Università degli Studi di Udine — Anno Accademico 2015/2016

Corso di Laurea in Biotecnologie

Modulo di Matematica

Esame del 14/09/2016

N.B.: scrivere nome, cognome e numero di matricola su ogni foglio consegnato.
Tempo a disposizione: 2.5 ore

---

1 Se $\lim_{x\to x_0} f(x) = 0^+$ e $\lim_{x\to x_0} g(x) = -\infty$, allora $\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$ è

A $-\infty$

B $+\infty$

C 0

D non ci sono elementi sufficienti per rispondere

---

2 Se f è una funzione derivabile due volte in $]a, b[$ e tale che $f'(x_0) = 0$ e $f''(x_0) = \pi$ con $x_0 \in]a, b[$, allora

A x_0 è punto di minimo relativo ma non necessariamente assoluto per f in $]a, b[$

B x_0 è punto di massimo relativo ma non necessariamente assoluto per f in $]a, b[$

C x_0 è punto di minimo assoluto per f in $]a, b[$

D x_0 è punto di massimo assoluto per f in $]a, b[$

---

3 L'equazione differenziale $y'' = t^2 y + 3\sqrt{t}y'$ è

A un'equazione lineare del primo ordine

B un'equazione lineare del secondo ordine

C un'equazione non lineare del primo ordine

D un'equazione non lineare del secondo ordine

---

4 La funzione $f(x) = \sqrt[7]{x}$

A è definita e derivabile in $\mathbb{R}$

B è crescente e convessa in $]-\infty, 0[$

C è una funzione pari

D è definita e positiva in $\mathbb{R}$

---

5 Scrivere la definizione di asintoto di una funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ per $x \to +\infty$

$\boxed{\mathbf{6}}$ Rappresentare il grafico di una funzione g che verifichi contemporaneamente le seguenti proprietà:

$$\lim_{x\to-\infty} g(x) = 0, \qquad \lim_{x\to-2^-} g(x) = -\infty, \qquad \lim_{x\to-2^+} g(x) = 0, \qquad \lim_{x\to+\infty} g(x) = 1.$$

$\boxed{\mathbf{7}}$ a) Enunciare il Teorema di de L'Hôpital;

b) per ciascuno dei seguenti tre limiti

$$\lim_{x\to 0} \frac{3\operatorname{tg} x - \ln(\cos(3x))}{\sqrt{1+x} - \mathrm{e}^x}, \qquad \lim_{x\to+\infty} \frac{3^x + x^2}{\operatorname{sen}(x^4) + 5\operatorname{arctg} x}, \qquad \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}(\cos x) + x^3}{4\operatorname{tg}(x^2) - 3x\operatorname{sen} x},$$

determinare se è possibile applicare il teorema ed eventualmente calcolarne il valore.

$\boxed{\mathbf{8}}$ Data la funzione

$$g(x) = x^3\mathrm{e}^{-x}$$

a) determinare il dominio $\mathcal{D}$, il segno di g e calcolare i limiti agli estremi del dominio;

b) trovare gli eventuali asintoti;

c) determinare gli intervalli in cui la funzione è crescente, quelli in cui è decrescente, gli eventuali punti di massimo/minimo relativo e/o assoluto;

d) determinare gli intervalli in cui la funzione è concava e quelli in cui è convessa;

e) trovare l'equazione della retta tangente al grafico nel punto di ascissa $x_0 = 1$;

f) disegnare un grafico approssimativo di g.

$\boxed{\mathbf{9}}$ Dato il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = \dfrac{(6t^2 - \cos t)(2 + y^2)}{y} \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

a) dire se la funzione $y(t) = \sqrt{t^2 + 1}$ è soluzione del problema;

b) determinare una soluzione del problema nel caso in cui non lo sia la funzione di cui al punto precedente; oppure, alternativamente

b') calcolare i seguenti integrali

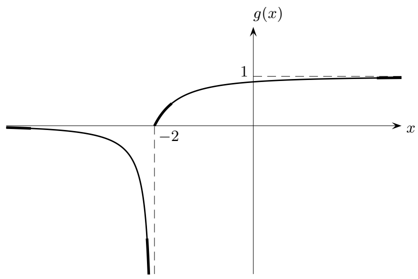
$$\int \Big(\frac{5x^2 + 3x - 1}{\sqrt{x}} - \frac{3}{\sqrt{4 - x^2}}\Big)\, dx \qquad \int_1^2 \frac{x^2 + 1}{x(x^2 + 3)}\, dx.$$

$\boxed{\mathbf{10}}$ Calcolare il polinomio di Taylor di grado 2 di $f(x) = \ln(1 + \ln x)$ nel punto $x_0 = \mathrm{e}$.

