Università degli Studi di Udine — Anno Accademico 2015/2016

Corso di Laurea in Biotecnologie

Modulo di Matematica

Esame del 04/07/2016

N.B.: scrivere nome, cognome e numero di matricola su ogni foglio consegnato.
Tempo a disposizione: 2.5 ore

---

1 Se $\lim_{x\to x_0} f(x) = 0^+$ e $\lim_{x\to x_0} g(x) = -\infty$, allora $\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$ è

- A $-\infty$
- B $+\infty$
- C 0
- D non ci sono elementi sufficienti per rispondere

---

2 Se f è una funzione derivabile due volte in $]a,b[$ e tale che $f''(x_0) = 0$, $f'(x_0) < 0$ con $x_0 \in]a,b[$, allora

- A x_0 è punto di minimo relativo per f
- B x_0 è punto di massimo relativo per f
- C x_0 è punto di massimo assoluto per f
- D nessuna delle precedenti

---

3 L'equazione differenziale $y'' = (ty + y')^2$ è

- A un'equazione lineare del primo ordine
- B un'equazione lineare del secondo ordine
- C un'equazione non lineare del primo ordine
- D un'equazione non lineare del secondo ordine

---

4 La funzione $f(x) = \log_{1/9} x$

- A è definita per $x \in \mathbb{R}$
- B è integrabile in $[271, 475]$
- C è una funzione crescente
- D è una funzione decrescente e concava

---

5 Dare la definizione di primitiva di una funzione f in un intervallo I.

$\boxed{6}$ Rappresentare il grafico di una funzione g che verifichi contemporaneamente le seguenti proprietà:

$$\lim_{x\to-\infty} g(x) = +\infty \qquad \lim_{x\to 2^-} g(x) = 1 \qquad \lim_{x\to 2^+} g(x) = -\infty \qquad \lim_{x\to+\infty} g(x) = -2$$

$\boxed{7}$

a) Enunciare il Teorema dei due carabinieri

b) per ciascuno dei seguenti casi

$$\frac{x^2+2}{5x^2+3} \le g(x) \le \frac{3x^3-1}{15x^2+1}, \text{ con } x \to +\infty, \qquad \frac{\operatorname{sen} x}{x-3x^2} \le g(x) \le 2^{-x^2}, \text{ con } x \to 0$$

applicare il teorema nel caso fosse possibile farlo.

$\boxed{8}$ Data la funzione

$$g(x) = \frac{e^{2x}}{1-2x}$$

a) determinare il dominio $\mathcal{D}$ e il segno di g. Studiare in quali punti la funzione è continua e in quali derivabile;

b) calcolare i limiti agli estremi del dominio e trovare gli eventuali asintoti;

c) determinare gli intervalli in cui la funzione è crescente, quelli in cui è decrescente, e gli eventuali punti di massimo/minimo relativo e/o assoluto;

d) determinare gli intervalli in cui la funzione è concava e quelli in cui è convessa;

e) trovare l'equazione della retta tangente al grafico nel punto $x_0 = -1$;

f) disegnare un grafico approssimativo di g.

$\boxed{9}$ Dato il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = \dfrac{2y^4+1}{y^3t^3} \\ y(2) = 1 \end{cases}$$

a) dire se la funzione $y(t) = e^{2(t-2)}$ è soluzione del problema per $t > 0$;

b) determinare una soluzione del problema nel caso in cui non lo sia la funzione di cui al punto precedente; oppure, alternativamente

b') calcolare i seguenti integrali

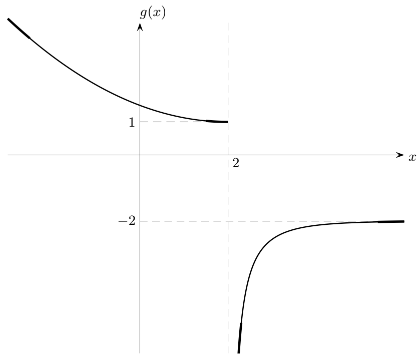
$$\int \left[\frac{5}{\sqrt{4-x^2}} - \left(x + \frac{2}{\sqrt{x}}\right)^2\right] dx \qquad \int_0^2 \frac{3x+1}{x^2+4}\, dx.$$

$\boxed{10}$ Calcolare il polinomio di Taylor di grado 2 di $f(x) = \ln(1+x^2)$ nel punto $x_0 = -1$.

Soluzioni dei quesiti dell'esame del 4 luglio 2016

$\boxed{\mathbf{1}}$ C; $\boxed{\mathbf{2}}$ D; $\boxed{\mathbf{3}}$ D; $\boxed{\mathbf{4}}$ B; $\boxed{\mathbf{5}}$ consultare il libro di testo.

