Università degli Studi di Udine — Anno Accademico 2015/2016

Corso di Laurea in Biotecnologie

Modulo di Matematica

Esame del 20/07/2016

N.B.: scrivere nome, cognome e numero di matricola su ogni foglio consegnato.
Tempo a disposizione: 2.5 ore

---

1 Se $\lim_{x\to x_0} f(x) = -\infty$ e $\lim_{x\to x_0} g(x) = 0$, allora $\lim_{x\to x_0} f(x)g(x)$ è

A $-\infty$
B $+\infty$
C 0
D non ci sono elementi sufficienti per rispondere

---

2 Se f è una funzione derivabile due volte in $]a, b[$ e tale che $f'(x) > 0$ e $f''(x) < 0$ per ogni $x \in]a, b[$, allora

A f è crescente e convessa
B f è decrescente e concava
C f è crescente e concava
D f è decrescente e convessa

---

3 L'equazione differenziale $y' = \operatorname{arctg}(t^2)y$ è

A un'equazione lineare del primo ordine
B un'equazione lineare del secondo ordine
C un'equazione non lineare del primo ordine
D un'equazione non lineare del secondo ordine

---

4 La funzione $f(x) = (2/3)^x$

A ha come immagine $\mathbb{R}$
B ha limite $+\infty$ per $x \to +\infty$
C è decrescente
D è una funzione razionale

---

5 Dare la definizione di continuità di una funzione f in un punto x_0.

$\boxed{6}$ Rappresentare il grafico di una funzione g che verifichi contemporaneamente le seguenti proprietà:

$$\lim_{x\to-\infty} g(x) = -3 \qquad \lim_{x\to-1^-} g(x) = 2 \qquad \lim_{x\to-1^+} g(x) = +\infty \qquad \lim_{x\to+\infty} g(x) = -\infty$$

$\boxed{7}$ a) Enunciare il teorema fondamentale del calcolo integrale;

b) per quali delle tre funzioni

$$f(x) = \ln|x+1|, \qquad g(x) = \begin{cases} e^{-1/x} & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0, \end{cases} \qquad h(x) = \begin{cases} \dfrac{x - 2\operatorname{tg} x}{\operatorname{sen} x} & \text{se } x \neq 0 \\ -1 & \text{se } x = 0, \end{cases}$$

è possibile applicare il teorema nell'intervallo $[-2,2]$?

$\boxed{8}$ Data la funzione

$$g(x) = \sqrt[3]{x^2 + 2x - 3}$$

a) determinare il dominio $\mathcal{D}$ e il segno di g. Calcolare i limiti agli estremi del dominio;

b) studiare in quali punti la funzione è continua e in quali derivabile;

c) trovare gli eventuali asintoti;

d) determinare gli intervalli in cui la funzione è crescente, quelli in cui è decrescente, e gli eventuali punti di massimo/minimo relativo e/o assoluto;

e) calcolare il comportamento di g' negli eventuali punti di non derivabilità;

f) determinare gli intervalli in cui la funzione è concava e quelli in cui è convessa;

g) trovare l'equazione della retta tangente al grafico nel punto di ascissa $x_0 = 2$;

h) disegnare un grafico approssimativo di g.

$\boxed{9}$ Dato il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = -2t \dfrac{\operatorname{sen} y}{\cos y} \\ y(0) = \pi/6 \end{cases}$$

a) dire se la funzione $y(t) = (\arccos t)/3$ è soluzione del problema nell'intervallo $]-1,1[$;

b) determinare una soluzione del problema nel caso in cui non lo sia la funzione di cui al punto precedente. Verificare che quella trovata è effettivamente una soluzione. Alternativamente

b') calcolare i seguenti integrali

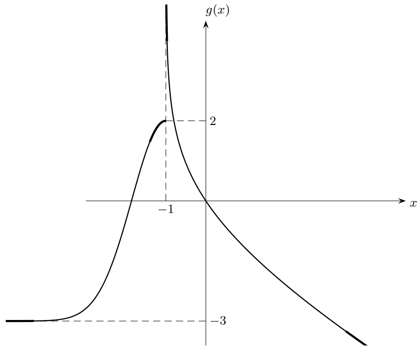
$$\int \left(\frac{1}{e^x\, 2^{-x}} + \frac{x^5 - 3x^2 + 4}{x} \right) dx \qquad \int_0^{\pi/4} \frac{1 - 3\operatorname{sen} x}{\cos^2 x}\, dx.$$

$\boxed{10}$ Calcolare il polinomio di Taylor di ordine 2 di $f(x) = \operatorname{arctg}(\sqrt{3}\, e^{-x})$ nel punto $x_0 = \ln 3$.

