Università degli Studi di Udine — Anno Accademico 2015/2016

Corso di Laurea in Biotecnologie

Modulo di Matematica

Esame del 20/06/2016

N.B.: scrivere nome, cognome e numero di matricola su ogni foglio consegnato.
Tempo a disposizione: 2.5 ore

---

1 Se $\lim_{x\to x_0} f(x) = 0$ e $\lim_{x\to x_0} g(x) = -\infty$, allora $\lim_{x\to x_0} f(x) - g(x)$ è

- A $-\infty$
- B $+\infty$
- C 0
- D non ci sono elementi sufficienti per rispondere

---

2 Se f è una funzione derivabile in $]a, b[$ e tale che $f'(x_0) = 0$ e $f''(x_0) > 0$ per $x_0 \in]a, b[$, allora

- A x_0 è un punto di massimo relativo
- B x_0 è un punto di minimo relativo
- C x_0 è un punto di flesso
- D nessuna delle precedenti

---

3 L'equazione differenziale $y' = \operatorname{arctg} t - 3t^2 y$ è

- A un'equazione lineare del primo ordine
- B un'equazione lineare del secondo ordine
- C un'equazione non lineare del primo ordine
- D un'equazione non lineare del secondo ordine

---

4 La funzione $f(x) = \operatorname{arcsen} x$

- A è derivabile nel proprio dominio di definizione
- B è continua in $[-\pi/2, \pi/2]$
- C è periodica di periodo 2π
- D è dispari

---

5 Dare l'interpretazione geometrica della derivata di una funzione f in un punto x_0.

$\boxed{\mathbf{6}}$ Rappresentare il grafico di una funzione g che verifichi contemporaneamente le seguenti proprietà:

$$\lim_{x\to-\infty} g(x) = +\infty \qquad \lim_{x\to-3^-} g(x) = +\infty \qquad \lim_{x\to-3^+} g(x) = 1 \qquad \lim_{x\to+\infty} g(x) = 3$$

$\boxed{\mathbf{7}}$ a) Enunciare il Teorema del valore medio di Lagrange;

b) determinare, argomentando, a quali tra le funzioni $f(x) = \ln|x-2|$, $g(x) = \sqrt{1+x^2}$, $h(x) = \frac{\arccos x}{x+1}$ è possibile applicare il teorema nell'intervallo $[0,1]$.

$\boxed{\mathbf{8}}$ Data la funzione

$$g(x) = \frac{3 - \ln|x|^5}{x}$$

a) determinare il dominio $\mathcal{D}$, il segno ed eventuali simmetrie di g;

b) calcolare i limiti agli estremi del dominio e trovare gli eventuali asintoti;

c) determinare gli intervalli in cui la funzione è crescente, quelli in cui è decrescente, e gli eventuali punti di massimo/minimo relativo e/o assoluto;

d) determinare gli intervalli in cui la funzione è concava e quelli in cui è convessa;

e) trovare l'equazione della retta tangente al grafico nei punti $x_0 = -2$ e $x_0 = \mathrm{e}$;

f) disegnare un grafico approssimativo di g.

$\boxed{\mathbf{9}}$ Dato il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = (1+y^2)\dfrac{t\,\mathrm{sen}(2t)}{y} \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

a) dire se la funzione $y(t) = \cos(2t)$ è soluzione del problema;

b) determinare una soluzione del problema nel caso in cui non lo sia la funzione di cui al punto precedente; oppure, alternativamente

b') calcolare i seguenti integrali

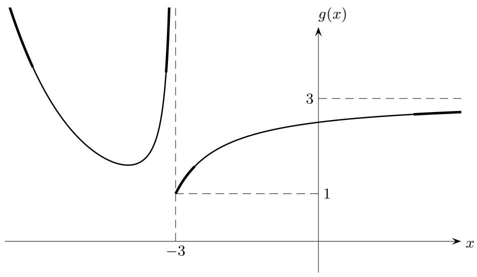
$$\int \left(\frac{(2^x)^3}{5^x} - \frac{\sqrt[4]{x}\,\sqrt[3]{x}}{x} \right) dx \qquad \int_0^{\pi} (x - 2x^2)\cos(3x)\, dx.$$

$\boxed{\mathbf{10}}$ Calcolare il polinomio di Taylor di grado 2 di $f(x) = \ln(x^2 + 3x)$ nel punto $x_0 = 1$.

