Università degli Studi di Udine — Anno Accademico 2015/2016

Corso di Laurea in Biotecnologie

Modulo di Matematica

Esame del 01/02/2016

N.B.: scrivere nome, cognome e numero di matricola su ogni foglio consegnato.
Tempo a disposizione: 2.5 ore

---

1 Se $\lim_{x\to x_0} f(x) = -\infty$ e $\lim_{x\to x_0} g(x) = 0$, allora $\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$ è

A $-\infty$

B $+\infty$

C 0

D non ci sono elementi sufficienti per rispondere

---

2 Se f è una funzione derivabile in $]a,b[$ e tale che $f'(x)f''(x) < 0$ per $x \in]a,b[$, allora

A f è decrescente e concava

B f è decrescente e convessa oppure crescente e concava

C f è decrescente e concava oppure crescente e convessa

D non ci sono elementi sufficienti per rispondere

---

3 L'equazione differenziale $y' = 5t - t\ln y$ è

A un'equazione lineare del primo ordine

B un'equazione lineare del secondo ordine

C un'equazione non lineare del primo ordine

D un'equazione non lineare del secondo ordine

---

4 La funzione $f(x) = \sqrt[4]{x}$

A è definita per $x \in \mathbb{R}$

B è derivabile per $x \geq 0$

C è una funzione limitata per $x \geq 0$

D è crescente e concava per $x \geq 0$

---

5 Dare l'interpretazione geometrica della derivata di una funzione f in un punto x_0.

---

6 Rappresentare il grafico di una funzione g che verifichi contemporaneamente le seguenti proprietà:

$$\lim_{x\to-\infty} g(x) = +\infty \qquad \lim_{x\to 2^-} g(x) = 1 \qquad \lim_{x\to 2^+} g(x) = -\infty \qquad \lim_{x\to+\infty} g(x) = -2$$

7
a) Enunciare il Teorema di de L'Hôpital;
b) per ciascuno dei seguenti tre limiti

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(\cos x) - \operatorname{sen} x}{3x - \arccos x}, \qquad \lim_{x\to+\infty} \frac{x\ln x - x^2}{x\mathrm{e}^{-x} + \operatorname{arctg} x}, \qquad \lim_{x\to 0} \frac{2x^3 - \operatorname{tg}(x^2)}{\mathrm{e}^{3x^2} - \cos x},$$

determinare se è possibile applicare il teorema ed eventualmente calcolarne il valore.

---

8 Data la funzione

$$g(x) = \frac{x^2}{x+2}\mathrm{e}^{1/x}$$

a) determinarne il dominio $\mathcal{D}$ e studiarne il segno;
b) calcolare i limiti agli estremi del dominio;
c) determinare gli eventuali asintoti;
d) determinare gli intervalli in cui la funzione è crescente, quelli in cui è decrescente, e gli eventuali punti di massimo/minimo relativo;
e) determinare gli intervalli in cui la funzione è concava e quelli in cui è convessa;
f) determinare l'equazione della retta tangente al grafico nel punto di ascissa $x_0 = 1$;
g) disegnare un grafico approssimativo di g

---

9 Dato il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = \dfrac{ty\ln^2 y}{\sqrt{(3t^2+1)^3}} \\ y(0) = \mathrm{e} \end{cases}$$

a) dire se la funzione $y(t) = \mathrm{e}^{3t^2+1}$ è soluzione del problema;
b) determinare una soluzione del problema nel caso in cui non lo sia la funzione di cui al punto precedente; oppure, alternativamente
b') calcolare i seguenti integrali

$$\int \Big(\frac{2+x^2}{1+x^2} + \frac{x - 2\sqrt[3]{x}}{3x^2}\Big)\, dx, \qquad \int_0^{1/4} \frac{x}{\sqrt{(1-4x^2)^5}}\, dx.$$

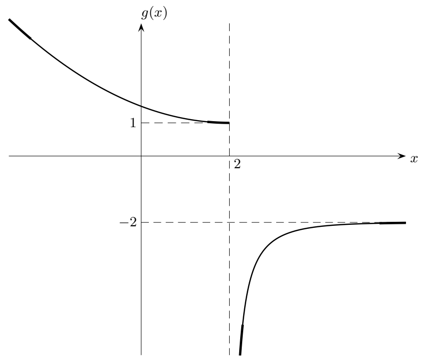
---

10 Calcolare il polinomio di Taylor di grado 2 di $f(x) = \frac{1}{\sqrt{3-2x}}$ nel punto $x_0 = 1$.

Soluzioni dei quesiti dell'esame del 1 febbraio 2016 - Tema A

1 D; **2** B; **3** C; **4** D; **5** consultare il libro di testo.

6 In neretto si evidenziano le informazioni date dai limiti. Il grafico della funzione è quindi completato a piacere (linea sottile), per esempio:



7 a) consultare il libro di testo; b) il primo limite è della forma $0/(-\pi/2)$; per quanto riguarda il secondo vale

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x\ln x - x^2}{xe^{-x} + \operatorname{arctg} x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2(\frac{\ln x}{x} - 1)}{\frac{x}{e^x} + \operatorname{arctg} x} = \left[\frac{+\infty(-1)}{0+\pi/2}\right] = \left[\frac{-\infty}{\pi/2}\right],$$

perciò ai primi due limiti non si può applicare il teorema. Il terzo è della forma $0/0$ e si ha

$$\lim_{x\to 0} \frac{2x^3 - \operatorname{tg}(x^2)}{e^{3x^2} - \cos x} \overset{H}{=} \lim_{x\to 0} \frac{6x^2 - (1+\operatorname{tg}^2(x^2))2x}{6xe^{3x^2} + \operatorname{sen} x} = \left[\frac{0}{0}\right]$$
$$\overset{H}{=} \lim_{x\to 0} \frac{12x - (1+\operatorname{tg}^2(x^2))2 - 2\operatorname{tg}(x^2)(1+\operatorname{tg}^2(x^2))(2x)^2}{(6+36x^2)e^{3x^2} + \cos x} = -\frac{2}{7}.$$

8 a) La funzione è definita per $x \neq 0$ e $x+2 \neq 0$ perciò il dominio è $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{-2, 0\}$; la funzione è ivi continua e derivabile. Inoltre g non è funzione né pari né dispari.

Le funzioni $e^{1/x}$ e x^2 sono sempre positive nel dominio, mentre il denominatore è positivo se $x > -2$, per cui la funzione è positiva per $-2 < x < 0$ e $x > 0$, negativa per $x < -2$ e non si annulla mai.

b) Ha senso andare a studiare solamente i limiti in -2, in 0 e a $\pm\infty$. Si ha

$$\lim_{x\to\pm\infty} g(x) = \lim_{x\to\pm\infty} x\frac{1}{1+2/x}e^{1/x} = \Big[\pm\infty \cdot 1 \cdot 1\Big] = \pm\infty,$$

$$\lim_{x\to(-2)^\pm} g(x) = \left[\frac{4e^{-1/2}}{0^\pm}\right] = \pm\infty, \qquad \lim_{x\to 0^-} g(x) = \Big[0 \cdot e^{-\infty}\Big] = 0 \cdot 0 = 0.$$

Mediante la sostituzione $y = 1/x$ il limite per $x \to 0^+$ diventa

$$\lim_{x\to 0^+} g(x) = \frac{1}{2}\lim_{x\to 0^+} x^2 e^{1/x} = \frac{1}{2}\lim_{x\to 0^+} \frac{e^{1/x}}{1/x^2} = \frac{1}{2}\lim_{y\to+\infty} \frac{e^y}{y^2} = +\infty,$$

avendo utilizzato il fatto che $\lim_{y\to+\infty} e^y/y^p = +\infty$ per ogni $p > 0$ (limite fondamentale).

c) Dal punto b) le rette $x = 0$ e $x = -2$ sono asintoti verticali. Per quanto riguarda quelli obliqui, vale

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{g(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x}{x+2}e^{1/x} = 1 \cdot 1 = 1,$$

$$\lim_{x\to\pm\infty} (g(x) - x) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2(e^{1/x} - 1) - 2x}{x+2} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x}{x+2} \cdot \frac{e^{1/x} - 1}{1/x} - \frac{2x}{x+2} = 1 \cdot 1 - 2 = -1,$$

per cui la retta di equazione $y = x - 1$ è un asintoto a $\pm\infty$.

d) La derivata prima è

$$
\begin{aligned}
g'(x) &= \frac{(x^2 e^{1/x})'(x+2) - x^2 e^{1/x}(x+2)'}{(x+2)^2} = \frac{\big(2x e^{1/x} + x^2 e^{1/x}(-\frac{1}{x^2})\big)(x+2) - x^2 e^{1/x}}{(x+2)^2} \\
&= \frac{(2x-1)(x+2) - x^2}{(x+2)^2} e^{1/x} = \frac{x^2+3x-2}{(x+2)^2} e^{1/x}.
\end{aligned}
$$

Alternativamente si poteva calcolare come segue:

$$
\begin{aligned}
g'(x) &= \frac{2x(x+2) - x^2}{(x+2)^2} e^{1/x} + \frac{x^2}{x+2} e^{1/x}\Big(-\frac{1}{x^2}\Big) \\
&= \Big(\frac{x^2+4x}{(x+2)^2} - \frac{1}{x+2}\Big) e^{1/x} = \frac{x^2+3x-2}{(x+2)^2} e^{1/x}.
\end{aligned}
$$

Il denominatore e la funzione $e^{1/x}$ sono sempre positive, per cui la derivata prima è maggiore o uguale a zero se e solo se $x^2+3x-2 \geq 0$ cioè se $x \leq \frac{-3-\sqrt{17}}{2}$ oppure $x \geq \frac{-3+\sqrt{17}}{2}$, quindi, tenendo conto anche del dominio,

$$
g'(x) \begin{cases} < 0, & \text{se } x \in]\frac{-3-\sqrt{17}}{2}, -2[\cup]-2, 0[\cup]0, \frac{-3+\sqrt{17}}{2}[, \\ = 0, & \text{se } x = \frac{-3\pm\sqrt{17}}{2}, \\ > 0, & \text{se } x \in]-\infty, \frac{-3-\sqrt{17}}{2}[\cup]\frac{-3+\sqrt{17}}{2}, +\infty[. \end{cases}
$$

In definitiva la funzione è crescente in $]-\infty, \frac{-3-\sqrt{17}}{2}[$ e in $]\frac{-3+\sqrt{17}}{2}, +\infty[$, mentre è decrescente in $]\frac{-3-\sqrt{17}}{2}, -2[$, in $]-2, 0[$ e in $]0, \frac{-3+\sqrt{17}}{2}[$. In $x = \frac{-3-\sqrt{17}}{2}$ e $x = \frac{-3+\sqrt{17}}{2}$ ammette, rispettivamente, un massimo e un minimo relativo. Poiché la funzione ha alcuni limiti uguali a $\pm\infty$ non ammette massimo e minimo assoluti.

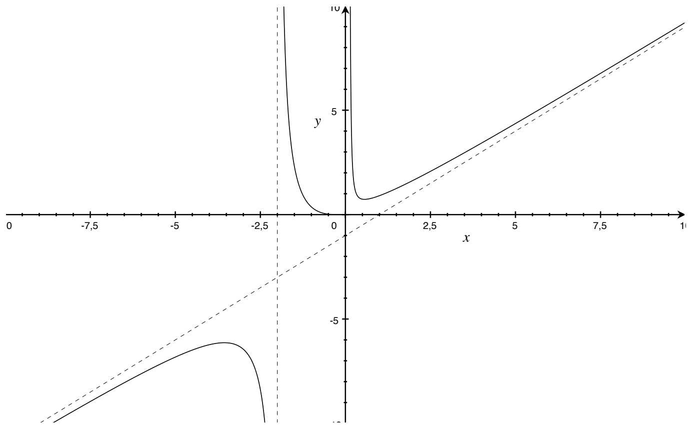
e) La derivata seconda è

$$
\begin{aligned}
g''(x) &= \frac{(2x+3)(x+2)^2 - (x^2+3x-2)2(x+2)}{(x+2)^4} e^{1/x} + \frac{x^2+3x-2}{(x+2)^2} e^{1/x}\Big(-\frac{1}{x^2}\Big) \\
&= \Big(\frac{(2x+3)(x+2) - 2(x^2+3x-2)}{(x+2)^3} - \frac{x^2+3x-2}{x^2(x+2)^2}\Big) e^{1/x} \\
&= \Big(\frac{x+10}{(x+2)^3} - \frac{x^2+3x-2}{x^2(x+2)^2}\Big) e^{1/x} = \frac{x^2(x+10) - (x^2+3x-2)(x+2)}{x^2(x+2)^3} e^{1/x} \\
&= \frac{x^3+10x^2 - (x^3+3x^2-2x+2x^2+6x-4)}{x^2(x+2)^3} e^{1/x} = \frac{5x^2-4x+4}{x^2(x+2)^3} e^{1/x}.
\end{aligned}
$$

Poiché il polinomio $5x^2-4x+4$ è sempre positivo (il discriminante dell'equazione di secondo grado associata è negativo), la derivata seconda è positiva se e solo se $(x+2)^3 > 0$ cioè $x+2 > 0$. In definitiva

$$
g''(x) \begin{cases} < 0, & \text{se } x \in]-\infty, -2[, \\ > 0, & \text{se } x \in]-2, 0[\cup]0, +\infty[, \end{cases}
$$

perciò la funzione è concava in $]-\infty, -2[$, mentre è convessa in $]-2, 0[$ e in $]0, +\infty[$.



f) L'equazione della retta tangente al grafico nel generico punto $(x_0, g(x_0))$ è

$$y = (x - x_0)g'(x_0) + g(x_0).$$

Poiché $g(1) = \mathrm{e}/3$ e $g'(1) = 2\mathrm{e}/9$, l'equazione della retta cercata è

$$y = \frac{2\mathrm{e}}{9}(x-1) + \frac{\mathrm{e}}{3}.$$

$\boxed{9}$ a) Si ha $y'(t) = 6t\mathrm{e}^{3t^2+1}$. Sostituendo si ottiene l'equazione

$$6t\mathrm{e}^{3t^2+1} = \frac{t\mathrm{e}^{3t^2+1}\ln^2 \mathrm{e}^{3t^2+1}}{\sqrt{(3t^2+1)^3}} = \frac{t(3t^2+1)^2\mathrm{e}^{3t^2+1}}{\sqrt{(3t^2+1)^3}} = t\sqrt{3t^2+1}\mathrm{e}^{3t^2+1}$$

che non è identicamente soddisfatta (per esempio, per $t = 1$ si ottiene $6\mathrm{e}^4 \neq 2\mathrm{e}^4$). La funzione non è dunque soluzione. Si osservi che la funzione soddisfa invece la seconda condizione $y(0) = \mathrm{e}$.