Soluzioni dei quesiti dell'esame del 14 settembre 2016

$\boxed{\mathbf{1}}$ C; $\boxed{\mathbf{2}}$ A; $\boxed{\mathbf{3}}$ B; $\boxed{\mathbf{4}}$ B; $\boxed{\mathbf{5}}$ consultare il libro di testo.

$\boxed{\mathbf{6}}$ In neretto si evidenziano le informazioni date dai limiti. Il grafico della funzione è quindi completato a piacere (linea sottile), per esempio:



$\boxed{\mathbf{7}}$ a) consultare il libro di testo. b) il primo limite è della forma $0/0$; applicando il teorema di ha

$$\lim_{x\to 0} \frac{3\operatorname{tg} x - \ln(\cos(3x))}{\sqrt{1+x} - \mathrm{e}^x} \overset{H}{=} \lim_{x\to 0} \frac{\frac{3}{\cos^2 x} + \frac{3\operatorname{sen}(3x)}{\cos(3x)}}{\frac{1}{2\sqrt{1+x}} - \mathrm{e}^x} = \left[\frac{3+0}{1/2-1}\right] = -6.$$

Per quanto riguarda il secondo, il denominatore non tende né a zero né a ∞ in quanto l'arcotangente ha limite finito per $x \to +\infty$ mentre $\operatorname{sen}(x^4)$ è una funzione oscillante che non ammette limite per $x \to +\infty$; per questo motivo non si può applicare il teorema. Il terzo è della forma $(\operatorname{sen} 1)/0$, dunque anche in questo caso non si può applicare il teorema.

$\boxed{\mathbf{8}}$ a) La funzione è definita per ogni $x \in \mathbb{R} = \mathcal{D}$. Poiché e^{-x} è positiva per ogni x, la funzione è positiva per $x > 0$, negativa per $x < 0$ e si annulla in $x = 0$. Inoltre g non è funzione né pari né dispari. Ha senso andare a studiare solamente i limiti a $\pm\infty$. Si ha

$$\lim_{x\to -\infty} x^3\mathrm{e}^{-x} = [-\infty \cdot +\infty] = -\infty,$$

mentre

$$\lim_{x\to +\infty} x^3\mathrm{e}^{-x} = \lim_{x\to +\infty} \frac{x^3}{\mathrm{e}^x} = 0 \quad \text{(limite fondamentale)}.$$

Al secondo limite si poteva applicare (tre volte di seguito) anche il Teorema di de L'Hôpital, essendo della forma indeterminata $[\infty/\infty]$.

b) Banalmente g non ammette asintoti verticali. Poiché la funzione ha limite finito uguale a 0 per $x \to +\infty$, allora la retta $y = 0$ è asintoto (orizzontale) a $+\infty$. Poiché inoltre

$$\lim_{x\to -\infty} \frac{g(x)}{x} = \lim_{x\to -\infty} x^2\mathrm{e}^{-x} = -\infty,$$

non ci sono asintoti a $-\infty$.

c) La derivata prima è

$$g'(x) = 3x^2\mathrm{e}^{-x} + x^3\mathrm{e}^{-x}(-1) = (3x^2 - x^3)\mathrm{e}^{-x} = x^2(3-x)\mathrm{e}^{-x}.$$

Poiché $x^2 e^{-x} > 0$ per ogni $x \neq 0$, essendo inoltre nullo in $x = 0$, mentre $3 - x \geq 0$ se solo se $x \leq 3$, allora

$$g'(x) \begin{cases} > 0, & \text{se } x \in]-\infty, 0[\cup]0, 3[, \\ = 0, & \text{se } x = 0 \text{ oppure } x = 3, \\ < 0, & \text{se } x \in]3, +\infty[. \end{cases}$$