Soluzioni dei quesiti dell'esame del 20 giugno 2016

$\boxed{1}$ B; $\boxed{2}$ B; $\boxed{3}$ A; $\boxed{4}$ D; $\boxed{5}$ consultare il libro di testo.

$\boxed{6}$ In neretto si evidenziano le informazioni date dai limiti. Il grafico della funzione è quindi completato a piacere (linea sottile), per esempio:



$\boxed{7}$ a) Consultare il libro di testo. b) La funzione $f(x)$ è continua e derivabile in tutti i punti tranne che in $x = 2$ che non appartiene a $[0, 1]$, perciò in questo caso si può applicare il teorema. La funzione g è continua e derivabile in $[0, 1]$, essendo $g'(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$; anche in questo caso si può applicare il teorema. La funzione h è definita in $]-1, 1]$ ma, a causa dell'arccos non è derivabile in $x = 1$; tuttavia anche in questo caso si può applicare il teorema perché la derivabilità agli estremi dell'intervallo di definizione non è necessaria.

$\boxed{8}$ a) Il dominio è individuato dagli x per cui $|x|^5 > 0$ e $x \neq 0$ (a causa del denominatore). Poiché per $x \neq 0$ vale $|x| > 0$ si ha quindi $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{0\}$. La funzione è ivi continua e derivabile. Per le proprietà dei logaritmi g può essere scritta anche nel seguente modo

$$g(x) = \frac{3 - 5\ln|x|}{x}.$$

Poiché il valore assoluto è funzione pari, allora f è funzione dispari, infatti per ogni $x \neq 0$ vale

$$g(-x) = \frac{3 - \ln|-x|^5}{-x} = -\frac{3 - \ln|x|^5}{x} = -g(x).$$

È quindi possibile studiare la funzione per $x > 0$, ottenendo il grafico per $x < 0$ grazie a una simmetria di centro l'origine. D'ora in avanti si supporrà quindi $x \in \mathcal{D}^+ =]0, +\infty[$, su cui vale $g(x) = \frac{3-5\ln x}{x}$.

Poiché il denominatore è sempre positivo nel dominio $\mathcal{D}^+$, si ha che $g(x) \geq 0$ se e solo se $3 - 5\ln x \geq 0$ ovvero $\ln x \leq 3/5$ cioè $x \leq \mathrm{e}^{3/5}$. In definitiva, restringendosi a $\mathcal{D}^+$

$$g(x) \begin{cases} > 0, & \text{se } x \in]0, \mathrm{e}^{3/5}[, \\ = 0, & \text{se } x = \mathrm{e}^{3/5}, \\ < 0, & \text{se } x \in]\mathrm{e}^{3/5}, +\infty[. \end{cases}$$

Per simmetria g è < 0 in $]-\mathrm{e}^{3/5}, 0[$, è > 0 in $]-\infty, -\mathrm{e}^{3/5}[$ e si annulla anche in $x = -\mathrm{e}^{3/5}$.

b) In $\mathcal{D}^+$ ha senso andare a studiare i limiti a $+\infty$ e in 0 da destra. Si ha

$$\lim_{x\to 0^+} g(x) = \left[\frac{+\infty}{0^+}\right] = +\infty, \qquad \lim_{x\to+\infty} g(x) = \left[\frac{-\infty}{+\infty}\right] \overset{H}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{-5/x}{1} = 0.$$

Simmetricamente si ha $\lim_{x\to 0^-} g(x) = -\infty$ e $\lim_{x\to-\infty} g(x) = 0$. Di conseguenza g ha un asintoto verticale di equazione $x = 0$ e uno orizzontale a $\pm\infty$, di equazione $y = 0$.

c) Calcoliamo la derivata prima:

$$g'(x) = \frac{-\frac{5}{x}x - (3 - 5\ln x)\cdot 1}{x^2} = \frac{5\ln x - 8}{x^2}.$$

In $\mathcal{D}^+$ la derivata è positiva quando $5\ln x - 8 \geq 0$ ovvero $\ln x \geq 8/5$ cioè $x \geq \mathrm{e}^{8/5}$. Quindi

$$g'(x)\begin{cases} < 0, & \text{se } x \in]0, \mathrm{e}^{8/5}[, \\ = 0, & \text{se } x = \mathrm{e}^{8/5}, \\ > 0, & \text{se } x \in]\mathrm{e}^{8/5}, +\infty[, \end{cases}$$

perciò la funzione è crescente in $]\mathrm{e}^{8/5}, +\infty[$, mentre è decrescente in $]0, \mathrm{e}^{8/5}[$. In $x = \mathrm{e}^{8/5}$ ammette un minimo relativo. Per simmetria g è crescente in $]-\infty, -\mathrm{e}^{8/5}[$, decrescente in $]-\mathrm{e}^{8/5}, 0[$ e si annulla anche in $x = -\mathrm{e}^{8/5}$ dove ammette un massimo relativo. Dal punto b) si vede subito che la funzione non possiede né massimo né minimo assoluti.