b) Scrivendo $y' = \frac{dy}{dt}$ e utilizzando il metodo di separazione delle variabili si ha

$$\frac{1}{y\ln^2 y}\,dy = \frac{t}{\sqrt{(3t^2+1)^3}}\,dt \quad \Longrightarrow \quad \int \frac{1}{y\ln^2 y}\,dy = \int \frac{t}{\sqrt{(3t^2+1)^3}}\,dt.$$

Dalla seconda tabella si ha

$$\int \frac{1}{y\ln^2 y}\,dy = \int (\ln y)'(\ln y)^{-2}\,dy = \frac{(\ln y)^{-1}}{-1} = -\frac{1}{\ln y},$$

$$\int \frac{t}{\sqrt{(3t^2+1)^3}}\,dt = \frac{1}{6}\int (3t^2+1)'(3t^2+1)^{-3/2}\,dt = \frac{1}{6}\frac{(3t^2+1)^{-1/2}}{-1/2} + c,$$

da cui segue

$$-\frac{1}{\ln y} = -\frac{1}{3\sqrt{3t^2+1}} + c = -\frac{1 - 3c\sqrt{3t^2+1}}{3\sqrt{3t^2+1}},$$

con c generica costante d'integrazione. Risolvendo in y si ottiene quindi

$$\ln y = \frac{3\sqrt{3t^2+1}}{1 - 3c\sqrt{3t^2+1}} \quad \Longrightarrow \quad y = \exp\left[\frac{3\sqrt{3t^2+1}}{1 - 3c\sqrt{3t^2+1}}\right].$$

Imponendo la condizione $y(0) = \mathrm{e}$ nella prima delle relazioni sopra si ottiene $1 = \frac{3}{1-3c}$, da cui si ricava $c = -2/3$. Una soluzione è quindi

$$y(t) = \exp\left[\frac{3\sqrt{3t^2+1}}{1 + 2\sqrt{3t^2+1}}\right].$$

Alternativamente, si poteva utilizzare direttamente la formula risolutiva per le equazioni a variabili separabili (insieme alla formula fondamentale del calcolo integrale)

$$\int_{\mathrm{e}}^{y} \frac{1}{z\ln^2 z}\,dz = \int_0^t \frac{s}{\sqrt{(3s^2+1)^3}}\,ds \quad\Longrightarrow\quad \Big[-\frac{1}{\ln z}\Big]_{\mathrm{e}}^{y} = \Big[-\frac{1}{3\sqrt{3s^2+1}}\Big]_0^t$$
$$\Longrightarrow\quad 1-\frac{1}{\ln y} = \frac{1}{3} - \frac{1}{3\sqrt{3t^2+1}},$$

che risolta rispetto a y fornisce la soluzione cercata.

b') Dalle tabelle si ottiene

$$\begin{aligned}\int \Big(\frac{2+x^2}{1+x^2} + \frac{x-2\sqrt[3]{x}}{3x^2}\Big)\,dx &= \int \Big(1+\frac{1}{1+x^2}\Big)\,dx + \frac{1}{3}\int \frac{1}{x}\,dx - \frac{2}{3}\int x^{-5/3}\,dx \\ &= x + \operatorname{arctg} x + \frac{1}{3}\ln|x| - \frac{2}{3}\cdot\frac{x^{-2/3}}{-2/3} + c \\ &= x + \operatorname{arctg} x + \frac{1}{3}\ln|x| + \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} + c,\end{aligned}$$

con c costante arbitraria. Per il Teorema fondamentale del calcolo si ha

$$\begin{aligned}\int_0^{1/4} \frac{x}{\sqrt{(1-4x^2)^5}}\,dx &= -\frac{1}{8}\int_0^{1/4} (1-4x^2)'(1-4x^2)^{-5/2}\,dx \\ &= -\frac{1}{8}\Big[\frac{(1-4x^2)^{-3/2}}{-3/2}\Big]_0^{1/4} = \frac{1}{12}\Big(\frac{1}{\sqrt{(3/4)^3}} - 1\Big) = \frac{1}{12}\Big(\frac{8}{3\sqrt{3}} - 1\Big).\end{aligned}$$

10 Essendo $f(x) = (3-2x)^{-1/2}$, si ha $f'(x) = -\frac{1}{2}(3-2x)^{-3/2}(-2) = (3-2x)^{-3/2}$ e $f''(x) = -\frac{3}{2}(3-2x)^{-5/2}(-2) = 3(3-2x)^{-5/2}$ da cui $f(1) = 1$, $f'(1) = 1$, $f''(1) = 3$ perciò il polinomio di Taylor cercato è

$$P(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x-x_0)^2 = 1 + (x-1) + \frac{3}{2}(x-1)^2.$$

Appello del 1 febbraio 2016 - Tema B

N.B.: scrivere nome, cognome e numero di matricola su ogni foglio consegnato.
Tempo a disposizione: 2.5 ore

---

1 Se $\lim_{x\to x_0} f(x) = 0^+$ e $\lim_{x\to x_0} g(x) = -\infty$, allora $\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$ è

- A $-\infty$
- B $+\infty$
- C 0
- D non ci sono elementi sufficienti per rispondere

---

2 Se f è una funzione derivabile in $]a,b[$ e tale che $f'(x)f''(x) > 0$ per $x \in]a,b[$, allora

- A f è crescente e convessa

B f è decrescente e concava oppure crescente e convessa

C f è decrescente e convessa oppure crescente e concava

D non ci sono elementi sufficienti per rispondere

---

3 L'equazione differenziale $y'' = y\,\mathrm{arctg}(t^3) - \frac{5y'}{3+t^2}$ è

A un'equazione lineare del primo ordine

B un'equazione lineare del secondo ordine

C un'equazione non lineare del primo ordine

D un'equazione non lineare del secondo ordine

---

4 La funzione $f(x) = \mathrm{arctg}\, x$

A è definita per $x \neq \pi/2 + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$

B ha limite infinito per $x \to +\infty$

C è limitata

D è dispari e periodica di periodo π

---

5 Scrivere la definizione di primitiva di una funzione f in un insieme I.

---

6 Rappresentare il grafico di una funzione g che verifichi contemporaneamente le seguenti proprietà:

$$\lim_{x\to-\infty} g(x) = 2 \qquad \lim_{x\to 1^-} g(x) = -\infty \qquad \lim_{x\to 1^+} g(x) = -1 \qquad \lim_{x\to+\infty} g(x) = -\infty$$

7
a) Enunciare il Teorema del valore medio di Lagrange;
b) determinare, argomentando, a quali tra le funzioni $f(x) = x|x-4|$, $g(x) = x - \sqrt[5]{x}$, $h(x) = \frac{1-3x}{2+5x+2x^2}$ è possibile applicare il teorema nell'intervallo $[-1, 1]$.

---

8 Data la funzione

$$g(x) = \frac{x^2}{1-x}\mathrm{e}^{1/x}$$

a) determinarne il dominio $\mathcal{D}$ e studiarne il segno;
b) calcolare i limiti agli estremi del dominio;
c) determinare gli eventuali asintoti;
d) determinare gli intervalli in cui la funzione è crescente, quelli in cui è decrescente, e gli eventuali punti di massimo/minimo relativo;
e) determinare gli intervalli in cui la funzione è concava e quelli in cui è convessa;
f) determinare l'equazione della retta tangente al grafico nel punto di ascissa $x_0 = -1$;
g) disegnare un grafico approssimativo di g

---

9 Dato il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = \dfrac{ty\ln^2 y}{\sqrt{(2t^2+3)^5}} \\ y(0) = \mathrm{e}^3 \end{cases}$$

a) dire se la funzione $y(t) = \mathrm{e}^{2t^2+3}$ è soluzione del problema;

b) determinare una soluzione del problema nel caso in cui non lo sia la funzione di cui al punto precedente; oppure, alternativamente

b') calcolare i seguenti integrali

$$\int \Big(3\frac{x^2+5}{x^2+1} + \frac{3\sqrt[4]{x} - 2x^3}{5x^4}\Big)\,dx, \qquad \int_1^2 \frac{x}{\sqrt{(2x^2-1)^3}}\,dx.$$

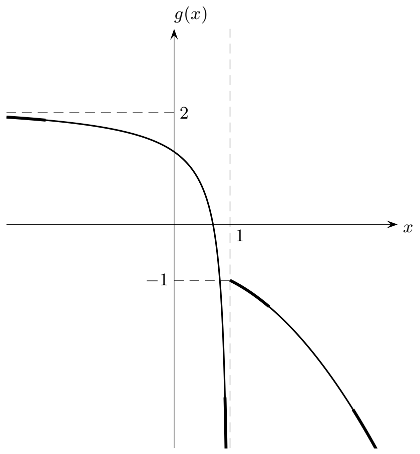
---

10 Calcolare il polinomio di Taylor di grado 2 di $f(x) = \frac{1}{\sqrt{6+5x}}$ nel punto $x_0 = 2$.

Soluzioni dei quesiti dell'esame del 1 febbraio 2016 - Tema B

1 C; **2** B; **3** B; **4** C; **5** consultare il libro di testo.

6 In neretto si evidenziano le informazioni date dai limiti. Il grafico della funzione è quindi completato a piacere (linea sottile), per esempio:



7 a) consultare il libro di testo; b) la funzione $f(x)$ è continua e derivabile in tutti i punti tranne che in $x = 4$ che non appartiene a $[-1,1]$, perciò in questo caso si può applicare il teorema. La funzione h non è definita in $x = -1/2 \in]-1,1[$ mentre $g(x)$ è continua nell'intervallo ma non è derivabile in $x = 0$. In conclusione, alle altre due funzioni il teorema non si applica.

8 a) La funzione è definita per $x \neq 0$ e $1 - x \neq 0$ perciò il dominio è $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{0,1\}$; la funzione è ivi continua e derivabile. Inoltre g non è funzione né pari né dispari.

Le funzioni $\mathrm{e}^{1/x}$ e x^2 sono sempre positive nel dominio, mentre il denominatore è positivo se $x < 1$, per cui $g(x)$ è positiva per $x < 0$ e $0 < x < 1$, negativa per $x > 1$ e non si annulla mai.

b) Ha senso andare a studiare solamente i limiti in 1, in 0 e a $\pm\infty$. Si ha

$$\lim_{x\to\pm\infty} g(x) = \lim_{x\to\pm\infty} x\frac{1}{-1+1/x}\mathrm{e}^{1/x} = \Big[\pm\infty\cdot(-1)\cdot 1\Big] = \mp\infty,$$

$$\lim_{x\to 1^\pm} g(x) = \left[\frac{\mathrm{e}}{0^\mp}\right] = \mp\infty, \qquad \lim_{x\to 0^-} g(x) = \left[0\cdot \mathrm{e}^{-\infty}\right] = 0\cdot 0 = 0.$$

Mediante la sostituzione $y = 1/x$ il limite per $x \to 0^+$ diventa

$$\lim_{x\to 0^+} g(x) = \lim_{x\to 0^+} x^2 \mathrm{e}^{1/x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\mathrm{e}^{1/x}}{1/x^2} = \lim_{y\to +\infty} \frac{\mathrm{e}^y}{y^2} = +\infty,$$

avendo utilizzato il fatto che $\lim_{y\to+\infty} \mathrm{e}^y/y^p = +\infty$ per ogni $p > 0$ (limite fondamentale).

c) Dal punto b), le rette $x = 0$ e $x = 1$ sono asintoti verticali. Per quanto riguarda quelli obliqui, vale

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{g(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x}{1-x}\mathrm{e}^{1/x} = (-1)\cdot 1 = -1 =: m,$$

$$\lim_{x\to\pm\infty} (g(x)+x) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2(\mathrm{e}^{1/x}-1)+x}{1-x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x}{1-x}\left(\frac{\mathrm{e}^{1/x}-1}{1/x}+1\right) = -1\cdot(1+1) = -2,$$

per cui la retta di equazione $y = -x-2$ è un asintoto a $\pm\infty$.

d) La derivata prima è

$$\begin{aligned} g'(x) &= \frac{(x^2\mathrm{e}^{1/x})'(1-x) - x^2\mathrm{e}^{1/x}(1-x)'}{(1-x)^2} = \frac{\big(2x\mathrm{e}^{1/x} + x^2\mathrm{e}^{1/x}(-\frac{1}{x^2})\big)(1-x) + x^2\mathrm{e}^{1/x}}{(x-1)^2} \\ &= \frac{(2x-1)(1-x)+x^2}{(x-1)^2}\mathrm{e}^{1/x} = \frac{-x^2+3x-1}{(x-1)^2}\mathrm{e}^{1/x}. \end{aligned}$$

Alternativamente si poteva calcolare come segue:

$$\begin{aligned} g'(x) &= \frac{2x(1-x)-x^2(-1)}{(1-x)^2}\mathrm{e}^{1/x} + \frac{x^2}{1-x}\mathrm{e}^{1/x}\Big(-\frac{1}{x^2}\Big) \\ &= \left(\frac{-x^2+2x}{(x-1)^2} + \frac{1}{x-1}\right)\mathrm{e}^{1/x} = \frac{-x^2+3x-1}{(x-1)^2}\mathrm{e}^{1/x}. \end{aligned}$$

Il denominatore e la funzione $\mathrm{e}^{1/x}$ sono sempre positive, per cui la derivata prima è maggiore o uguale a zero se e solo se $-x^2+3x-1 \geq 0$, ovvero $x^2-3x+1 \leq 0$, cioè se $\frac{3-\sqrt{5}}{2} \leq x \leq \frac{3+\sqrt{5}}{2}$, quindi, tenendo conto anche del dominio,

$$g'(x) \begin{cases} < 0, & \text{se } x \in]-\infty, 0[\cup]0, \frac{3-\sqrt{5}}{2}[\cup]\frac{3+\sqrt{5}}{2}, +\infty[, \\ = 0, & \text{se } x = \frac{3\pm\sqrt{5}}{2}, \\ > 0, & \text{se } x \in]\frac{3-\sqrt{5}}{2}, 1[\cup]1, \frac{3+\sqrt{5}}{2}[. \end{cases}$$

In definitiva la funzione è crescente in $]\frac{3-\sqrt{5}}{2}, 1[$ e in $]1, \frac{3+\sqrt{5}}{2}[$, mentre è decrescente in $]-\infty, 0[$, in $]0, \frac{3-\sqrt{5}}{2}[$ e in $]\frac{3+\sqrt{5}}{2}, +\infty[$. In $x = \frac{3+\sqrt{5}}{2}$ e $x = \frac{3-\sqrt{5}}{2}$ ammette, rispettivamente, un massimo e un minimo relativo. Poiché la funzione ha alcuni limiti uguali a $\pm\infty$ non ammette massimo e minimo assoluti.