Dunque la funzione è crescente in $]-\infty, 0[$ e in $]0, 3[$, mentre è decrescente in $]3, +\infty[$. In $x = 3$ ammette un punto di massimo relativo e assoluto. Poiché la funzione è derivabile anche in 0 con derivata nulla, segue che $g(x)$ è strettamente crescente su tutto $]-\infty, 3[$; è probabile che $x = 0$ sia un punto di flesso a tangente orizzontale (si veda d)).

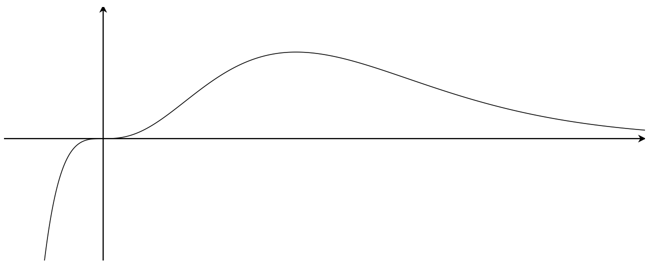
d) La derivata seconda è data da

$$g''(x) = (6x - 3x^2)e^{-x} + (3x^2 - x^3)e^{-x}(-1) = x(x^2 - 6x + 6)e^{-x}.$$

Essendo $(x^2 - 6x + 6) \geq 0$ per $x \leq 3 - \sqrt{3}$ oppure $x \geq 3 + \sqrt{3}$, si ha

$$g''(x) \begin{cases} < 0, & \text{se } x \in]-\infty, 0[\cup]3 - \sqrt{3}, 3 + \sqrt{3}[, \\ = 0, & \text{se } x = 0 \text{ oppure } x = 3 - \sqrt{3} \text{ oppure } x = 3 - \sqrt{3}, \\ > 0, & \text{se } x \in]0, 3 - \sqrt{3}[\cup]3 + \sqrt{3}, +\infty[, \end{cases}$$

perciò la funzione è concava in $]-\infty, 0[$ e in $]3-\sqrt{3}, 3+\sqrt{3}[$, mentre è convessa in $]0, 3-\sqrt{3}[$ e in $]3 + \sqrt{3}, +\infty[$. In $x = 0$, $x = 3 - \sqrt{3}$, $x = 3 + \sqrt{3}$ ha tre punti di flesso, il primo a tangente orizzontale.



g) L'equazione della retta tangente al grafico nel generico punto $(x_0, g(x_0))$ di derivabilità per la funzione è

$$y = (x - x_0)g'(x_0) + g(x_0).$$

Poiché $g(1) = e^{-1}$ e $g'(1) = 2e^{-1}$, l'equazione della retta cercata è

$$y = 2e^{-1}(x - 1) + e^{-1}.$$

$\boxed{9}$ a) Si ha $y'(t) = \frac{2t}{2\sqrt{t^2+1}}$. Sostituendo si ottiene

$$\frac{t}{\sqrt{t^2 + 1}} = \frac{(6t^2 - \cos t)(t^2 + 3)}{\sqrt{t^2 + 1}}$$

che non è identicamente soddisfatta (per esempio, per $t = 0$ si ha $0 \neq -3$). La funzione non è dunque soluzione. Si osservi che $y(t)$ soddisfa invece la seconda condizione $y(0) = 1$.

b) Scrivendo $y' = \frac{dy}{dt}$ e utilizzando il metodo di separazione delle variabili si ha

$$\frac{y}{y^2+2}\,dy = (6t^2 - \cos t)\,dt \qquad \Longrightarrow \qquad \int \frac{y}{y^2+2}\,dy = \int (6t^2 - \cos t)\,dt.$$