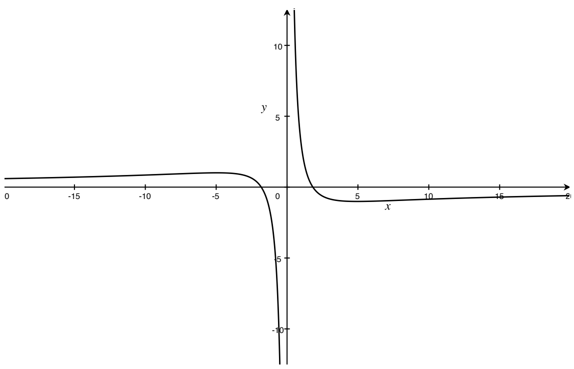
d) Calcoliamo la derivata seconda:

$$g''(x) = \frac{\frac{5}{x}x^2 - (5\ln x - 8)2x}{x^4} = \frac{21 - 10\ln x}{x^3}.$$

Il denominatore è positivo in $\mathcal{D}^+$, il numeratore è ≥ 0 quando $21 - 10\ln x \geq 0$ ovvero $\ln x \leq 21/10$ cioè $x \leq \mathrm{e}^{21/10}$. Quindi

$$g''(x)\begin{cases} > 0, & \text{se } x \in]0, \mathrm{e}^{21/10}[, \\ = 0, & \text{se } x = \mathrm{e}^{21/10}, \\ < 0, & \text{se } x \in]\mathrm{e}^{21/10}, +\infty[, \end{cases}$$

perciò la funzione è convessa in $]0, \mathrm{e}^{21/10}[$, mentre è concava in $]\mathrm{e}^{21/10}, +\infty[$. Simmetricamente, è anche concava in $]-\infty, -\mathrm{e}^{21/10}[$, convessa in $]-\mathrm{e}^{21/10}, 0[$.



f) L'equazione della retta tangente al grafico nel generico punto $(x_0, g(x_0))$ di derivabilità per la funzione è

$$y = (x - x_0)g'(x_0) + g(x_0).$$

Poiché $g(\mathrm{e}) = -2/\mathrm{e}$ e $g'(\mathrm{e}) = -3/\mathrm{e}^2$, la relativa tangente ha equazione $y = -\frac{3}{\mathrm{e}^2}(x - \mathrm{e}) - \frac{2}{\mathrm{e}}$. Per quanto riguarda la prima, si ha $g(-2) = (5\ln 2 - 3)/2$ e $g'(-2) = (5\ln 2 - 8)/4$ e la relativa tangente ha equazione $y = \frac{5\ln 2 - 8}{4}(x + 2) + \frac{5\ln 2 - 3}{2}$.

9 a) Si ha $y'(t) = -2\,\mathrm{sen}(2t)$. Sostituendo si ottiene

$$-2\,\mathrm{sen}(2t) = \big(1+\cos^2(2t)\big)\frac{t\,\mathrm{sen}(2t)}{\cos(2t)}$$

che non è identicamente soddisfatta (per esempio, per $t = \pi/8$ si ha $-\sqrt{2} \neq 3\pi/16$). La funzione non è dunque soluzione. Si osservi che la funzione soddisfa invece la seconda condizione $y(0) = 1$.

b) Scrivendo $y' = \frac{dy}{dt}$ e utilizzando il metodo di separazione delle variabili si ha

$$\frac{y}{1+y^2}\,dy = t\,\mathrm{sen}(2t)\,dt \qquad \Longrightarrow \qquad \int \frac{y}{1+y^2}\,dy = \int t\,\mathrm{sen}(2t)\,dt.$$