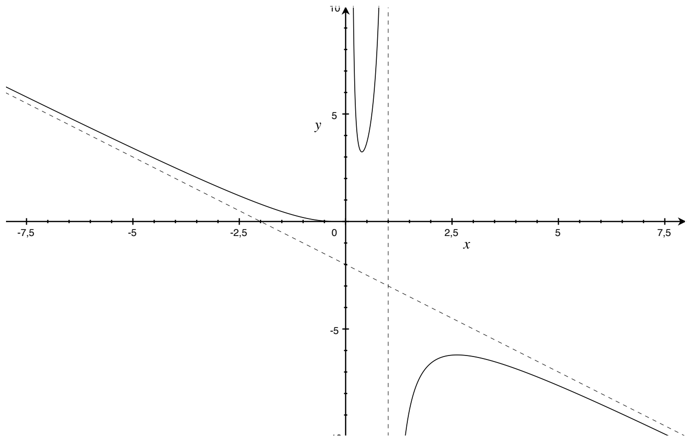
e) La derivata seconda è

$$\begin{aligned} g''(x) &= \frac{(-2x+3)(x-1)^2 - (-x^2+3x-1)2(x-1)}{(x-1)^4}\mathrm{e}^{1/x} + \frac{-x^2+3x-1}{(x-1)^2}\mathrm{e}^{1/x}\Big(-\frac{1}{x^2}\Big) \\ &= \left(\frac{(-2x+3)(x-1) - 2(-x^2+3x-1)}{(x-1)^3} + \frac{x^2-3x+1}{x^2(x-1)^2}\right)\mathrm{e}^{1/x} \\ &= \left(\frac{-(x+1)}{(x-1)^3} + \frac{x^2-3x+1}{x^2(x-1)^2}\right)\mathrm{e}^{1/x} = \frac{-x^2(x+1) + (x^2-3x+1)(x-1)}{x^2(x-1)^3}\mathrm{e}^{1/x} \\ &= \frac{-x^3-x^2+(x^3-3x^2+x-x^2+3x-1)}{x^2(x-1)^3}\mathrm{e}^{1/x} = \frac{5x^2-4x+1}{x^2(1-x)^3}\mathrm{e}^{1/x}. \end{aligned}$$

Poiché il polinomio $5x^2 - 4x + 1$ è sempre positivo (il discriminante dell'equazione di secondo grado associata è negativo), la derivata seconda è positiva se e solo se $(1 - x)^3 > 0$ cioè $1 - x > 0$. In definitiva

$$g''(x) \begin{cases} > 0, & \text{se } x \in]-\infty, 0[\cup]0, 1[, \\ < 0, & \text{se } x \in]1, +\infty[, \end{cases}$$

perciò la funzione è convessa in $]-\infty, 0[$ e in $]0, 1[$, mentre è concava in $]1, +\infty[$.



f) L'equazione della retta tangente al grafico nel generico punto $(x_0, g(x_0))$ è

$$y = (x - x_0)g'(x_0) + g(x_0).$$

Poiché $g(-1) = \mathrm{e}^{-1}/2$ e $g'(-1) = -5\mathrm{e}^{-1}/4$, l'equazione della retta cercata è

$$y = -\frac{5}{4\mathrm{e}}(x + 1) + \frac{1}{2\mathrm{e}}.$$

$\boxed{\mathbf{9}}$ a) Si ha $y'(t) = 4t\mathrm{e}^{2t^2+3}$. Sostituendo si ottiene l'equazione

$$4t\mathrm{e}^{2t^2+3} = \frac{t\mathrm{e}^{2t^2+3} \ln^2 \mathrm{e}^{2t^2+3}}{\sqrt{(2t^2 + 3)^5}} = \frac{t(2t^2 + 3)^2 \mathrm{e}^{2t^2+3}}{\sqrt{(2t^2 + 3)^5}} = \frac{t\mathrm{e}^{2t^2+3}}{\sqrt{2t^2 + 3}}$$

che non è identicamente soddisfatta (per esempio, per $t = 1$ si ottiene $4\mathrm{e}^5 \neq \mathrm{e}^5/\sqrt{5}$). La funzione non è dunque soluzione. Si osservi che la funzione soddisfa invece la seconda condizione $y(0) = \mathrm{e}^3$.
b) Scrivendo $y' = \frac{dy}{dt}$ e utilizzando il metodo di separazione delle variabili si ha

$$\frac{1}{y \ln^2 y}\, dy = \frac{t}{\sqrt{(2t^2 + 3)^5}}\, dt \quad \Longrightarrow \quad \int \frac{1}{y \ln^2 y}\, dy = \int \frac{t}{\sqrt{(2t^2 + 3)^5}}\, dt.$$

Dalla seconda tabella si ha

$$\int \frac{1}{y \ln^2 y}\, dy = \int (\ln y)'(\ln y)^{-2}\, dy = \frac{(\ln y)^{-1}}{-1} = -\frac{1}{\ln y},$$

$$\int \frac{t}{\sqrt{(2t^2 + 3)^5}}\, dt = \frac{1}{4} \int (2t^2 + 3)'(2t^2 + 3)^{-5/2}\, dt = \frac{1}{4} \frac{(2t^2 + 3)^{-3/2}}{-3/2} + c,$$

da cui segue

$$-\frac{1}{\ln y} = -\frac{1}{6\sqrt{(2t^2 + 3)^3}} + c = -\frac{1 - 6c\sqrt{(2t^2 + 3)^3}}{6\sqrt{(2t^2 + 3)^3}},$$

con c generica costante d'integrazione. Risolvendo in y si ottiene quindi

$$\ln y = \frac{6\sqrt{(2t^2+3)^3}}{1-6c\sqrt{(2t^2+3)^3}} \qquad \Longrightarrow \qquad y = \exp\left[\frac{6\sqrt{(2t^2+3)^3}}{1-6c\sqrt{(2t^2+3)^3}}\right].$$

Imponendo la condizione $y(0) = \mathrm{e}^3$ nella prima delle relazioni sopra si ottiene $3 = \frac{6\sqrt{27}}{1-6c\sqrt{27}}$, da cui si ricava $c = (1-6\sqrt{3})/(18\sqrt{3})$. Una soluzione è quindi

$$y = \exp\left[\frac{6\sqrt{(2t^2+3)^3}}{1+\frac{6\sqrt{3}-1}{3\sqrt{3}}\sqrt{(2t^2+3)^3}}\right].$$

Alternativamente, si poteva utilizzare direttamente la formula risolutiva per le equazioni a variabili separabili (insieme alla formula fondamentale del calcolo integrale)

$$\int_{\mathrm{e}^3}^{y} \frac{1}{z\ln^2 z}\,dz = \int_0^t \frac{s}{\sqrt{(2s^2+3)^5}}\,ds \qquad \Longrightarrow \qquad \Big[-\frac{1}{\ln z}\Big]_{\mathrm{e}^3}^{y} = \Big[-\frac{1}{6\sqrt{(2s^2+3)^3}}\Big]_0^t$$

$$\Longrightarrow \qquad \frac{1}{3} - \frac{1}{\ln y} = \frac{1}{18\sqrt{3}} - \frac{1}{6\sqrt{(2t^2+3)^3}},$$

che risolta rispetto a y fornisce la soluzione cercata.

b') Dalle tabelle si ottiene

$$\begin{aligned}\int \Big(3\frac{x^2+5}{x^2+1} + \frac{3\sqrt[4]{x}-2x^3}{5x^4}\Big)\,dx &= \int \Big(3+\frac{12}{x^2+1}\Big)\,dx + \frac{3}{5}\int x^{-15/4}\,dx - \frac{2}{5}\int \frac{1}{x}\,dx \\ &= 3x + 12\,\mathrm{arctg}\,x + \frac{3}{5}\cdot\frac{x^{-11/4}}{-11/4} - \frac{2}{5}\ln|x| + c \\ &= 3x + 12\,\mathrm{arctg}\,x - \frac{12}{55x^2\sqrt[4]{x^3}} - \frac{2}{5}\ln|x| + c,\end{aligned}$$

con c costante arbitraria. Per il Teorema fondamentale del calcolo si ha

$$\begin{aligned}\int_1^2 \frac{x}{\sqrt{(2x^2-1)^3}}\,dx &= \frac{1}{4}\int_1^2 (2x^2-1)'(2x^2-1)^{-3/2}\,dx \\ &= \frac{1}{4}\Big[\frac{(2x^2-1)^{-1/2}}{-1/2}\Big]_1^2 = \frac{1}{4}\Big(-\frac{2}{\sqrt{7}}+2\Big) = \frac{\sqrt{7}-1}{2\sqrt{7}}.\end{aligned}$$

10 Essendo $f(x) = (6+5x)^{-1/2}$, si ha $f'(x) = -\frac{1}{2}(6+5x)^{-3/2}5 = -\frac{5}{2}(6+5x)^{-3/2}$ e $f''(x) = \frac{15}{4}(6+5x)^{-5/2}5 = \frac{75}{4}(6+5x)^{-5/2}$ da cui $f(2) = 1/4$, $f'(2) = -10/4^4$, $f''(2) = 75/4^6$ perciò il polinomio di Taylor cercato è

$$P(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x-x_0)^2 = \frac{1}{4} - \frac{10}{4^4}(x-2) + \frac{75}{2\cdot 4^6}(x-2)^2.$$

Appello del 15 febbraio 2016 - Tema A

N.B.: scrivere nome, cognome e numero di matricola su ogni foglio consegnato.
Tempo a disposizione: 2.5 ore

---

1 Se $\lim_{x\to x_0} f(x) = -\infty$ e $\lim_{x\to x_0} g(x) = +\infty$, allora $\lim_{x\to x_0} f(x) - g(x)$ è

A $-\infty$

B $+\infty$

C 0

D non ci sono elementi sufficienti per rispondere

---

2 Se f è una funzione derivabile due volte in $]a, b[$ e tale che $f'(x_0) = 0$ con $x_0 \in]a, b[$ e $f''(x) < 0$ per ogni $x \in]a, b[$, allora

A x_0 è punto di minimo relativo ma non necessariamente assoluto per f in $]a, b[$

B x_0 è punto di massimo relativo ma non necessariamente assoluto per f in $]a, b[$

C x_0 è punto di minimo assoluto per f in $]a, b[$

D x_0 è punto di massimo assoluto per f in $]a, b[$

---

3 L'equazione differenziale $y'' = t \operatorname{sen} y - 5y'$ è

A un'equazione lineare del primo ordine

B un'equazione lineare del secondo ordine

C un'equazione non lineare del primo ordine

D un'equazione non lineare del secondo ordine

---

4 La funzione $f(x) = \arccos x$

A è definita per $x \in [0, \pi]$

B è derivabile nel suo dominio

C è una funzione dispari

D è integrabile in $[-1, 1/2]$

---

5 Dare la definizione di continuità di una funzione f in un punto x_0.

---

6 Rappresentare il grafico di una funzione g che verifichi contemporaneamente le seguenti proprietà:

$$\lim_{x\to-\infty} g(x) = +\infty \qquad \lim_{x\to 1^-} g(x) = -1 \qquad \lim_{x\to 1^+} g(x) = -\infty \qquad \lim_{x\to+\infty} g(x) = 0$$

---

7 a) Enunciare il teorema fondamentale del calcolo integrale;

b) per quali delle tre funzioni

$$f(x) = \sqrt{|x+2|}, \qquad g(x) = \begin{cases} \frac{\operatorname{sen}(3x)}{x} & \text{se } x \neq 0 \\ 3 & \text{se } x = 0, \end{cases} \qquad h(x) = \begin{cases} x\ln|x| & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

è possibile applicare il teorema nell'intervallo $[-2, 2]$?

---

8 Data la funzione

$$g(x) = \sqrt[3]{6x^2 - x^3}$$

a) determinare il dominio $\mathcal{D}$ e il segno di g. Calcolare i limiti agli estremi del dominio;

b) studiare in quali punti la funzione è continua e in quali derivabile;

c) trovare gli eventuali asintoti;

d) determinare gli intervalli in cui la funzione è crescente, quelli in cui è decrescente, e gli eventuali punti di massimo/minimo relativo e/o assoluto;

e) calcolare il comportamento di g' negli eventuali punti di non derivabilità;

f) determinare gli intervalli in cui la funzione è concava e quelli in cui è convessa;

g) trovare l'equazione della retta tangente al grafico nel punti $x_0 = 3$ e $x_0 = 6$;

h) disegnare un grafico approssimativo di g.

---

9 Dato il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = \dfrac{t\mathrm{e}^{-2t}}{y\sqrt{2+y^2}} \\ y(0) = \sqrt{2} \end{cases}$$

a) dire se la funzione $y(t) = \sqrt{2}(2t+1)\mathrm{e}^{-2t}$ è soluzione del problema;

b) determinare una soluzione del problema nel caso in cui non lo sia la funzione di cui al punto precedente; oppure, alternativamente

b') calcolare i seguenti integrali

$$\int \left(\frac{4\operatorname{sen}^2 x + 3\cos^2 x}{\operatorname{sen}^2 x} + \left(\sqrt{x} + \frac{1}{x}\right)^2\right) dx \qquad \int_1^{\mathrm{e}} \ln^2 y \, dy.$$

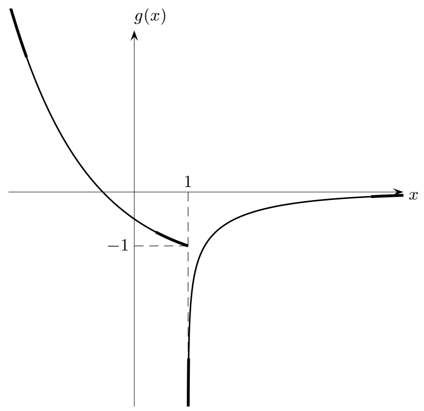
---

10 Calcolare il polinomio di Taylor di grado 2 di $f(x) = \cos(\pi \mathrm{e}^{2x})$ nel punto $x_0 = 0$.

Soluzioni dei quesiti dell'esame del 15 febbraio 2016 - Tema A

1 A; **2** D; **3** D; **4** D; **5** consultare il libro di testo.

6 In neretto si evidenziano le informazioni date dai limiti. Il grafico della funzione è quindi completato a piacere (linea sottile), per esempio:



7 a) consultare il libro di testo; b) tutte le funzioni sono definite in $[-2, 2]$. f è continua dunque si può applicare il teorema. g e h sono banalmente continue per $x \neq 0$. Poiché

$$\lim_{x\to 0} g(x) = \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}(3x)}{x} = 3 \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}(3x)}{3x} = 3 \cdot 1 = g(0),$$

allora g è continua anche in 0 e si può applicare il teorema. Nell'ultimo caso si ha (limite fondamentale) $\lim_{x\to 0} h(x) = \lim_{x\to 0} x \ln|x| = 0 = h(0)$ da cui la continuità in 0, quindi si può applicare il teorema anche ad h.