Soluzioni dei quesiti dell'esame del 20 luglio 2016

$\boxed{1}$ D; $\boxed{2}$ C; $\boxed{3}$ A; $\boxed{4}$ C; $\boxed{5}$ consultare il libro di testo.

$\boxed{6}$ In neretto si evidenziano le informazioni date dai limiti. Il grafico della funzione è quindi completato a piacere (linea sottile), per esempio:



$\boxed{7}$ a) consultare il libro di testo; b) la funzione f non è definita in $x = -1$ che appartiene all'intervallo $[-2, 2]$, dunque il teorema non si applica. La seconda funzione è definita ovunque ma essendo $\lim_{x\to 0^+} g(x) = [\mathrm{e}^{-\infty}] = 0$, mentre $\lim_{x\to 0^-} g(x) = [\mathrm{e}^{\infty}] = +\infty$, non è continua in $x = 0$; anche in questo caso non è possibile applicare il teorema.

Nell'ultimo caso, la funzione $z(x) = \frac{x-2\,\mathrm{tg}\,x}{\mathrm{sen}\,x}$ è definita dove il seno non si annulla, dunque in $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}$. Essendo $[-2, 2] \setminus \{0\} \subseteq]-\pi, 0[\cup]0, \pi[\subseteq \mathcal{D}$ segue che la funzione $h(x)$ è definita in $[-2, 2]$ e continua almeno in $[-2, 2] \setminus \{0\}$. Resta da valutare la continuità in $x = 0$. Ricordando il limite fondamentale $\lim_{x\to 0}(\mathrm{sen}\,x)/x = 1$, si ha

$$\lim_{x\to 0} h(x) = \lim_{x\to 0} \left(\frac{x}{\mathrm{sen}\,x} - \frac{2\,\mathrm{tg}\,x}{\mathrm{sen}\,x}\right) = \lim_{x\to 0} \left(\frac{x}{\mathrm{sen}\,x} - \frac{2}{\cos x}\right) = 1 - 2 = -1 = h(0),$$

perciò h è continua anche in 0 e in quest'ultimo caso si può applicare il teorema.

$\boxed{8}$ a) La funzione è definita per ogni $x \in \mathbb{R}$. Poiché $z^3 \geq 0$ se e solo se $z \geq 0$, si ha $g(x) \geq 0$ se e solo se $x^2 + 2x - 3 \geq 0$ ovvero se $x \leq -3$ oppure $x \geq 1$. In particolare g si annulla in $x = -3$ e $x = 1$ ed è negativa per $x \in]-3, 1[$. Inoltre g non è funzione né pari né dispari. Ha senso andare a studiare solamente i limiti a $\pm\infty$. Poiché l'argomento della radice tende a $+\infty$ se $x \to \pm\infty$ si ha banalmente $\lim_{x\to\pm\infty} g(x) = +\infty$.

b) Essendo composta di funzioni continue, g è continua. Per quanto riguarda la derivabilità, g è derivabile in tutti i punti che non annullano l'argomento della radice cubica (dove potenzialmente la funzione potrebbe non esserlo), dunque per ogni $x \neq -3$, $x \neq 1$. Studiando la derivabilità in $x = -3$ e $x = 1$ mediante la definizione, si ha

$$\lim_{x\to -3} \frac{g(x) - g(-3)}{x - (-3)} = \lim_{x\to -3} \sqrt[3]{\frac{(x + 3)(x - 1)}{(x + 3)^3}} = \lim_{x\to -3} \sqrt[3]{\frac{x - 1}{(x + 3)^2}} = \left[\sqrt[3]{\frac{-4}{0^+}}\right] = -\infty,$$

$$\lim_{x\to 1} \frac{g(x) - g(1)}{x - 1} = \lim_{x\to 1} \sqrt[3]{\frac{(x + 3)(x - 1)}{(x - 1)^3}} = \lim_{x\to 1} \sqrt[3]{\frac{x + 3}{(x - 1)^2}} = \left[\sqrt[3]{\frac{4}{0^+}}\right] = +\infty,$$

per cui g non è derivabile in nessuno dei due punti. Si osservi che tali limiti implicano che in $x = -3$ e $x = 1$ la tangente è verticale.