Dalla seconda tabella si ha

$$\int \frac{y}{1+y^2}\,dy = \frac{1}{2}\int \frac{(1+y^2)'}{1+y^2}\,dy = \frac{1}{2}\ln(1+y^2),$$

mentre integrando per parti si ottiene

$$\int t\,\mathrm{sen}(2t)\,dt = t\Big(-\frac{\cos(2t)}{2}\Big) + \int \frac{\cos(2t)}{2}\,dt = -t\frac{\cos(2t)}{2} + \frac{\mathrm{sen}(2t)}{4} + c,$$

da cui segue

$$\frac{1}{2}\ln(1+y^2) = -t\frac{\cos(2t)}{2} + \frac{\mathrm{sen}(2t)}{4} + c,$$

con c generica costante d'integrazione. Risolvendo in y si ottiene quindi

$$1+y^2 = \exp\Big(2c - t\cos(2t) + \frac{\mathrm{sen}(2t)}{2}\Big) \qquad \Longrightarrow \qquad y = \pm\sqrt{\exp\Big(2c - t\cos(2t) + \frac{\mathrm{sen}(2t)}{2}\Big) - 1}.$$

In quest'ultima si sceglie il segno + in quanto $y(0)$ è inizialmente positiva. Imponendo ora la condizione $y(0) = 1$ nella prima delle tre relazioni sopra si ottiene $\frac{\ln 2}{2} = c$. Una soluzione è quindi

$$y(t) = \sqrt{\exp\Big(\ln 2 - t\cos(2t) + \frac{\mathrm{sen}(2t)}{2}\Big) - 1} = \sqrt{2\exp\Big(-t\cos(2t) + \frac{\mathrm{sen}(2t)}{2}\Big) - 1}.$$

Alternativamente, si poteva utilizzare direttamente la formula risolutiva per le equazioni a variabili separabili (insieme alla formula fondamentale del calcolo integrale)

$$\int_1^y \frac{z}{1+z^2}\,dz = \int_0^t s\,\mathrm{sen}(2s)\,ds \qquad \Longrightarrow \qquad \Big[\frac{1}{2}\ln(1+z^2)\Big]_1^y = \Big[-s\frac{\cos(2s)}{2} + \frac{\mathrm{sen}(2s)}{4}\Big]_0^t$$

$$\Longrightarrow \qquad \frac{\ln(1+y^2)}{2} - \frac{\ln 2}{2} = -t\frac{\cos(2t)}{2} + \frac{\mathrm{sen}(2t)}{4},$$

che risolta rispetto a y fornisce la soluzione cercata.

b') Dalle tabelle si ottiene

$$\int \Big(\frac{(2^x)^3}{5^x} - \frac{\sqrt[4]{x}\,\sqrt[3]{x}}{x}\Big)\,dx = \int \Big(\frac{8}{3}\Big)^x dx - \int x^{-5/12}\,dx = \frac{(8/3)^x}{\ln(8/3)} - \frac{x^{7/12}}{7/12} + c,$$

con c costante arbitraria. Per il Teorema fondamentale del calcolo si ha (per parti)

$$\begin{aligned}
\int_0^\pi (x-2x^2)\cos(3x)\,dx &= \Big[(x-2x^2)\frac{\operatorname{sen}(3x)}{3}\Big]_0^\pi - \int_0^\pi (1-4x)\frac{\operatorname{sen}(3x)}{3}\,dx \\
&= (0-0) - \frac{1}{3}\int_0^\pi (1-4x)\operatorname{sen}(3x)\,dx \\
&= -\frac{1}{3}\Big\{\Big[(1-4x)\frac{-\cos(3x)}{3}\Big]_0^\pi - \int_0^\pi -4\frac{-\cos(3x)}{3}\,dx\Big\} \\
&= -\frac{1}{3}\Big(\frac{1-4\pi}{3}+\frac{1}{3}\Big) + \frac{4}{9}\int_0^\pi \cos(3x)\,dx = \frac{4\pi-2}{9} + \frac{4}{9}\Big[\frac{\operatorname{sen}(3x)}{3}\Big]_0^\pi = \frac{4\pi-2}{9}.
\end{aligned}$$

$\boxed{\mathbf{10}}$ Si ha

$$f'(x) = \frac{2x+3}{x^2+3x}, \qquad f''(x) = \frac{2(x^2+3x)-(2x+3)^2}{(x^2+3x)^2}$$

da cui $f(1) = \ln 4$, $f'(1) = 5/4$, $f''(1) = -17/16$ perciò il polinomio di Taylor cercato è

$$P(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x-x_0)^2 = \ln 4 + \frac{5}{4}(x-1) - \frac{17}{32}(x-1)^2.$$