Dalla seconda tabella si ha

$$\int \frac{y}{y^2+2}\,dy = \frac{1}{2}\int \frac{2y}{y^2+2}\,dy = \frac{1}{2}\int \frac{(y^2+2)'}{y^2+2}\,dy = \frac{1}{2}\ln(y^2+2)$$

mentre, grazie semplicemente alla prima tabella, si ottiene

$$\int (6t^2 - \cos t)\,dt = 2t^3 - \operatorname{sen} t + c,$$

da cui segue

$$\frac{1}{2}\ln(y^2+2) = 2t^3 - \operatorname{sen} t + c,$$

con c generica costante d'integrazione. Risolvendo in y si ottiene quindi

$$2 + y^2 = \mathrm{e}^{4t^3 - 2\operatorname{sen} t + 2c} \qquad \Longrightarrow \qquad y = \pm\sqrt{\mathrm{e}^{4t^3 - 2\operatorname{sen} t + 2c} - 2}.$$

In quest'ultima si sceglie il segno $+$ in quanto $y(0)$ è inizialmente positiva. Imponendo ora la condizione $y(0) = 1$ nella prima delle tre relazioni sopra si ottiene $\frac{1}{2}\ln 3 = c$. Una soluzione è quindi

$$y(t) = \sqrt{\mathrm{e}^{4t^3 - 2\operatorname{sen} t + \ln 3} - 2} = \sqrt{3\mathrm{e}^{4t^3 - 2\operatorname{sen} t} - 2}.$$

Alternativamente, si poteva utilizzare direttamente la formula risolutiva per le equazioni a variabili separabili (insieme alla formula fondamentale del calcolo integrale)

$$\int_1^y \frac{z}{z^2+2}\,dz = \int_0^t (6s^2 - \cos s)\,ds \qquad \Longrightarrow \qquad \Big[\frac{1}{2}\ln(z^2+2)\Big]_1^y = \Big[2s^3 - \operatorname{sen} s\Big]_0^t$$

$$\Longrightarrow \qquad \frac{1}{2}\ln(y^2+2) - \frac{1}{2}\ln 3 = 2t^3 - \operatorname{sen} t,$$

che risolta rispetto a y fornisce la soluzione cercata.

b') Dalle tabelle si ottiene

$$\int \Big(\frac{5x^2+3x-1}{\sqrt{x}} - \frac{3}{\sqrt{4-x^2}}\Big)\,dx = 5\int x^{3/2}\,dx + 3\int x^{1/2}\,dx - \int x^{-1/2}\,dx - \int \frac{3}{\sqrt{2^2-x^2}}\,dx$$

$$= 5\frac{x^{5/2}}{5/2} + 3\frac{x^{3/2}}{3/2} - \frac{x^{1/2}}{1/2} - 3\operatorname{arcsen}\frac{x}{2} + c = 2x^2\sqrt{x} + 2x\sqrt{x} - 2\sqrt{x} - 3\operatorname{arcsen}\frac{x}{2} + c,$$

con c costante arbitraria. Per il Teorema fondamentale del calcolo e grazie alla seconda tabella, si ha

$$\int_1^2 \frac{x^2+1}{x(x^2+3)}\,dx = \frac{1}{3}\int_1^2 \frac{3x^2+3}{x^3+3x}\,dx = \frac{1}{3}\int_1^2 \frac{(x^3+3x)'}{x^3+3x}\,dx = \frac{1}{3}\Big[\ln|x^3+3x|\Big]_1^2 = \frac{1}{3}\ln\frac{7}{2}.$$

$\boxed{\mathbf{10}}$ Si ha $f'(x) = \frac{1}{1+\ln x}\cdot\frac{1}{x} = \frac{1}{x + x\ln x}$ e $f''(x) = -\frac{1+\ln x + x(1/x)}{(x+x\ln x)^2} = -\frac{2+\ln x}{(x+x\ln x)^2}$ da cui $f(\mathrm{e}) = \ln 2$, $f'(\mathrm{e}) = 1/(2\mathrm{e})$, $f''(\mathrm{e}) = -3/(4\mathrm{e}^2)$ perciò il polinomio di Taylor cercato è

$$P(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x-x_0)^2 = \ln 2 + \frac{1}{2\mathrm{e}}(x-\mathrm{e}) - \frac{3}{8\mathrm{e}^2}(x-\mathrm{e})^2.$$