$\boxed{\mathbf{6}}$ In neretto si evidenziano le informazioni date dai limiti. Il grafico della funzione è quindi completato a piacere (linea sottile), per esempio:



$\boxed{\mathbf{7}}$ a) consultare il libro di testo; b) nel primo caso si ha

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+2}{5x^2+3}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1+2/x^2}{5+3/x^2}=\frac{1}{5},\qquad \lim_{x\to+\infty}\frac{3x^3-1}{15x^2+1}=\lim_{x\to+\infty}x\frac{3-1/x^3}{15+1/x^2}=+\infty,$$

e il teorema non può essere applicato, mentre nel secondo

$$\lim_{x\to0}2^{-x^2}=1,\quad \lim_{x\to0}\frac{\operatorname{sen}x}{x-3x^2}=\lim_{x\to0}\frac{\operatorname{sen}x}{x}\cdot\frac{1}{1-3x}=1\cdot1=1,$$

per cui il teorema può essere applicato e si ha $\lim_{x\to0}g(x)=0$.

$\boxed{\mathbf{8}}$ a) La funzione è definita se $1-2x\neq0$ cioè $x\neq1/2$, perciò il dominio è $\mathcal{D}=\mathbb{R}\setminus\{1/2\}$ e la funzione, essendo quoziente di funzioni derivabili, è ivi continua e derivabile. Il numeratore è sempre positivo dunque la funzione è positiva per $x<1/2$, negativa per $x>1/2$.

b) Ha senso andare a studiare i limiti in $1/2$ e a $\pm\infty$. Si ha

$$\lim_{x\to-\infty}g(x)=\left[\frac{0}{+\infty}\right]=0,\qquad \lim_{x\to(1/2)^\pm}g(x)=\left[\frac{\mathrm{e}}{0^\mp}\right]=\mp\infty,$$

quindi la funzione non ammette massimo né minimo, mentre, utilizzando il limite fondamentale $\lim_{x\to+\infty}\mathrm{e}^x/x^p=+\infty$, $p>0$, (oppure, alternativamente, il Teorema di de L'Hôpital) si ha

$$\lim_{x\to+\infty}g(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{\mathrm{e}^x/x}{1/x-2}=\left[\frac{+\infty}{-2}\right]=-\infty.$$

Per quanto appena visto, la retta di equazione $x=1/2$ è un asintoto verticale, mentre l'asse x è un asintoto orizzontale a $-\infty$. Essendo

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{g(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\mathrm{e}^x/x^2}{1/x-2}=\left[\frac{+\infty}{-2}\right]=-\infty,$$

la funzione non ammette asintoti obliqui a $+\infty$.

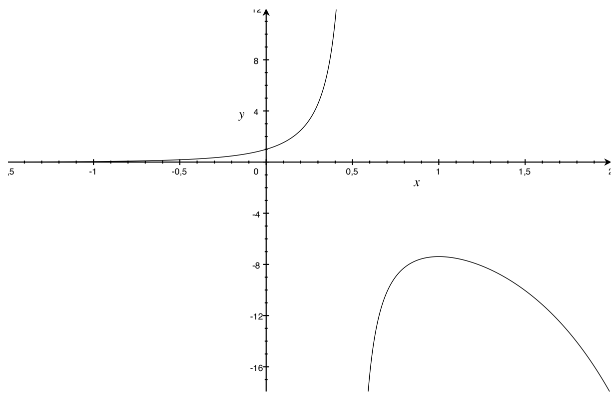
c) La derivata prima è

$$g'(x) = \frac{2e^{2x}(1-2x) - e^{2x}(-2)}{(1-2x)^2} = \frac{4e^{2x}(1-x)}{(2x-1)^2}.$$

Poiché i fattori e^{2x} e $(2x-1)^2$ sono sempre positivi nel dominio, si ottiene

$$g'(x) \begin{cases} < 0, & \text{se } x \in]1, +\infty[, \\ = 0, & \text{se } x = 1, \\ > 0, & \text{se } x \in]-\infty, 1/2[\cup]1/2, 1[, \end{cases}$$

perciò la funzione è decrescente in $]1, +\infty[$, mentre è crescente in $]-\infty, 1/2[$ e in $]1/2, 1[$. In $x = 1$ ammette un massimo relativo. Chiaramente, per il punto b) la funzione non ammette massimo né minimo assoluti.



d) La derivata seconda è

$$\begin{aligned} g''(x) &= 4\frac{\left[2e^{2x}(1-x) - e^{2x}\right](2x-1)^2 - e^{2x}(1-x)2(2x-1)2}{(2x-1)^4} \\ &= 4\frac{\left[2e^{2x}(1-x) - e^{2x}\right](2x-1) - e^{2x}(1-x)4}{(2x-1)^3} = \frac{4e^{2x}(4x^2-8x+5)}{(1-2x)^3}. \end{aligned}$$

Poiché il polinomio $4x^2 - 8x + 5$ è sempre positivo, la derivata seconda è positiva se e solo se $(1-2x)^3 > 0$ cioè $x < 1/2$. In definitiva $g''(x) > 0$ se $x \in]-\infty, 1/2[$ e $g''(x) < 0$ se $x \in]1/2, +\infty[$ perciò la funzione è convessa in $]-\infty, 1/2[$, mentre è concava in $]1/2, +\infty[$.