c) Banalmente g non ammette asintoti verticali. Per quanto riguarda quelli obliqui, vale

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{g(x)}{x}=\lim_{x\to\pm\infty}\sqrt[3]{\frac{x^2+2x-3}{x^3}}=\lim_{x\to\pm\infty}\sqrt[3]{\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}-\frac{3}{x^3}}=0=:m,$$

mentre

$$\lim_{x\to\pm\infty}\big(g(x)-mx\big)=\lim_{x\to\pm\infty}g(x)=+\infty,$$

dunque g non ammette neppure asintoti obliqui/orizzontali.

d) Per ogni $x\neq-3$, $x\neq1$, la derivata prima è

$$g'(x)=\big((x^2+2x-3)^{1/3}\big)'=\frac{1}{3}(x^2+2x-3)^{-2/3}(2x+2)=\frac{2}{3}\cdot\frac{x+1}{\sqrt[3]{(x^2+2x-3)^2}}.$$

Il numeratore è ≥ 0 se $x\geq-1$, il denominatore è sempre positivo nel dominio dove è derivabile, dunque per $x\neq-3$, $x\neq1$, quindi

$$g'(x)\begin{cases}<0, & \text{se } x\in\,]-\infty,-3[\cup]-3,-1[,\\ =0, & \text{se } x=-1,\\ >0, & \text{se } x\in\,]-1,1[\cup]1,+\infty[.\end{cases}$$

In definitiva la funzione è decrescente in $]-\infty,-3[$ e in $]-3,1[$, mentre è crescente in $]-1,1[$ e in $]1,+\infty[$. Si osservi che poiché g è continua in $x=-3$ ed è decrescente in $]-\infty,-3[$ e in $]-3,1[$, allora è decrescente su tutto $]-\infty,1[$. Analogamente è crescente su tutto $]1,+\infty[$. In $x=-1$ ammette un punto di minimo relativo e assoluto. Poiché g tende a $+\infty$ per $x\to\pm\infty$, la funzione non ammette massimo.

e) Si ha

$$\lim_{x\to-3}g'(x)=\frac{2}{3}\lim_{x\to-3}\frac{x+1}{\sqrt[3]{(x^2+2x-3)^2}}=\frac{2}{3}\left[\frac{-2}{0^+}\right]=-\infty,$$
$$\lim_{x\to1}g'(x)=\frac{2}{3}\lim_{x\to1}\frac{x+1}{\sqrt[3]{(x^2+2x-3)^2}}=\frac{2}{3}\left[\frac{2}{0^+}\right]=+\infty,$$

dunque in tali punti la funzione ha la tangente verticale.

f) Essendo $\sqrt[3]{(x^2+2x-3)^2}=(x^2+2x-3)^{2/3}$ si ha

$$\big(\sqrt[3]{(x^2+2x-3)^2}\big)'=\frac{2}{3}(x^2+2x-3)^{-1/3}(2x+2)=\frac{4(x+1)}{3\sqrt[3]{x^2+2x-3}},$$

per cui la derivata seconda è

$$\begin{aligned}g''(x)&=\frac{2}{3}\cdot\frac{\sqrt[3]{(x^2+2x-3)^2}-(x+1)\frac{4(x+1)}{3\sqrt[3]{x^2+2x-3}}}{\sqrt[3]{(x^2+2x-3)^4}}\\&=\frac{2}{9}\cdot\frac{3(x^2+2x-3)-4(x+1)^2}{\sqrt[3]{(x^2+2x-3)^5}}=-\frac{2}{9}\cdot\frac{x^2+2x+13}{\sqrt[3]{(x^2+2x-3)^5}}.\end{aligned}$$