8 a) La funzione è definita per ogni $x \in \mathbb{R} = \mathcal{D}$. Si osservi che $g(x) = \sqrt[3]{x^2(6-x)}$ per cui g si annulla in $x = 0$ e $x = 6$. Valendo $\sqrt[3]{z} > 0$ se e solo se $z > 0$, si ha $g(x) > 0$ se e solo $x < 6$, $x \neq 0$, dunque la funzione è positiva per $x < 0$ e $0 < x < 6$, negativa per $x > 6$ e si annulla in $x = 0$ oppure $x = 6$. Inoltre g non è funzione né pari né dispari. Ha senso andare a studiare solamente i limiti a $\pm\infty$. Poiché l'argomento della radice tende a $\mp\infty$ se $x \to \pm\infty$ si ha banalmente $\lim_{x\to\pm\infty} g(x) = \mp\infty$.

b) Essendo composta di funzioni continue, g è continua. Per quanto riguarda la derivabilità, g è derivabile in tutti i punti che non annullano l'argomento della radice cubica (dove potenzialmente la funzione potrebbe non esserlo), dunque per ogni $x \neq 0$, $x \neq 6$. Studiando la derivabilità in $x = 0$ e $x = 6$ mediante la definizione, si ha

$$\lim_{x\to 0^\pm} \frac{g(x) - g(0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0^\pm} \sqrt[3]{\frac{6-x}{x}} = \pm\infty,$$

$$\lim_{x\to 6} \frac{g(x) - g(6)}{x - 6} = -\lim_{x\to 6} \frac{\sqrt[3]{x^2(6-x)}}{6-x} = -\lim_{x\to 6} \sqrt[3]{\frac{x^2}{(6-x)^2}} = -\infty,$$

per cui g non è derivabile in nessuno dei due punti.

c) Banalmente g non ammette asintoti verticali. Per quanto riguarda quelli obliqui, vale

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{g(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \sqrt[3]{\frac{6-x}{x}} = \lim_{x\to\pm\infty} \sqrt[3]{\frac{6}{x} - 1} = -1.$$

Ricordando che $(z^3 + w^3) = (z + w)(z^2 - zw + w^2)$, si ha

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to\pm\infty} (g(x) - x) &= \lim_{x\to\pm\infty} \sqrt[3]{6x^2 - x^3} + x \\
&= \lim_{x\to\pm\infty} \left(\sqrt[3]{6x^2 - x^3} + \sqrt[3]{x^3}\right) \frac{\sqrt[3]{(6x^2 - x^3)^2} - \sqrt[3]{6x^2 - x^3}\,\sqrt[3]{x^3} + \sqrt[3]{x^6}}{\sqrt[3]{(6x^2 - x^3)^2} - \sqrt[3]{6x^2 - x^3}\,\sqrt[3]{x^3} + \sqrt[3]{x^6}} \\
&= \lim_{x\to\pm\infty} \frac{(6x^2 - x^3) + x^3}{\sqrt[3]{(6x^2 - x^3)^2} - \sqrt[3]{x^3(6x^2 - x^3)} + x^2} \\
&= \lim_{x\to\pm\infty} \frac{6}{\sqrt[3]{(6/x - 1)^2} - \sqrt[3]{6/x - 1} + 1} = \frac{6}{1 - (-1) + 1} = 2,
\end{aligned}$$

per cui la retta di equazione $y = -x + 2$ è un asintoto a $\pm\infty$.

d) Per ogni $x \neq 0$, $x \neq 6$, la derivata prima è

$$g'(x) = \left((6x^2 - x^3)^{1/3}\right)' = \frac{1}{3}(6x^2 - x^3)^{-2/3}(12x - 3x^2) = \frac{4x - x^2}{\sqrt[3]{(6x^2 - x^3)^2}} = \frac{4 - x}{\sqrt[3]{x(6 - x)^2}}.$$

Il numeratore è ≥ 0 se $x \leq 4$, il denominatore è positivo se $x > 0$, quindi,

$$g'(x) \begin{cases} < 0, & \text{se } x \in]-\infty, 0[\cup]4, 6[\cup]6, +\infty[, \\ = 0, & \text{se } x = 4, \\ > 0, & \text{se } x \in]0, 4[. \end{cases}$$

In definitiva la funzione è decrescente in $]-\infty, 0[$, in $]4, 6[$ e in $]6, +\infty[$, mentre è crescente in $]0, 4[$. In $x = 4$ ammette un punto di massimo relativo. Poiché la funzione tende a $\mp\infty$ per $x \to \pm\infty$ non ammette massimo e minimo assoluti. Si osservi che poiché g è continua in $x = 6$ ed è decrescente in $]4, 6[$ e in $]6, +\infty[$, allora è decrescente su tutto $]4, +\infty[$. Inoltre, pur non esistendo la derivata in $x = 0$, in ogni caso $x = 0$ è un punto di minimo relativo, essendo ivi definita e continua, crescente a destra e decrescente a sinistra.

e) Si ha

$$\lim_{x \to 0^\pm} g'(x) = \lim_{x \to 0^\pm} \frac{4 - x}{\sqrt[3]{(6 - x)^2}} \cdot \frac{1}{\sqrt[3]{x}} = \left[\frac{4}{\sqrt[3]{36}} \cdot \frac{1}{0^\pm}\right] = \pm\infty,$$

$$\lim_{x \to 6} g'(x) = \lim_{x \to 6} \frac{4 - x}{\sqrt[3]{x}} \cdot \frac{1}{\sqrt[3]{(6 - x)^2}} = \left[\frac{-2}{\sqrt[3]{6}} \cdot \frac{1}{0^+}\right] = -\infty,$$

dunque la funzione in $x = 0$ ha una cosiddetta “cuspide”, mentre in $x = 6$ ha la tangente verticale.

f) Essendo $\sqrt[3]{(6x^2 - x^3)^2} = (6x^2 - x^3)^{2/3}$ si ha

$$\left(\sqrt[3]{(6x^2 - x^3)^2}\right)' = \frac{2}{3}(6x^2 - x^3)^{-1/3}(12x - 3x^2) = \frac{2(4x - x^2)}{\sqrt[3]{6x^2 - x^3}},$$

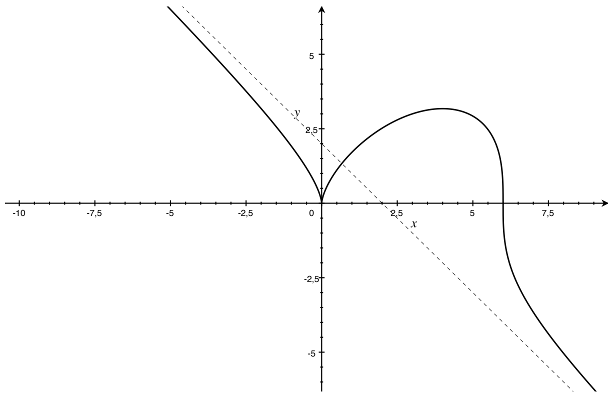
per cui la derivata seconda è

$$\begin{aligned} g''(x) &= \frac{(4 - 2x)\sqrt[3]{(6x^2 - x^3)^2} - (4x - x^2)\frac{2(4x - x^2)}{\sqrt[3]{6x^2 - x^3}}}{\sqrt[3]{(6x^2 - x^3)^4}} \\ &= 2\frac{(2 - x)(6x^2 - x^3) - (4x - x^2)^2}{\sqrt[3]{(6x^2 - x^3)^5}} = \frac{-8x^2}{\sqrt[3]{(6x^2 - x^3)^5}} = \frac{8}{\sqrt[3]{x^4(x - 6)^5}}. \end{aligned}$$

La derivata seconda è positiva se e solo se $\sqrt[3]{(x - 6)^5} > 0$ cioè $x > 6$. In definitiva

$$g''(x) \begin{cases} < 0, & \text{se } x \in]-\infty, 0[\cup]0, 6[, \\ > 0, & \text{se } x \in]6, +\infty[, \end{cases}$$

perciò la funzione è concava in $]-\infty, 0[$ e in $]0, 6[$, mentre è convessa in $]6, +\infty[$. In $x = 6$ ha un punto di flesso a tangente verticale.



g) L'equazione della retta tangente al grafico nel generico punto $(x_0, g(x_0))$ di derivabilità per la funzione è

$$y = (x - x_0)g'(x_0) + g(x_0).$$

Poiché $g(3) = 3$ e $g'(3) = 1/3$, l'equazione della prima retta cercata è $y = \frac{1}{3}(x - 3) + 3$. Per quanto riguarda la seconda, la funzione non è ivi derivabile ma, per quanto visto nei punti e)-f), la retta tangente deve essere verticale e di equazione $x = 6$.

$\boxed{9}$ a) Si ha $y'(t) = 2\sqrt{2}e^{-2t} + \sqrt{2}(2t+1)e^{-2t}(-2) = -4\sqrt{2}te^{-2t}$. Sostituendo si ottiene

$$-4\sqrt{2}te^{-2t} = \frac{te^{-2t}}{\sqrt{2}(2t+1)e^{-2t}\sqrt{2 + (\sqrt{2}(2t+1)e^{-2t})^2}} = \frac{t}{2(2t+1)\sqrt{1 + (2t+1)^2 e^{-4t}}}$$

che non è identicamente soddisfatta (per esempio, per $t = 1/2$ si può verificare che $-2\sqrt{2}e^{-1} \neq \frac{1}{8\sqrt{1+4e^{-2}}}$). La funzione non è dunque soluzione. Si osservi che la funzione soddisfa invece la seconda condizione $y(0) = \sqrt{2}$.

b) Scrivendo $y' = \frac{dy}{dt}$ e utilizzando il metodo di separazione delle variabili si ha

$$y\sqrt{2 + y^2}\, dy = te^{-2t}\, dt \quad \Longrightarrow \quad \int y\sqrt{2 + y^2}\, dy = \int te^{-2t}\, dt.$$

Dalla seconda tabella si ha

$$\int y\sqrt{2 + y^2}\, dy = \frac{1}{2}\int (2 + y^2)'(2 + y^2)^{1/2}\, dy = \frac{1}{2} \cdot \frac{(2 + y^2)^{3/2}}{3/2},$$

mentre integrando per parti si ottiene

$$\int te^{-2t}\, dt = t\frac{e^{-2t}}{-2} - \int \frac{e^{-2t}}{-2}\, dt = -t\frac{e^{-2t}}{2} + \frac{e^{-2t}}{-4} + c = -\frac{2t+1}{4}e^{-2t} + c,$$

da cui segue

$$\frac{1}{3}(2 + y^2)^{3/2} = c - \frac{2t+1}{4}e^{-2t}$$

con c generica costante d'integrazione. Risolvendo in y si ottiene quindi

$$2 + y^2 = \Big(3c - \frac{3(2t+1)}{4}e^{-2t}\Big)^{2/3} \quad \Longrightarrow \quad y = \pm\sqrt{\Big(3c - \frac{3(2t+1)}{4}e^{-2t}\Big)^{2/3} - 2}.$$

In quest'ultima si sceglie il segno + in quanto $y(0)$ è inizialmente positiva. Imponendo ora la condizione $y(0) = \sqrt{2}$ nella prima delle tre relazioni sopra si ottiene $\frac{8}{3} = c - \frac{1}{4}$, da cui si ricava $c = 35/12$. Una soluzione è quindi

$$y(t) = \sqrt{\Big(\frac{35}{4} - \frac{3(2t+1)}{4}e^{-2t}\Big)^{2/3} - 2}.$$

Alternativamente, si poteva utilizzare direttamente la formula risolutiva per le equazioni a variabili separabili (insieme alla formula fondamentale del calcolo integrale)

$$\int_{\sqrt{2}}^{y} z\sqrt{2+z^2}\,dz = \int_0^t s\mathrm{e}^{-2s}\,ds \quad\Longrightarrow\quad \Big[\frac{1}{3}(2+z^2)^{3/2}\Big]_{\sqrt{2}}^{y} = \Big[-\frac{2s+1}{4}\mathrm{e}^{-2s}\Big]_0^t$$
$$\Longrightarrow\quad \frac{1}{3}(2+y^2)^{3/2} - \frac{8}{3} = \frac{1}{4} - \frac{2t+1}{4}\mathrm{e}^{-2t},$$

che risolta rispetto a y fornisce la soluzione cercata.

b') Dalle relazione $\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$ e dalle tabelle si ottiene

$$\begin{aligned}\int \Big(\frac{4\operatorname{sen}^2 x + 3\cos^2 x}{\operatorname{sen}^2 x} + \Big(\sqrt{x}+\frac{1}{x}\Big)^2\Big)\,dx &= \int \Big(\frac{\operatorname{sen}^2 x + 3}{\operatorname{sen}^2 x} + x + \frac{2}{\sqrt{x}} + \frac{1}{x^2}\Big)\,dx \\ &= \int 1\,dx + 3\int \frac{1}{\operatorname{sen}^2 x}\,dx + \int x\,dx + 2\int x^{-1/2}\,dx + \int x^{-2}\,dx \\ &= x - 3\operatorname{ctg} x + \frac{x^2}{2} + 2\frac{x^{1/2}}{1/2} - \frac{1}{x} + c = x - 3\operatorname{ctg} x + \frac{x^2}{2} + 4\sqrt{x} - \frac{1}{x} + c\end{aligned}$$

con c costante arbitraria. Per il Teorema fondamentale del calcolo si ha (per parti)

$$\int_1^{\mathrm{e}} \ln^2 y\,dy = \Big[y\ln^2 y\Big]_1^{\mathrm{e}} - \int_1^{\mathrm{e}} y\frac{2\ln y}{y}\,dy = \mathrm{e} - 2\int_1^{\mathrm{e}} \ln y\,dy = \mathrm{e} - 2\Big[y\ln y - y\Big]_1^{\mathrm{e}} = \mathrm{e} - 2.$$

10 Si ha $f'(x) = -\operatorname{sen}(\pi\mathrm{e}^{2x})\pi\mathrm{e}^{2x}2 = -2\pi\mathrm{e}^{2x}\operatorname{sen}(\pi\mathrm{e}^{2x})$ e $f''(x) = -4\pi^2\mathrm{e}^{4x}\cos(\pi\mathrm{e}^{2x}) - 4\pi\mathrm{e}^{2x}\operatorname{sen}(\pi\mathrm{e}^{2x})$ da cui $f(0) = \cos\pi = -1$, $f'(0) = 0$, $f''(0) = 4\pi^2$ perciò il polinomio di Taylor cercato è

$$P(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x-x_0)^2 = -1 + 2\pi^2x^2.$$

Appello del 15 febbraio 2016 - Tema B

N.B.: scrivere nome, cognome e numero di matricola su ogni foglio consegnato.
Tempo a disposizione: 2.5 ore

