)$ la 1-forma differenziale associata al sistema, trovare un fattore integrante $\lambda$ e utilizzarlo per calcolare una primitiva $F$ di $\lambda\omega$;

d) utilizzare $F$ per studiare l'orbita delle soluzioni del sistema. In particolare, dire se esistono orbite periodiche, orbite omocline oppure orbite eterocline;

e) dimostrare che tutte le soluzioni del sistema (o dell'equazione (6)) non limitate in futuro, risp. in passato, non sono globalmente definite in futuro, risp. in passato. Esistono soluzioni globalmente definite in futuro ma non in passato, o viceversa? E orbite limitate e non periodiche?

**2** Data la matrice

$$A := \begin{pmatrix} -2 & -2 & 0 \\ -4 & 2 & 8 \\ 0 & -2 & -2 \end{pmatrix}$$

a) calcolare la matrice fondamentale $e^{tA}$;

b) dimostrare che tutte le soluzioni dell'equazione $y' = Ay$ sono globalmente limitate in futuro. Cosa si può dire in passato?

Considerata ora l'equazione non omogenea $y' = Ay + b(t)$, dove $b : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ è una funzione continua e limitata, dimostrare che

c) se $b$ è costante tutte le soluzioni sono globalmente limitate in futuro; tuttavia

d) esistono funzioni $b$ non costanti e limitate per le quali le soluzioni non sono globalmente limitate in futuro. Fornirne un esempio.

*Punteggi indicativi: 5+2+6+6+4, 7+2+2+8*

---

## Appello Straordinario del 13 febbraio 2017

**1** Data l'equazione differenziale del secondo ordine

$$x'' - (x')^2 + x^2 - x = 0, \tag{6}$$

a) riscriverla sotto forma di un sistema $2 \times 2$ del primo ordine nelle incognite $(x, y)$, dove $y = x'$. Per quest'ultimo, studiare l'esistenza e l'unicità locale per i relativi problemi di Cauchy. Valgono le ipotesi dei teoremi di esistenza globale? Disegnare l'andamento del campo vettoriale; utilizzarlo per individuare qualitativamente le possibili orbite;

b) trovare gli equilibri del sistema e studiare la loro stabilità lineare ed eventualmente non lineare;

c) detta $\omega(x, y)$ la 1-forma differenziale associata al sistema, trovare un fattore integrante $\lambda$ e utilizzarlo per calcolare una primitiva $F$ di $\lambda\omega$;

d) utilizzare $F$ per studiare l'orbita delle soluzioni del sistema. In particolare, dire se esistono orbite periodiche, orbite omocline oppure orbite eterocline;

e) studiare l'esistenza globale in futuro e passato della generica soluzione. In particolare, verificare che tra le soluzioni non limitate alcune sono globalmente definite in futuro e passato, mentre altre non lo sono.

**2** Risolvere il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y_1' = 4y_1 + 9y_3 + 2 \\ y_2' = 6y_1 - 2y_2 + 9y_3 - 6 \\ y_3' = -y_1 - 2y_3 \\ y(0) = (y_1(0), y_2(0), y_3(0)) = (3, 1, -2). \end{cases}$$

**3** Scrivere un'equazione differenziale i cui problemi di Cauchy con dati $y(0) = y_0$ abbiano unicità in futuro e in passato per la soluzione se $|y_0| < 1$, abbiano unicità in futuro ma non in passato per qualche $y_0 \geq 1$, infine abbiano unicità in passato ma non in futuro per qualche $y_0 \leq -1$.

*Punteggi indicativi: 4+2+5+6+4, 10, 5*

---