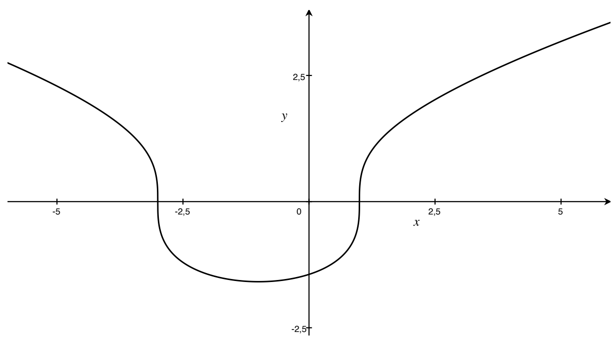
Il numeratore è sempre positivo, dunque, tenendo conto del segno $-$ davanti alla frazione, la derivata seconda è positiva se e solo se $\sqrt[3]{(x^2+2x-3)^5}<0$ cioè $x^2+2x-3<0$, ovvero

$-3 < x < 1$. Dunque la funzione è concava in $]-\infty, -3[$ e in $]1, +\infty[$, mentre è convessa in $]-3, 1[$. In $x = -3$ e $x = 1$ ha dei punti di flesso a tangente verticale.

Per concludere, si osservi che la funzione si può scrivere nella forma

$$g(x) = \sqrt[3]{(x+1)^2 - 4},$$

dunque è composizione della funzione $w(y) = \sqrt[3]{y^2 - 4}$ con la traslazione $y(x) = x + 1$. Essendo w funzione pari ciò comporta che il grafico di g è simmetrico rispetto alla retta verticale di equazione $x = -1$, come si può anche osservare in figura.



g) L'equazione della retta tangente al grafico nel generico punto $(x_0, g(x_0))$ di derivabilità per la funzione è

$$y = (x - x_0)g'(x_0) + g(x_0).$$

Poiché $g(2) = \sqrt[3]{5}$ e $g'(2) = 2/\sqrt[3]{25}$, l'equazione della retta cercata è

$$y = \frac{2}{\sqrt[3]{25}}(x - 2) + \sqrt[3]{5}.$$

$\boxed{9}$ a) Si ha $y'(t) = -\frac{1}{3\sqrt{1-t^2}}$ e sostituendo si ottiene l'equazione

$$-\frac{1}{3\sqrt{1-t^2}} = -2t\frac{\operatorname{sen}(\frac{1}{3}\arccos t)}{\cos(\frac{1}{3}\arccos t)}$$

che non è identicamente soddisfatta (per esempio, per $t = 0$ si ottiene $-1/3 \neq 0$). La funzione non è dunque soluzione. Si osservi che invece la funzione soddisfa la seconda condizione, cioè $y(0) = \pi/6$.

b) Scrivendo $y' = \frac{dy}{dt}$ e utilizzando il metodo di separazione delle variabili si ha

$$\frac{\cos y}{\operatorname{sen} y}\,dy = -2t\,dt \quad \Longrightarrow \quad \int \frac{\cos y}{\operatorname{sen} y}\,dy = -\int 2t\,dt \quad \Longrightarrow \quad \ln|\operatorname{sen} y| = -t^2 + c$$

dove c è la generica costante d'integrazione. Osservando che $\operatorname{sen} y(0) = \operatorname{sen}(\pi/6) = 1/2$, si ha che per t vicini a 0 la funzione $\operatorname{sen} y(t)$ è positiva e nell'equazione sopra si può togliere il valore assoluto. Imponendo inoltre la condizione $y(0) = \pi/6$ si ricava $\ln(1/2) = c$ ed infine

$$\ln\operatorname{sen} y = -t^2 + \ln(1/2) \quad \Longleftrightarrow \quad \operatorname{sen} y = \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-t^2}$$

e poiché $y(t)$ è positiva e prossima a $1/2$ per t vicino a 0 e $0 \le \frac{1}{2}e^{-t^2} \le 1$, si può invertire la funzione seno ottenendo
$$y(t) = \text{arcsen}(\frac{1}{2}e^{-t^2}).$$
Alternativamente, si poteva utilizzare direttamente la formula risolutiva per le equazioni a variabili separabili (insieme alla formula fondamentale del calcolo integrale)
$$\int_{\pi/6}^{y} \frac{\cos z}{\text{sen}\, z}\, dz = \int_0^t -s\, ds \quad\Longrightarrow\quad \Big[\ln|\text{sen}\, z|\Big]_{\pi/6}^{y} = \Big[-s^2\Big]_0^t \quad\Longrightarrow\quad \ln|\text{sen}\, y| - \ln\frac{1}{2} = -t^2,$$
che, supposto $\text{sen}\, y > 0$ e risolta rispetto a y, fornisce la soluzione cercata.