---

1 Se $\lim_{x\to x_0} f(x) = -\infty$ e $\lim_{x\to x_0} g(x) = +\infty$, allora $\lim_{x\to x_0} f(x) + g(x)$ è

A $-\infty$

B $+\infty$

C 0

D non ci sono elementi sufficienti per rispondere

---

2 Se f è una funzione derivabile due volte in $]a,b[$ e tale che $f'(x_0) = 0$ con $x_0 \in]a,b[$ e $f''(x) > 0$ per ogni $x \in]a,b[$, allora

A x_0 è punto di minimo relativo ma non necessariamente assoluto per f in $]a,b[$

B x_0 è punto di massimo relativo ma non necessariamente assoluto per f in $]a,b[$

C x_0 è punto di minimo assoluto per f in $]a,b[$

D x_0 è punto di massimo assoluto per f in $]a, b[$

---

3 L'equazione differenziale $y' = y\sqrt{t^2+1} - t$ è

A un'equazione lineare del primo ordine

B un'equazione lineare del secondo ordine

C un'equazione non lineare del primo ordine

D un'equazione non lineare del secondo ordine

---

4 La funzione $f(x) = \operatorname{arctg} x$

A è concava per $x < 0$ e crescente per $x > 0$

B è decrescente per $x < 0$ e concava per $x > 0$

C è una funzione pari

D è una funzione integrabile in $[-1000, -576]$

---

5 Scrivere la definizione di asintoto di una funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ per $x \to +\infty$

---

6 Rappresentare il grafico di una funzione g che verifichi contemporaneamente le seguenti proprietà:

$$\lim_{x\to-\infty} g(x) = -3 \qquad \lim_{x\to-1^-} g(x) = 2 \qquad \lim_{x\to-1^+} g(x) = +\infty \qquad \lim_{x\to+\infty} g(x) = -\infty$$

7
a) Enunciare il teorema fondamentale del calcolo integrale;
b) per quali delle tre funzioni

$$f(x) = \ln{(x-3)^2}, \qquad g(x) = \begin{cases} x - \operatorname{sen}\frac{1}{x} & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0, \end{cases} \qquad h(x) = \begin{cases} \dfrac{1-e^{2x}}{x} & \text{se } x \neq 0 \\ -2 & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

è possibile applicare il teorema nell'intervallo $[-2, 2]$?

---

8 Data la funzione

$$g(x) = \sqrt[3]{x^3 - 2x^2}$$

a) determinare il dominio $\mathcal{D}$ e il segno di g. Calcolare i limiti agli estremi del dominio;
b) studiare in quali punti la funzione è continua e in quali derivabile;
c) trovare gli eventuali asintoti;
d) determinare gli intervalli in cui la funzione è crescente, quelli in cui è decrescente, e gli eventuali punti di massimo/minimo relativo e/o assoluto;
e) calcolare il comportamento di g' negli eventuali punti di non derivabilità;
f) determinare gli intervalli in cui la funzione è concava e quelli in cui è convessa;
g) trovare l'equazione della retta tangente al grafico nel punti $x_0 = 1$ e $x_0 = 2$;
h) disegnare un grafico approssimativo di g.

$\boxed{9}$ Dato il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = \dfrac{t\mathrm{e}^{-3t}}{y\sqrt{1+y^2}} \\ y(0) = \sqrt{3} \end{cases}$$

a) dire se la funzione $y(t) = \sqrt{3}(3t+1)\mathrm{e}^{-3t}$ è soluzione del problema;

b) determinare una soluzione del problema nel caso in cui non lo sia la funzione di cui al punto precedente; oppure, alternativamente

b') calcolare i seguenti integrali

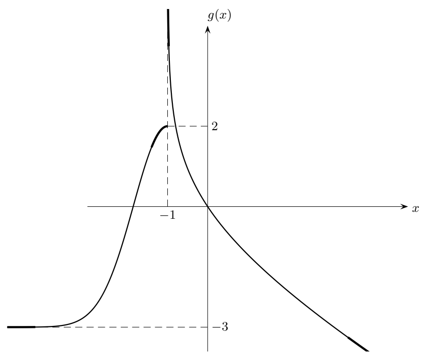
$$\int \left(\frac{3\cos^2 x + 2\,\mathrm{sen}^2\, x}{\cos^2 x} + \left(x - \frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2 \right) dx \qquad \int_1^{\mathrm{e}} y \ln^2 y \, dy.$$

$\boxed{10}$ Calcolare il polinomio di Taylor di grado 2 di $f(x) = \cos(\pi\mathrm{e}^{-x})$ nel punto $x_0 = 0$.

Soluzioni dei quesiti dell'esame del 15 febbraio 2016 - Tema B

$\boxed{1}$ D; $\boxed{2}$ C; $\boxed{3}$ A; $\boxed{4}$ D; $\boxed{5}$ consultare il libro di testo.

$\boxed{6}$ In neretto si evidenziano le informazioni date dai limiti. Il grafico della funzione è quindi completato a piacere (linea sottile), per esempio:



$\boxed{7}$ a) consultare il libro di testo; b) tutte le funzioni sono definite in $[-2, 2]$. f è ivi continua dunque si può applicare il teorema. g e h sono banalmente continue per $x \neq 0$. A causa del termine $\mathrm{sen}(1/x)$ non esiste il $\lim_{x\to 0} g(x)$, dunque g non è continua in $x = 0$ e non si può applicare il teorema. Nell'ultimo caso si ha

$$\lim_{x\to 0} h(x) = -2 \lim_{x\to 0} \frac{\mathrm{e}^{2x} - 1}{2x} = (-2) \cdot 1 = h(0),$$

da cui la continuità in 0, quindi si può applicare il teorema anche ad h.

$\boxed{8}$ a) La funzione è definita per ogni $x \in \mathbb{R} = \mathcal{D}$. Si osservi che $g(x) = \sqrt[3]{x^2(x-2)}$ per cui g si annulla in $x = 0$ e $x = 2$. Valendo $\sqrt[3]{z} > 0$ se e solo se $z > 0$, si ha $g(x) > 0$ se e solo $x > 2$, dunque la funzione è positiva per $x > 2$, negativa per $x < 0$, $0 < x < 2$, e si annulla in $x = 0$ oppure $x = 2$. Inoltre g non è funzione né pari né dispari. Ha senso andare a studiare solamente i limiti a $\pm\infty$. Poiché l'argomento della radice tende a $\pm\infty$ se $x \to \pm\infty$ si ha banalmente $\lim_{x\to\pm\infty} g(x) = \pm\infty$.

b) Essendo composta di funzioni continue, g è continua. Per quanto riguarda la derivabilità, g è derivabile in tutti i punti che non annullano l'argomento della radice cubica (dove potenzialmente la funzione potrebbe non esserlo), dunque per ogni $x \neq 0$, $x \neq 2$. Studiando la derivabilità in $x = 0$ e $x = 2$ mediante la definizione, si ha

$$\lim_{x\to 0^\pm} \frac{g(x) - g(0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0^\pm} \sqrt[3]{\frac{x-2}{x}} = \left[\frac{-\sqrt[3]{2}}{0^\pm}\right] = \mp\infty,$$

$$\lim_{x\to 2} \frac{g(x) - g(2)}{x - 2} = \lim_{x\to 2} \frac{\sqrt[3]{x^2(x-2)}}{x-2} = \lim_{x\to 2} \sqrt[3]{\frac{x^2}{(x-2)^2}} = +\infty,$$

per cui g non è derivabile in nessuno dei due punti.

c) Banalmente g non ammette asintoti verticali. Per quanto riguarda quelli obliqui, vale

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{g(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \sqrt[3]{\frac{x-2}{x}} = \lim_{x\to\pm\infty} \sqrt[3]{1 - \frac{2}{x}} = 1.$$

Ricordando che $(z^3 - w^3) = (z - w)(z^2 + zw + w^2)$, si ha

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to\pm\infty} (g(x) - x) &= \lim_{x\to\pm\infty} \sqrt[3]{x^3 - 2x^2} - x \\
&= \lim_{x\to\pm\infty} \left(\sqrt[3]{x^3 - 2x^2} + \sqrt[3]{x^3}\right) \frac{\sqrt[3]{(x^3 - 2x^2)^2} + \sqrt[3]{x^3 - 2x^2}\,\sqrt[3]{x^3} + \sqrt[3]{x^6}}{\sqrt[3]{(x^3 - 2x^2)^2} + \sqrt[3]{x^3 - 2x^2}\,\sqrt[3]{x^3} + \sqrt[3]{x^6}} \\
&= \lim_{x\to\pm\infty} \frac{(x^3 - 2x^2) - x^3}{\sqrt[3]{(x^3 - 2x^2)^2} + \sqrt[3]{x^3(x^3 - 2x^2)} + x^2} \\
&= \lim_{x\to\pm\infty} \frac{-2}{\sqrt[3]{(1 - 2/x)^2} + \sqrt[3]{1 - 2/x} + 1} = \frac{-2}{1 + 1 + 1} = -\frac{2}{3},
\end{aligned}$$

per cui la retta di equazione $y = x - 2/3$ è un asintoto a $\pm\infty$.

d) Per ogni $x \neq 0$, $x \neq 2$, la derivata prima è

$$g'(x) = \left((x^3 - 2x^2)^{1/3}\right)' = \frac{1}{3}(x^3 - 2x^2)^{-2/3}(3x^2 - 4x) = \frac{3x^2 - 4x}{3\sqrt[3]{(x^3 - 2x^2)^2}} = \frac{3x - 4}{3\sqrt[3]{x(x-2)^2}}.$$

Il numeratore è ≥ 0 se $x \geq 4/3$, il denominatore è positivo se $x > 0$, quindi,

$$g'(x) \begin{cases} > 0, & \text{se } x \in]-\infty, 0[\cup]4/3, 2[\cup]2, +\infty[, \\ = 0, & \text{se } x = 4/3, \\ < 0, & \text{se } x \in]0, 4/3[. \end{cases}$$

In definitiva la funzione è crescente in $]-\infty, 0[$, in $]4/3, 2[$ e in $]2, +\infty[$, mentre è decrescente in $]0, 4/3[$. In $x = 4/3$ ammette un punto di minimo relativo. Poiché la funzione tende a $\pm\infty$ per $x \to \pm\infty$ non ammette massimo e minimo assoluti. Si osservi che poiché g è continua in $x = 2$ ed è crescente in $]4/3, 2[$ e in $]2, +\infty[$, allora è crescente su tutto $]4/3, +\infty[$. Inoltre, pur non esistendo la derivata in $x = 0$, in ogni caso $x = 0$ è un punto di massimo relativo, essendo ivi definita e continua, crescente a sinistra e decrescente a destra.

e) Si ha

$$\lim_{x\to 0^\pm} g'(x) = \lim_{x\to 0^\pm} \frac{3x - 4}{3\sqrt[3]{(x-2)^2}} \cdot \frac{1}{\sqrt[3]{x}} = \left[\frac{-4}{3\sqrt[3]{4}} \cdot \frac{1}{0^\pm}\right] = \mp\infty,$$

$$\lim_{x\to 2} g'(x) = \lim_{x\to 2} \frac{3x - 4}{3\sqrt[3]{x}} \cdot \frac{1}{\sqrt[3]{(x-2)^2}} = \left[\frac{2}{3\sqrt[3]{2}} \cdot \frac{1}{0^+}\right] = +\infty,$$

dunque la funzione in $x = 0$ ha una cosiddetta “cuspide”, mentre in $x = 2$ ha la tangente verticale.

f) Essendo $\sqrt[3]{(x^3-2x^2)^2} = (x^3-2x^2)^{2/3}$ si ha

$$\left(\sqrt[3]{x^3-2x^2)^2}\right)' = \frac{2}{3}(x^3-2x^2)^{-1/3}(3x^2-4x) = \frac{2(3x^2-4x)}{3\sqrt[3]{x^3-2x^2}},$$

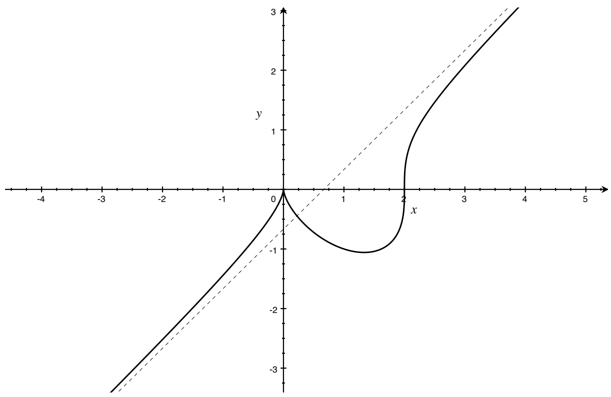
per cui la derivata seconda è

$$\begin{aligned} g''(x) &= \frac{(6x-4)\sqrt[3]{(x^3-2x^2)^2} - (3x^2-4x)\frac{2(3x^2-4x)}{3\sqrt[3]{x^3-2x^2}}}{3\sqrt[3]{(x^3-2x^2)^4}} \\ &= 2\frac{(9x-6)(x^3-2x^2)-(3x^2-4x)^2}{9\sqrt[3]{(x^3-2x^2)^5}} = \frac{-8x^2}{9\sqrt[3]{(x^3-2x^2)^5}} = \frac{-8}{9\sqrt[3]{x^4(x-2)^5}}. \end{aligned}$$

La derivata seconda è positiva se e solo se $\sqrt[3]{(x-2)^5} < 0$ cioè $x < 2$. In definitiva

$$g''(x)\begin{cases} > 0, & \text{se } x \in]-\infty, 0[\cup]0,2[, \\ < 0, & \text{se } x \in]2,+\infty[, \end{cases}$$

perciò la funzione è convessa in $]-\infty,0[$ e in $]0,2[$, mentre è concava in $]2,+\infty[$. In $x = 2$ ha un punto di flesso a tangente verticale.



g) L'equazione della retta tangente al grafico nel generico punto $(x_0, g(x_0))$ di derivabilità per la funzione è

$$y = (x-x_0)g'(x_0) + g(x_0).$$

Poiché $g(1) = -1$ e $g'(1) = -1/3$, l'equazione della prima retta cercata è $y = -\frac{1}{3}(x-1) - 1$. Per quanto riguarda la seconda, la funzione non è ivi derivabile ma, per quanto visto nei punti e)-f), la retta tangente deve essere verticale e di equazione $x = 2$.