e) L'equazione della retta tangente al grafico nel generico punto $(x_0, g(x_0))$ di derivabilità per la funzione è

$$y = (x - x_0)g'(x_0) + g(x_0).$$

Poiché $g(-1) = e^{-2}/3$ e $g'(-1) = 8e^{-2}/9$, l'equazione della retta tangente è

$$y = \frac{8}{9e^2}(x+1) + \frac{1}{3e^2}.$$

9 a) Si ha $y'(t) = 2e^{2(t-2)}$ e sostituendo si ottiene l'equazione

$$2e^{2(t-2)} = \frac{2e^{8(t-2)} + 1}{e^{6(t-2)}t^3}$$

che non è identicamente soddisfatta per $t > 0$ (per esempio, per $t = 2$ si ottiene $2 \neq 3$). La funzione non è dunque soluzione. Si osservi che la funzione soddisfa invece la seconda condizione, essendo $y(2) = 1$.

b) Scrivendo $y' = \frac{dy}{dt}$ e utilizzando il metodo di separazione delle variabili si ha

$$\frac{y^3}{2y^4+1}\,dy = \frac{1}{t^3}\,dt$$

e, siccome $1/t^3 = t^{-3}$, integrando

$$\int \frac{y^3}{2y^4+1}\,dy = \int t^{-3}\,dt \qquad \Longrightarrow \qquad \int \frac{y^3}{2y^4+1}\,dy = -\frac{1}{2t^2} + c,$$

dove c è la generica costante d'integrazione. Per le tabelle

$$\int \frac{y^3}{2y^4+1}\,dy = \frac{1}{8}\int \frac{8y^3}{2y^4+1}\,dt = \frac{1}{8}\int \frac{(2y^4+1)'}{2y^4+1}\,dt = \frac{1}{8}\ln(2y^4+1),$$

e poiché $y(t)$ è positiva vicino a $t = 2$ si ottiene

$$\frac{1}{8}\ln(2y^4+1) = -\frac{1}{2t^2} + c \qquad \Longleftrightarrow \qquad y = \sqrt[4]{\frac{1}{2}\Big(\exp\Big(8c - \frac{4}{t^2}\Big) - 1\Big)}.$$

Imponendo la condizione $y(2) = 1$ (nella prima equazione) si ha $\ln 3/8 = -1/8 + c$, da cui si ricava $c = (1 + \ln 3)/8$. Una soluzione è data dunque da

$$y(t) = \sqrt[4]{\frac{1}{2}\Big(3\exp\Big(1 - \frac{4}{t^2}\Big) - 1\Big)}.$$

Alternativamente, si poteva utilizzare direttamente la formula risolutiva per le equazioni a variabili separabili (insieme alla formula fondamentale del calcolo integrale)

$$\int_1^y \frac{z^3}{2z^4+1}\,dz = \int_2^t s^{-3}\,ds \quad \Longrightarrow \quad \Big[\frac{1}{8}\ln(2z^4+1)\Big]_1^y = \Big[-\frac{1}{2s^2}\Big]_2^t$$

$$\Longrightarrow \quad \frac{1}{8}\ln(2y^4+1) - \frac{1}{8}\ln 3 = \frac{1}{8} - \frac{1}{2t^2}$$

che risolta rispetto a y fornisce la soluzione cercata.

b') Dalle tabelle si ottiene

$$\int \Big[\frac{5}{\sqrt{4-x^2}} - \Big(x + \frac{2}{\sqrt{x}}\Big)^2\Big]\,dx = 5\int \frac{1}{\sqrt{2^2-x^2}} - \int x^2\,dx - 4\int \sqrt{x}\,dx - 4\int \frac{1}{x}\,dx$$

$$= 5\,\mathrm{arcsen}\,\frac{x}{2} - \frac{x^3}{3} - 4\frac{x^{3/2}}{3/2} - 4\ln|x| + c = 5\,\mathrm{arcsen}\,\frac{x}{2} - \frac{x^3}{3} - \frac{8}{3}x\sqrt{x} - 4\ln|x| + c,$$

con c costante arbitraria. Per il Teorema fondamentale del calcolo e le tabelle si ha

$$\int_0^2 \frac{3x+1}{x^2+4}\,dx = \frac{3}{2}\int_0^2 \frac{2x}{x^2+4}\,dx + \int_0^2 \frac{1}{x^2+4}\,dx + = \Big[\frac{3}{2}\ln(x^2+4) + \frac{1}{2}\,\mathrm{arctg}\,\frac{x}{2}\Big]_0^2 = \frac{3\ln 2}{2} + \frac{\pi}{8}.$$

10 Si ha $f'(x) = \frac{2x}{1+x^2}$ e $f''(x) = 2\frac{(1+x^2)-x2x}{(1+x^2)^2} = 2\frac{1-x^2}{(1+x^2)^2}$ da cui $f(-1) = \ln 2$, $f'(-1) = -1$, $f''(-1) = 0$ perciò il polinomio di Taylor cercato è

$$P(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x - x_0)^2 = \ln 2 - (x + 1).$$