Verifichiamo che quella trovata è una soluzione:
$$y'(t) = \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{1}{2}e^{-t^2}\right)^2}}\,\frac{1}{2}e^{-t^2}(-2t)$$
mentre, ricordando che $|\cos z| = \sqrt{1-\text{sen}^2 z}$ ed osservando che $\cos y(t)$ è sempre positiva, si ha
$$-2t\,\frac{\text{sen}\, y(t)}{\cos y(t)} = -2t\frac{\text{sen}\left(\text{arcsen}(\frac{1}{2}e^{-t^2})\right)}{\cos\left(\text{arcsen}(\frac{1}{2}e^{-t^2})\right)} = -2t\frac{\frac{1}{2}e^{-t^2}}{\sqrt{1-\left(\frac{1}{2}e^{-t^2}\right)^2}}.$$
Si riconosce facilmente che queste due funzioni coincidono. Inoltre, sostituendo si ottiene $y(0) = \text{arcsen}(1/2) = \pi/6$, dunque y è effettivamente soluzione del problema di Cauchy.

b') Dalle tabelle si ottiene
$$\int \Big(\frac{1}{e^x\, 2^{-x}} + \frac{x^5 - 3x^2 + 4}{x}\Big)\, dx = \int \Big(\frac{2}{e}\Big)^x dx + \int x^4\, dx - 3\int x\, dx + 4\int \frac{1}{x}\, dx$$
$$= \frac{(2/e)^x}{\ln(2/e)} + \frac{x^5}{5} - 3\frac{x^2}{2} + 4\ln|x| + c = \frac{2^x}{e^x(\ln 2 - 1)} + \frac{x^5}{5} - \frac{3}{2}x^2 + 4\ln|x| + c,$$
con c costante arbitraria. Per le tabelle e il Teorema fondamentale del calcolo si ha
$$\int_0^{\pi/4} \frac{1 - 3\,\text{sen}\, x}{\cos^2 x}\, dx = \int_0^{\pi/4} \Big(\frac{1}{\cos^2 x} - \frac{3\,\text{sen}\, x}{\cos^2 x}\Big)\, dx = \Big[\text{tg}\, x\Big]_0^{\pi/4} + 3\int_0^{\pi/4} (\cos x)^{-2}(\cos x)'\, dx$$
$$= (1-0) + 3\Big[-\frac{1}{\cos x}\Big]_0^{\pi/4} = 1 - 3\Big(\frac{1}{1/\sqrt{2}} - 1\Big) = 4 - 3\sqrt{2}.$$

$\boxed{\mathbf{10}}$ La derivata prima e seconda sono date da
$$f'(x) = \frac{1}{1 + (\sqrt{3}e^{-x})^2}(-\sqrt{3}e^{-x}) = -\sqrt{3}\frac{e^x}{e^{2x}+3},$$
$$f''(x) = -\sqrt{3}\,\frac{e^x(e^{2x}+3) - e^x e^{2x} 2}{(e^{2x}+3)^2} = \sqrt{3}\,\frac{e^x(e^{2x}-3)}{(e^{2x}+3)^2}.$$
Essendo $e^{\ln 3} = 3$, $e^{-\ln 3} = 1/3$, $e^{2\ln 3} = e^{\ln 9} = 9$, $\text{arctg}(1/\sqrt{3}) = \pi/6$, si ha $f(\ln 3) = \pi/6$ $f'(\ln 3) = -\sqrt{3}/4$, $f''(\ln 3) = \sqrt{3}/8$ perciò il polinomio di Taylor cercato è
$$P(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x - x_0)^2 = \frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{4}(x - \ln 3) + \frac{\sqrt{3}}{16}(x - \ln 3)^2.$$