9 a) Si ha $y'(t) = 3\sqrt{3}\mathrm{e}^{-3t} + \sqrt{3}(3t+1)\mathrm{e}^{-3t}(-3) = -9\sqrt{3}t\mathrm{e}^{-3t}$. Sostituendo si ottiene

$$-9\sqrt{3}t\mathrm{e}^{-3t} = \frac{t\mathrm{e}^{-3t}}{\sqrt{3}(3t+1)\mathrm{e}^{-3t}\sqrt{1+(\sqrt{3}(3t+1)\mathrm{e}^{-3t})^2}} = \frac{t}{\sqrt{3}(3t+1)\sqrt{1+3(3t+1)^2\mathrm{e}^{-6t}}}$$

che non è identicamente soddisfatta (per esempio, per $t = 1/3$ si può verificare che $-3\sqrt{3}\mathrm{e}^{-1} \neq \frac{1}{6\sqrt{3}\sqrt{1+12\mathrm{e}^{-2}}}$). La funzione non è dunque soluzione. Si osservi che la funzione soddisfa invece la seconda condizione $y(0) = \sqrt{3}$.

b) Scrivendo $y' = \frac{dy}{dt}$ e utilizzando il metodo di separazione delle variabili si ha

$$y\sqrt{1+y^2}\,dy = t\mathrm{e}^{-3t}\,dt \quad \Longrightarrow \quad \int y\sqrt{1+y^2}\,dy = \int t\mathrm{e}^{-3t}\,dt.$$

Dalla seconda tabella si ha

$$\int y\sqrt{1+y^2}\,dy = \frac{1}{2}\int (1+y^2)'(1+y^2)^{1/2}\,dy = \frac{1}{3}\cdot\frac{(1+y^2)^{3/2}}{3/2},$$

mentre integrando per parti si ottiene

$$\int t\mathrm{e}^{-3t}\,dt = t\frac{\mathrm{e}^{-3t}}{-3} - \int \frac{\mathrm{e}^{-3t}}{-3}\,dt = -t\frac{\mathrm{e}^{-3t}}{3} + \frac{\mathrm{e}^{-3t}}{-9} + c = -\frac{3t+1}{9}\mathrm{e}^{-3t} + c,$$

da cui segue

$$\frac{1}{3}(1+y^2)^{3/2} = c - \frac{3t+1}{9}\mathrm{e}^{-3t}$$

con c generica costante d'integrazione. Risolvendo in y si ottiene quindi

$$1+y^2 = \Big(3c - \frac{3t+1}{3}\mathrm{e}^{-3t}\Big)^{2/3} \qquad\Longrightarrow\qquad y = \pm\sqrt{\Big(3c - \frac{3t+1}{3}\mathrm{e}^{-3t}\Big)^{2/3} - 1}.$$

In quest'ultima si sceglie il segno + in quanto $y(0)$ è inizialmente positiva. Imponendo ora la condizione $y(0) = \sqrt{3}$ nella prima delle tre relazioni sopra si ottiene $\frac{8}{3} = c - \frac{1}{9}$, da cui si ricava $c = 25/9$. Una soluzione è quindi

$$y(t) = \sqrt{\Big(\frac{25}{3} - \frac{3t+1}{3}\mathrm{e}^{-3t}\Big)^{2/3} - 1}.$$

Alternativamente, si poteva utilizzare direttamente la formula risolutiva per le equazioni a variabili separabili (insieme alla formula fondamentale del calcolo integrale)

$$\int_{\sqrt{3}}^{y} z\sqrt{1+z^2}\,dz = \int_0^t s\mathrm{e}^{-3s}\,ds \qquad\Longrightarrow\qquad \Big[\frac{1}{3}(1+z^2)^{3/2}\Big]_{\sqrt{3}}^{y} = \Big[-\frac{3s+1}{9}\mathrm{e}^{-3s}\Big]_0^t$$

$$\Longrightarrow\qquad \frac{1}{3}(1+y^2)^{3/2} - \frac{8}{3} = \frac{1}{9} - \frac{3t+1}{9}\mathrm{e}^{-3t},$$

che risolta rispetto a y fornisce la soluzione cercata.

b') Dalle relazione $\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$ e dalle tabelle si ottiene

$$\begin{aligned}\int \Big(\frac{3\cos^2 x + 2\operatorname{sen}^2 x}{\cos^2 x} + \Big(x - \frac{1}{\sqrt{x}}\Big)^2\Big)\,dx &= \int \Big(\frac{\cos^2 x + 2}{\cos^2 x} + x^2 - 2\sqrt{x} + \frac{1}{x}\Big)\,dx \\ &= \int 1\,dx + 2\int \frac{1}{\cos^2 x}\,dx + \int x^2\,dx - 2\int x^{1/2}\,dx + \int \frac{1}{x}\,dx \\ &= x + 2\operatorname{tg} x + \frac{x^3}{3} - 2\frac{x^{3/2}}{3/2} + \ln|x| + c = x + 2\operatorname{tg} x + \frac{x^3}{3} - \frac{4}{3}\sqrt{x^3} + \ln|x| + c\end{aligned}$$

con c costante arbitraria. Per il Teorema fondamentale del calcolo si ha (per parti)

$$\begin{aligned}\int_1^{\mathrm{e}} y\ln^2 y\,dy &= \Big[\frac{y^2}{2}\ln^2 y\Big]_1^{\mathrm{e}} - \int_1^{\mathrm{e}} \frac{y^2}{2}\frac{2\ln y}{y}\,dy = \frac{\mathrm{e}^2}{2} - \int_1^{\mathrm{e}} y\ln y\,dy \\ &= \frac{\mathrm{e}^2}{2} - \Big(\Big[\frac{y^2}{2}\ln y\Big]_1^{\mathrm{e}} - \int_1^{\mathrm{e}} \frac{y^2}{2}\frac{1}{y}\,dy\Big) = \int_1^{\mathrm{e}} \frac{y}{2}\,dy = \Big[\frac{y^2}{4}\Big]_1^{\mathrm{e}} = \frac{\mathrm{e}^2 - 1}{4}.\end{aligned}$$

10 Si ha $f'(x) = -\operatorname{sen}(\pi\mathrm{e}^{-x})\pi\mathrm{e}^{-x}(-1) = \pi\mathrm{e}^{-x}\operatorname{sen}(\pi\mathrm{e}^{-x})$ e $f''(x) = -\pi^2\mathrm{e}^{-2x}\cos(\pi\mathrm{e}^{-x}) - \pi\mathrm{e}^{-x}\operatorname{sen}(\pi\mathrm{e}^{-x})$ da cui $f(0) = \cos\pi = -1$, $f'(0) = 0$, $f''(0) = \pi^2$ perciò il polinomio di Taylor cercato è

$$P(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x-x_0)^2 = -1 + \frac{\pi^2}{2}x^2.$$

Appello del 20 giugno 2016

N.B.: scrivere nome, cognome e numero di matricola su ogni foglio consegnato.
Tempo a disposizione: 2.5 ore

1 Se $\lim_{x\to x_0} f(x) = 0$ e $\lim_{x\to x_0} g(x) = -\infty$, allora $\lim_{x\to x_0} f(x) - g(x)$ è

A $-\infty$

B $+\infty$

C 0

D non ci sono elementi sufficienti per rispondere

2 Se f è una funzione derivabile in $]a, b[$ e tale che $f'(x_0) = 0$ e $f''(x_0) > 0$ per $x_0 \in]a, b[$, allora

A x_0 è un punto di massimo relativo

B x_0 è un punto di minimo relativo

C x_0 è un punto di flesso

D nessuna delle precedenti

3 L'equazione differenziale $y' = \operatorname{arctg} t - 3t^2 y$ è

A un'equazione lineare del primo ordine

B un'equazione lineare del secondo ordine

C un'equazione non lineare del primo ordine

D un'equazione non lineare del secondo ordine

4 La funzione $f(x) = \operatorname{arcsen} x$

A è derivabile nel proprio dominio di definizione

B è continua in $[-\pi/2, \pi/2]$

C è periodica di periodo 2π

D è dispari

5 Dare l'interpretazione geometrica della derivata di una funzione f in un punto x_0.

6 Rappresentare il grafico di una funzione g che verifichi contemporaneamente le seguenti proprietà:

$$\lim_{x\to-\infty} g(x) = +\infty \qquad \lim_{x\to-3^-} g(x) = +\infty \qquad \lim_{x\to-3^+} g(x) = 1 \qquad \lim_{x\to+\infty} g(x) = 3$$

7 a) Enunciare il Teorema del valore medio di Lagrange;

b) determinare, argomentando, a quali tra le funzioni $f(x) = \ln|x-2|$, $g(x) = \sqrt{1+x^2}$, $h(x) = \frac{\arccos x}{x+1}$ è possibile applicare il teorema nell'intervallo $[0,1]$.

---

8 Data la funzione

$$g(x) = \frac{3 - \ln|x|^5}{x}$$

a) determinare il dominio $\mathcal{D}$, il segno ed eventuali simmetrie di g;

b) calcolare i limiti agli estremi del dominio e trovare gli eventuali asintoti;

c) determinare gli intervalli in cui la funzione è crescente, quelli in cui è decrescente, e gli eventuali punti di massimo/minimo relativo e/o assoluto;

d) determinare gli intervalli in cui la funzione è concava e quelli in cui è convessa;

e) trovare l'equazione della retta tangente al grafico nei punti $x_0 = -2$ e $x_0 = \mathrm{e}$;

f) disegnare un grafico approssimativo di g.

---

9 Dato il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = (1+y^2)\dfrac{t\,\mathrm{sen}(2t)}{y} \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

a) dire se la funzione $y(t) = \cos(2t)$ è soluzione del problema;

b) determinare una soluzione del problema nel caso in cui non lo sia la funzione di cui al punto precedente; oppure, alternativamente

b') calcolare i seguenti integrali

$$\int \left(\frac{(2^x)^3}{5^x} - \frac{\sqrt[4]{x}\,\sqrt[3]{x}}{x} \right) dx \qquad \int_0^{\pi} (x - 2x^2)\cos(3x)\,dx.$$

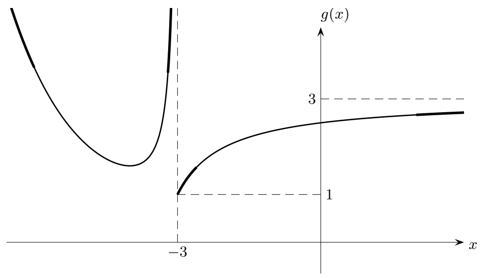
---

10 Calcolare il polinomio di Taylor di grado 2 di $f(x) = \ln(x^2 + 3x)$ nel punto $x_0 = 1$.

Soluzioni dei quesiti dell'esame del 20 giugno 2016

1 B; **2** B; **3** A; **4** D; **5** consultare il libro di testo.

6 In neretto si evidenziano le informazioni date dai limiti. Il grafico della funzione è quindi completato a piacere (linea sottile), per esempio:



$\boxed{7}$ a) Consultare il libro di testo. b) La funzione $f(x)$ è continua e derivabile in tutti i punti tranne che in $x = 2$ che non appartiene a $[0, 1]$, perciò in questo caso si può applicare il teorema. La funzione g è continua e derivabile in $[0, 1]$, essendo $g'(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$; anche in questo caso si può applicare il teorema. La funzione h è definita in $]-1, 1]$ ma, a causa dell'arccos non è derivabile in $x = 1$; tuttavia anche in questo caso si può applicare il teorema perché la derivabilità agli estremi dell'intervallo di definizione non è necessaria.

$\boxed{8}$ a) Il dominio è individuato dagli x per cui $|x|^5 > 0$ e $x \neq 0$ (a causa del denominatore). Poiché per $x \neq 0$ vale $|x| > 0$ si ha quindi $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{0\}$. La funzione è ivi continua e derivabile. Per le proprietà dei logaritmi g può essere scritta anche nel seguente modo

$$g(x) = \frac{3 - 5\ln|x|}{x}.$$

Poiché il valore assoluto è funzione pari, allora f è funzione dispari, infatti per ogni $x \neq 0$ vale

$$g(-x) = \frac{3 - \ln|-x|^5}{-x} = -\frac{3 - \ln|x|^5}{x} = -g(x).$$

È quindi possibile studiare la funzione per $x > 0$, ottenendo il grafico per $x < 0$ grazie a una simmetria di centro l'origine. D'ora in avanti si supporrà quindi $x \in \mathcal{D}^+ =]0, +\infty[$, su cui vale $g(x) = \frac{3-5\ln x}{x}$.

Poiché il denominatore è sempre positivo nel dominio $\mathcal{D}^+$, si ha che $g(x) \geq 0$ se e solo se $3-5\ln x \geq 0$ ovvero $\ln x \leq 3/5$ cioè $x \leq e^{3/5}$. In definitiva, restringendosi a $\mathcal{D}^+$

$$g(x) \begin{cases} > 0, & \text{se } x \in]0, e^{3/5}[, \\ = 0, & \text{se } x = e^{3/5}, \\ < 0, & \text{se } x \in]e^{3/5}, +\infty[. \end{cases}$$

Per simmetria g è < 0 in $]-e^{3/5}, 0[$, è > 0 in $]-\infty, -e^{3/5}[$ e si annulla anche in $x = -e^{3/5}$.

b) In $\mathcal{D}^+$ ha senso andare a studiare i limiti a $+\infty$ e in 0 da destra. Si ha

$$\lim_{x\to 0^+} g(x) = \left[\frac{+\infty}{0^+}\right] = +\infty, \qquad \lim_{x\to+\infty} g(x) = \left[\frac{-\infty}{+\infty}\right] \overset{H}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{-5/x}{1} = 0.$$

Simmetricamente si ha $\lim_{x\to 0^-} g(x) = -\infty$ e $\lim_{x\to-\infty} g(x) = 0$. Di conseguenza g ha un asintoto verticale di equazione $x = 0$ e uno orizzontale a $\pm\infty$, di equazione $y = 0$.

c) Calcoliamo la derivata prima:

$$g'(x) = \frac{-\frac{5}{x}x - (3 - 5\ln x) \cdot 1}{x^2} = \frac{5\ln x - 8}{x^2}.$$

In $\mathcal{D}^+$ la derivata è positiva quando $5\ln x - 8 \geq 0$ ovvero $\ln x \geq 8/5$ cioè $x \geq e^{8/5}$. Quindi

$$g'(x) \begin{cases} < 0, & \text{se } x \in]0, e^{8/5}[, \\ = 0, & \text{se } x = e^{8/5}, \\ > 0, & \text{se } x \in]e^{8/5}, +\infty[, \end{cases}$$

perciò la funzione è crescente in $]e^{8/5}, +\infty[$, mentre è decrescente in $]0, e^{8/5}[$. In $x = e^{8/5}$ ammette un minimo relativo. Per simmetria g è crescente in $]-\infty, -e^{8/5}[$, decrescente in $]-e^{8/5}, 0[$ e si annulla anche in $x = -e^{8/5}$ dove ammette un massimo relativo. Dal punto b) si vede subito che la funzione non possiede né massimo né minimo assoluti.

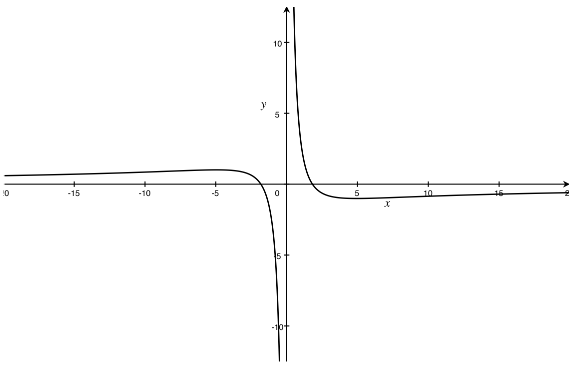
d) Calcoliamo la derivata seconda:

$$g''(x) = \frac{\frac{5}{x}x^2 - (5\ln x - 8)2x}{x^4} = \frac{21 - 10\ln x}{x^3}.$$

Il denominatore è positivo in $\mathcal{D}^+$, il numeratore è ≥ 0 quando $21 - 10\ln x \geq 0$ ovvero $\ln x \leq 21/10$ cioè $x \leq \mathrm{e}^{21/10}$. Quindi

$$g''(x) \begin{cases} > 0, & \text{se } x \in]0, \mathrm{e}^{21/10}[, \\ = 0, & \text{se } x = \mathrm{e}^{21/10}, \\ < 0, & \text{se } x \in]\mathrm{e}^{21/10}, +\infty[, \end{cases}$$

perciò la funzione è convessa in $]0, \mathrm{e}^{21/10}[$, mentre è concava in $]\mathrm{e}^{21/10}, +\infty[$. Simmetricamente, è anche concava in $]-\infty, -\mathrm{e}^{21/10}[$, convessa in $]-\mathrm{e}^{21/10}, 0[$.



f) L'equazione della retta tangente al grafico nel generico punto $(x_0, g(x_0))$ di derivabilità per la funzione è

$$y = (x - x_0)g'(x_0) + g(x_0).$$

Poiché $g(\mathrm{e}) = -2/\mathrm{e}$ e $g'(\mathrm{e}) = -3/\mathrm{e}^2$, la relativa tangente ha equazione $y = -\frac{3}{\mathrm{e}^2}(x - \mathrm{e}) - \frac{2}{\mathrm{e}}$. Per quanto riguarda la prima, si ha $g(-2) = (5\ln 2 - 3)/2$ e $g'(-2) = (5\ln 2 - 8)/4$ e la relativa tangente ha equazione $y = \frac{5\ln 2 - 8}{4}(x + 2) + \frac{5\ln 2 - 3}{2}$.

$\boxed{9}$ a) Si ha $y'(t) = -2\,\mathrm{sen}(2t)$. Sostituendo si ottiene

$$-2\,\mathrm{sen}(2t) = \left(1 + \cos^2(2t)\right)\frac{t\,\mathrm{sen}(2t)}{\cos(2t)}$$

che non è identicamente soddisfatta (per esempio, per $t = \pi/8$ si ha $-\sqrt{2} \neq 3\pi/16$). La funzione non è dunque soluzione. Si osservi che la funzione soddisfa invece la seconda condizione $y(0) = 1$.

b) Scrivendo $y' = \frac{dy}{dt}$ e utilizzando il metodo di separazione delle variabili si ha

$$\frac{y}{1 + y^2}\,dy = t\,\mathrm{sen}(2t)\,dt \qquad \Longrightarrow \qquad \int \frac{y}{1 + y^2}\,dy = \int t\,\mathrm{sen}(2t)\,dt.$$

Dalla seconda tabella si ha

$$\int \frac{y}{1 + y^2}\,dy = \frac{1}{2}\int \frac{(1 + y^2)'}{1 + y^2}\,dy = \frac{1}{2}\ln(1 + y^2),$$

mentre integrando per parti si ottiene

$$\int t\,\mathrm{sen}(2t)\,dt = t\Big(-\frac{\cos(2t)}{2}\Big) + \int \frac{\cos(2t)}{2}\,dt = -t\frac{\cos(2t)}{2} + \frac{\mathrm{sen}(2t)}{4} + c,$$

da cui segue

$$\frac{1}{2}\ln(1+y^2) = -t\frac{\cos(2t)}{2} + \frac{\text{sen}(2t)}{4} + c,$$

con c generica costante d'integrazione. Risolvendo in y si ottiene quindi

$$1+y^2 = \exp\Big(2c - t\cos(2t) + \frac{\text{sen}(2t)}{2}\Big) \qquad \Longrightarrow \qquad y = \pm\sqrt{\exp\Big(2c - t\cos(2t) + \frac{\text{sen}(2t)}{2}\Big) - 1}.$$

In quest'ultima si sceglie il segno + in quanto $y(0)$ è inizialmente positiva. Imponendo ora la condizione $y(0) = 1$ nella prima delle tre relazioni sopra si ottiene $\frac{\ln 2}{2} = c$. Una soluzione è quindi

$$y(t) = \sqrt{\exp\Big(\ln 2 - t\cos(2t) + \frac{\text{sen}(2t)}{2}\Big) - 1} = \sqrt{2\exp\Big(-t\cos(2t) + \frac{\text{sen}(2t)}{2}\Big) - 1}.$$

Alternativamente, si poteva utilizzare direttamente la formula risolutiva per le equazioni a variabili separabili (insieme alla formula fondamentale del calcolo integrale)

$$\begin{aligned}\int_1^y \frac{z}{1+z^2}\,dz = \int_0^t s\,\text{sen}(2s)\,ds \quad &\Longrightarrow \quad \Big[\frac{1}{2}\ln(1+z^2)\Big]_1^y = \Big[-s\frac{\cos(2s)}{2} + \frac{\text{sen}(2s)}{4}\Big]_0^t \\ &\Longrightarrow \quad \frac{\ln(1+y^2)}{2} - \frac{\ln 2}{2} = -t\frac{\cos(2t)}{2} + \frac{\text{sen}(2t)}{4},\end{aligned}$$

che risolta rispetto a y fornisce la soluzione cercata.

b') Dalle tabelle si ottiene

$$\int\Big(\frac{(2^x)^3}{5^x} - \frac{\sqrt[4]{x}\,\sqrt[3]{x}}{x}\Big)\,dx = \int\Big(\frac{8}{3}\Big)^x dx - \int x^{-5/12}\,dx = \frac{(8/3)^x}{\ln(8/3)} - \frac{x^{7/12}}{7/12} + c,$$

con c costante arbitraria. Per il Teorema fondamentale del calcolo si ha (per parti)

$$\begin{aligned}\int_0^\pi (x-2x^2)\cos(3x)\,dx &= \Big[(x-2x^2)\frac{\text{sen}(3x)}{3}\Big]_0^\pi - \int_0^\pi (1-4x)\frac{\text{sen}(3x)}{3}\,dx \\ &= (0-0) - \frac{1}{3}\int_0^\pi (1-4x)\,\text{sen}(3x)\,dx \\ &= -\frac{1}{3}\Big\{\Big[(1-4x)\frac{-\cos(3x)}{3}\Big]_0^\pi - \int_0^\pi -4\frac{-\cos(3x)}{3}\,dx\Big\} \\ &= -\frac{1}{3}\Big(\frac{1-4\pi}{3} + \frac{1}{3}\Big) + \frac{4}{9}\int_0^\pi \cos(3x)\,dx = \frac{4\pi-2}{9} + \frac{4}{9}\Big[\frac{\text{sen}(3x)}{3}\Big]_0^\pi = \frac{4\pi-2}{9}.\end{aligned}$$

10 Si ha

$$f'(x) = \frac{2x+3}{x^2+3x}, \qquad f''(x) = \frac{2(x^2+3x) - (2x+3)^2}{(x^2+3x)^2}$$

da cui $f(1) = \ln 4$, $f'(1) = 5/4$, $f''(1) = -17/16$ perciò il polinomio di Taylor cercato è

$$P(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x-x_0)^2 = \ln 4 + \frac{5}{4}(x-1) - \frac{17}{32}(x-1)^2.$$

Appello del 4 luglio 2016

N.B.: scrivere nome, cognome e numero di matricola su ogni foglio consegnato.
Tempo a disposizione: 2.5 ore

---

1 Se $\lim_{x\to x_0} f(x) = 0^+$ e $\lim_{x\to x_0} g(x) = -\infty$, allora $\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$ è

A $-\infty$

B $+\infty$

C 0

D non ci sono elementi sufficienti per rispondere

---

2 Se f è una funzione derivabile due volte in $]a, b[$ e tale che $f''(x_0) = 0$, $f'(x_0) < 0$ con $x_0 \in]a, b[$, allora

A x_0 è punto di minimo relativo per f

B x_0 è punto di massimo relativo per f

C x_0 è punto di massimo assoluto per f

D nessuna delle precedenti

---

3 L'equazione differenziale $y'' = (ty + y')^2$ è

A un'equazione lineare del primo ordine

B un'equazione lineare del secondo ordine

C un'equazione non lineare del primo ordine

D un'equazione non lineare del secondo ordine

---

4 La funzione $f(x) = \log_{1/9} x$

A è definita per $x \in \mathbb{R}$

B è integrabile in $[271, 475]$

C è una funzione crescente

D è una funzione decrescente e concava

---

5 Dare la definizione di primitiva di una funzione f in un intervallo I.

---

6 Rappresentare il grafico di una funzione g che verifichi contemporaneamente le seguenti proprietà:

$$\lim_{x\to-\infty} g(x) = +\infty \qquad \lim_{x\to 2^-} g(x) = 1 \qquad \lim_{x\to 2^+} g(x) = -\infty \qquad \lim_{x\to+\infty} g(x) = -2$$

---

7 a) Enunciare il Teorema dei due carabinieri

b) per ciascuno dei seguenti casi

$$\frac{x^2+2}{5x^2+3} \leq g(x) \leq \frac{3x^3-1}{15x^2+1}, \text{ con } x \to +\infty, \qquad \frac{\operatorname{sen} x}{x-3x^2} \leq g(x) \leq 2^{-x^2}, \text{ con } x \to 0$$

applicare il teorema nel caso fosse possibile farlo.

---

8 Data la funzione

$$g(x) = \frac{e^{2x}}{1-2x}$$

a) determinare il dominio $\mathcal{D}$ e il segno di g. Studiare in quali punti la funzione è continua e in quali derivabile;

b) calcolare i limiti agli estremi del dominio e trovare gli eventuali asintoti;

c) determinare gli intervalli in cui la funzione è crescente, quelli in cui è decrescente, e gli eventuali punti di massimo/minimo relativo e/o assoluto;

d) determinare gli intervalli in cui la funzione è concava e quelli in cui è convessa;

e) trovare l'equazione della retta tangente al grafico nel punto $x_0 = -1$;

f) disegnare un grafico approssimativo di g.

---

9 Dato il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = \dfrac{2y^4+1}{y^3t^3} \\ y(2) = 1 \end{cases}$$

a) dire se la funzione $y(t) = e^{2(t-2)}$ è soluzione del problema per $t > 0$;

b) determinare una soluzione del problema nel caso in cui non lo sia la funzione di cui al punto precedente; oppure, alternativamente

b') calcolare i seguenti integrali

$$\int \left[\frac{5}{\sqrt{4-x^2}} - \left(x + \frac{2}{\sqrt{x}}\right)^2\right] dx \qquad \int_0^2 \frac{3x+1}{x^2+4}\, dx.$$

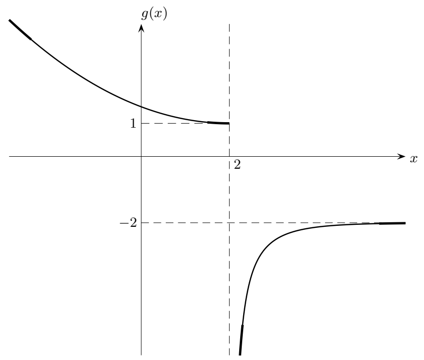
---

10 Calcolare il polinomio di Taylor di grado 2 di $f(x) = \ln(1+x^2)$ nel punto $x_0 = -1$.

Soluzioni dei quesiti dell'esame del 4 luglio 2016

1 C; **2** D; **3** D; **4** B; **5** consultare il libro di testo.

6 In neretto si evidenziano le informazioni date dai limiti. Il grafico della funzione è quindi completato a piacere (linea sottile), per esempio:



7 a) consultare il libro di testo; b) nel primo caso si ha

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+2}{5x^2+3}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1+2/x^2}{5+3/x^2}=\frac{1}{5},\qquad \lim_{x\to+\infty}\frac{3x^3-1}{15x^2+1}=\lim_{x\to+\infty}x\frac{3-1/x^3}{15+1/x^2}=+\infty,$$

e il teorema non può essere applicato, mentre nel secondo

$$\lim_{x\to0}2^{-x^2}=1,\quad \lim_{x\to0}\frac{\operatorname{sen}x}{x-3x^2}=\lim_{x\to0}\frac{\operatorname{sen}x}{x}\cdot\frac{1}{1-3x}=1\cdot1=1,$$

per cui il teorema può essere applicato e si ha $\lim_{x\to0}g(x)=0$.

8 a) La funzione è definita se $1-2x\neq0$ cioè $x\neq1/2$, perciò il dominio è $\mathcal{D}=\mathbb{R}\setminus\{1/2\}$ e la funzione, essendo quoziente di funzioni derivabili, è ivi continua e derivabile. Il numeratore è sempre positivo dunque la funzione è positiva per $x<1/2$, negativa per $x>1/2$.

b) Ha senso andare a studiare i limiti in $1/2$ e a $\pm\infty$. Si ha

$$\lim_{x\to-\infty}g(x)=\left[\frac{0}{+\infty}\right]=0,\qquad \lim_{x\to(1/2)^\pm}g(x)=\left[\frac{\mathrm{e}}{0^\mp}\right]=\mp\infty,$$

quindi la funzione non ammette massimo né minimo, mentre, utilizzando il limite fondamentale $\lim_{x\to+\infty}\mathrm{e}^x/x^p=+\infty$, $p>0$, (oppure, alternativamente, il Teorema di de L'Hôpital) si ha

$$\lim_{x\to+\infty}g(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{\mathrm{e}^x/x}{1/x-2}=\left[\frac{+\infty}{-2}\right]=-\infty.$$

Per quanto appena visto, la retta di equazione $x=1/2$ è un asintoto verticale, mentre l'asse x è un asintoto orizzontale a $-\infty$. Essendo

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{g(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\mathrm{e}^x/x^2}{1/x-2}=\left[\frac{+\infty}{-2}\right]=-\infty,$$

la funzione non ammette asintoti obliqui a $+\infty$.

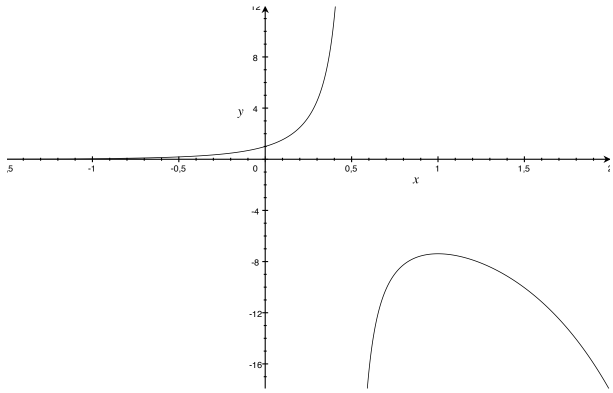
c) La derivata prima è

$$g'(x)=\frac{2\mathrm{e}^{2x}(1-2x)-\mathrm{e}^{2x}(-2)}{(1-2x)^2}=\frac{4\mathrm{e}^{2x}(1-x)}{(2x-1)^2}.$$

Poiché i fattori e^{2x} e $(2x-1)^2$ sono sempre positivi nel dominio, si ottiene

$$g'(x)\begin{cases}<0, & \text{se } x\in]1,+\infty[,\\ =0, & \text{se } x=1,\\ >0, & \text{se } x\in]-\infty,1/2[\cup]1/2,1[,\end{cases}$$

perciò la funzione è decrescente in $]1,+\infty[$, mentre è crescente in $]-\infty,1/2[$ e in $]1/2,1[$. In $x=1$ ammette un massimo relativo. Chiaramente, per il punto b) la funzione non ammette massimo né minimo assoluti.



d) La derivata seconda è

$$
\begin{aligned}
g''(x) &= 4\frac{\left[2e^{2x}(1-x)-e^{2x}\right](2x-1)^2 - e^{2x}(1-x)2(2x-1)2}{(2x-1)^4} \\
&= 4\frac{\left[2e^{2x}(1-x)-e^{2x}\right](2x-1) - e^{2x}(1-x)4}{(2x-1)^3} = \frac{4e^{2x}(4x^2-8x+5)}{(1-2x)^3}.
\end{aligned}
$$

Poiché il polinomio $4x^2 - 8x + 5$ è sempre positivo, la derivata seconda è positiva se e solo se $(1-2x)^3 > 0$ cioè $x < 1/2$. In definitiva $g''(x) > 0$ se $x \in]-\infty, 1/2[$ e $g''(x) < 0$ se $x \in]1/2, +\infty[$ perciò la funzione è convessa in $]-\infty, 1/2[$, mentre è concava in $]1/2, +\infty[$.

e) L'equazione della retta tangente al grafico nel generico punto $(x_0, g(x_0))$ di derivabilità per la funzione è

$$y = (x - x_0)g'(x_0) + g(x_0).$$

Poiché $g(-1) = e^{-2}/3$ e $g'(-1) = 8e^{-2}/9$, l'equazione della retta tangente è

$$y = \frac{8}{9e^2}(x+1) + \frac{1}{3e^2}.$$

$\boxed{9}$ a) Si ha $y'(t) = 2e^{2(t-2)}$ e sostituendo si ottiene l'equazione

$$2e^{2(t-2)} = \frac{2e^{8(t-2)}+1}{e^{6(t-2)}t^3}$$

che non è identicamente soddisfatta per $t > 0$ (per esempio, per $t = 2$ si ottiene $2 \neq 3$). La funzione non è dunque soluzione. Si osservi che la funzione soddisfa invece la seconda condizione, essendo $y(2) = 1$.

b) Scrivendo $y' = \frac{dy}{dt}$ e utilizzando il metodo di separazione delle variabili si ha

$$\frac{y^3}{2y^4+1}\,dy = \frac{1}{t^3}\,dt$$

e, siccome $1/t^3 = t^{-3}$, integrando

$$\int \frac{y^3}{2y^4+1}\,dy = \int t^{-3}\,dt \qquad \Longrightarrow \qquad \int \frac{y^3}{2y^4+1}\,dy = -\frac{1}{2t^2} + c,$$

dove c è la generica costante d'integrazione. Per le tabelle

$$\int \frac{y^3}{2y^4+1}\,dy = \frac{1}{8}\int \frac{8y^3}{2y^4+1}\,dt = \frac{1}{8}\int \frac{(2y^4+1)'}{2y^4+1}\,dt = \frac{1}{8}\ln(2y^4+1),$$

e poiché $y(t)$ è positiva vicino a $t = 2$ si ottiene

$$\frac{1}{8}\ln(2y^4+1) = -\frac{1}{2t^2} + c \qquad \Longleftrightarrow \qquad y = \sqrt[4]{\frac{1}{2}\Big(\exp\Big(8c - \frac{4}{t^2}\Big) - 1\Big)}.$$

Imponendo la condizione $y(2) = 1$ (nella prima equazione) si ha $\ln 3/8 = -1/8 + c$, da cui si ricava $c = (1 + \ln 3)/8$. Una soluzione è data dunque da

$$y(t) = \sqrt[4]{\frac{1}{2}\Big(3\exp\Big(1 - \frac{4}{t^2}\Big) - 1\Big)}.$$

Alternativamente, si poteva utilizzare direttamente la formula risolutiva per le equazioni a variabili separabili (insieme alla formula fondamentale del calcolo integrale)

$$\begin{aligned}\int_1^y \frac{z^3}{2z^4+1}\,dz = \int_2^t s^{-3}\,ds \quad &\Longrightarrow \quad \Big[\frac{1}{8}\ln(2z^4+1)\Big]_1^y = \Big[-\frac{1}{2s^2}\Big]_2^t \\ &\Longrightarrow \quad \frac{1}{8}\ln(2y^4+1) - \frac{1}{8}\ln 3 = \frac{1}{8} - \frac{1}{2t^2}\end{aligned}$$

che risolta rispetto a y fornisce la soluzione cercata.

b') Dalle tabelle si ottiene

$$\begin{aligned}\int \Big[\frac{5}{\sqrt{4-x^2}} - \Big(x + \frac{2}{\sqrt{x}}\Big)^2\Big]\,dx &= 5\int \frac{1}{\sqrt{2^2-x^2}} - \int x^2\,dx - 4\int \sqrt{x}\,dx - 4\int \frac{1}{x}\,dx \\ &= 5\,\mathrm{arcsen}\,\frac{x}{2} - \frac{x^3}{3} - 4\frac{x^{3/2}}{3/2} - 4\ln|x| + c = 5\,\mathrm{arcsen}\,\frac{x}{2} - \frac{x^3}{3} - \frac{8}{3}x\sqrt{x} - 4\ln|x| + c,\end{aligned}$$

con c costante arbitraria. Per il Teorema fondamentale del calcolo e le tabelle si ha

$$\int_0^2 \frac{3x+1}{x^2+4}\,dx = \frac{3}{2}\int_0^2 \frac{2x}{x^2+4}\,dx + \int_0^2 \frac{1}{x^2+4}\,dx + = \Big[\frac{3}{2}\ln(x^2+4) + \frac{1}{2}\,\mathrm{arctg}\,\frac{x}{2}\Big]_0^2 = \frac{3\ln 2}{2} + \frac{\pi}{8}.$$

10 Si ha $f'(x) = \frac{2x}{1+x^2}$ e $f''(x) = 2\frac{(1+x^2)-x2x}{(1+x^2)^2} = 2\frac{1-x^2}{(1+x^2)^2}$ da cui $f(-1) = \ln 2$, $f'(-1) = -1$, $f''(-1) = 0$ perciò il polinomio di Taylor cercato è

$$P(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x - x_0)^2 = \ln 2 - (x + 1).$$

Appello del 20 luglio 2016

N.B.: scrivere nome, cognome e numero di matricola su ogni foglio consegnato.
Tempo a disposizione: 2.5 ore

---

1 Se $\lim_{x\to x_0} f(x) = -\infty$ e $\lim_{x\to x_0} g(x) = 0$, allora $\lim_{x\to x_0} f(x)g(x)$ è

- A $-\infty$
- B $+\infty$
- C 0
- D non ci sono elementi sufficienti per rispondere

---

2 Se f è una funzione derivabile due volte in $]a, b[$ e tale che $f'(x) > 0$ e $f''(x) < 0$ per ogni $x \in]a, b[$, allora

- A f è crescente e convessa
- B f è decrescente e concava
- C f è crescente e concava
- D f è decrescente e convessa

---

3 L'equazione differenziale $y' = \operatorname{arctg}(t^2)y$ è

- A un'equazione lineare del primo ordine
- B un'equazione lineare del secondo ordine
- C un'equazione non lineare del primo ordine
- D un'equazione non lineare del secondo ordine

---

4 La funzione $f(x) = (2/3)^x$

- A ha come immagine $\mathbb{R}$
- B ha limite $+\infty$ per $x \to +\infty$
- C è decrescente
- D è una funzione razionale

---

5 Dare la definizione di continuità di una funzione f in un punto x_0.

---

6 Rappresentare il grafico di una funzione g che verifichi contemporaneamente le seguenti proprietà:

$$\lim_{x\to-\infty} g(x) = -3 \qquad \lim_{x\to-1^-} g(x) = 2 \qquad \lim_{x\to-1^+} g(x) = +\infty \qquad \lim_{x\to+\infty} g(x) = -\infty$$

7
a) Enunciare il teorema fondamentale del calcolo integrale;
b) per quali delle tre funzioni

$$f(x) = \ln|x+1|, \qquad g(x) = \begin{cases} e^{-1/x} & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0, \end{cases} \qquad h(x) = \begin{cases} \dfrac{x - 2\operatorname{tg} x}{\operatorname{sen} x} & \text{se } x \neq 0 \\ -1 & \text{se } x = 0, \end{cases}$$

è possibile applicare il teorema nell'intervallo $[-2, 2]$?

---

8 Data la funzione

$$g(x) = \sqrt[3]{x^2 + 2x - 3}$$

a) determinare il dominio $\mathcal{D}$ e il segno di g. Calcolare i limiti agli estremi del dominio;
b) studiare in quali punti la funzione è continua e in quali derivabile;
c) trovare gli eventuali asintoti;

d) determinare gli intervalli in cui la funzione è crescente, quelli in cui è decrescente, e gli eventuali punti di massimo/minimo relativo e/o assoluto;

e) calcolare il comportamento di g' negli eventuali punti di non derivabilità;

f) determinare gli intervalli in cui la funzione è concava e quelli in cui è convessa;

g) trovare l'equazione della retta tangente al grafico nel punto di ascissa $x_0 = 2$;

h) disegnare un grafico approssimativo di g.

$\boxed{9}$ Dato il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = -2t\,\dfrac{\operatorname{sen} y}{\cos y} \\ y(0) = \pi/6 \end{cases}$$

a) dire se la funzione $y(t) = (\arccos t)/3$ è soluzione del problema nell'intervallo $]-1,1[$;

b) determinare una soluzione del problema nel caso in cui non lo sia la funzione di cui al punto precedente. Verificare che quella trovata è effettivamente una soluzione. Alternativamente

b') calcolare i seguenti integrali

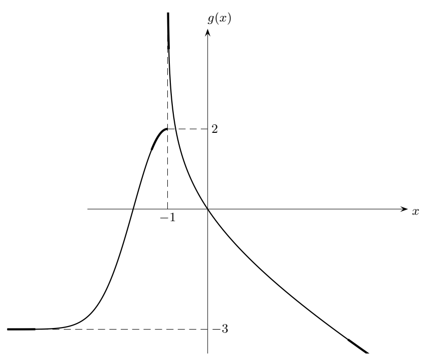
$$\int \Big(\frac{1}{e^x\,2^{-x}} + \frac{x^5 - 3x^2 + 4}{x}\Big)\,dx \qquad \int_0^{\pi/4} \frac{1 - 3\operatorname{sen} x}{\cos^2 x}\,dx.$$

$\boxed{10}$ Calcolare il polinomio di Taylor di ordine 2 di $f(x) = \operatorname{arctg}(\sqrt{3}\,e^{-x})$ nel punto $x_0 = \ln 3$.

Soluzioni dei quesiti dell'esame del 20 luglio 2016

$\boxed{1}$ D; $\boxed{2}$ C; $\boxed{3}$ A; $\boxed{4}$ C; $\boxed{5}$ consultare il libro di testo.

$\boxed{6}$ In neretto si evidenziano le informazioni date dai limiti. Il grafico della funzione è quindi completato a piacere (linea sottile), per esempio:



$\boxed{7}$ a) consultare il libro di testo; b) la funzione f non è definita in $x = -1$ che appartiene all'intervallo $[-2, 2]$, dunque il teorema non si applica. La seconda funzione è definita ovunque ma essendo $\lim_{x\to 0^+} g(x) = [e^{-\infty}] = 0$, mentre $\lim_{x\to 0^-} g(x) = [e^{\infty}] = +\infty$, non è continua in $x = 0$; anche in questo caso non è possibile applicare il teorema.

Nell'ultimo caso, la funzione $z(x) = \frac{x - 2\operatorname{tg} x}{\operatorname{sen} x}$ è definita dove il seno non si annulla, dunque in $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}$. Essendo $[-2, 2] \setminus \{0\} \subseteq]-\pi, 0[\cup]0, \pi[\subseteq \mathcal{D}$ segue che la funzione $h(x)$ è definita in $[-2,2]$ e continua almeno in $[-2,2]\setminus\{0\}$. Resta da valutare la continuità in $x=0$. Ricordando il limite fondamentale $\lim_{x\to 0}(\operatorname{sen}x)/x=1$, si ha

$$\lim_{x\to 0}h(x)=\lim_{x\to 0}\Big(\frac{x}{\operatorname{sen}x}-\frac{2\operatorname{tg}x}{\operatorname{sen}x}\Big)=\lim_{x\to 0}\Big(\frac{x}{\operatorname{sen}x}-\frac{2}{\cos x}\Big)=1-2=-1=h(0),$$

perciò h è continua anche in 0 e in quest'ultimo caso si può applicare il teorema.

$\boxed{8}$ a) La funzione è definita per ogni $x\in\mathbb{R}$. Poiché $z^3\geq 0$ se e solo se $z\geq 0$, si ha $g(x)\geq 0$ se e solo se $x^2+2x-3\geq 0$ ovvero se $x\leq -3$ oppure $x\geq 1$. In particolare g si annulla in $x=-3$ e $x=1$ ed è negativa per $x\in]-3,1[$. Inoltre g non è funzione né pari né dispari. Ha senso andare a studiare solamente i limiti a $\pm\infty$. Poiché l'argomento della radice tende a $+\infty$ se $x\to\pm\infty$ si ha banalmente $\lim_{x\to\pm\infty}g(x)=+\infty$.

b) Essendo composta di funzioni continue, g è continua. Per quanto riguarda la derivabilità, g è derivabile in tutti i punti che non annullano l'argomento della radice cubica (dove potenzialmente la funzione potrebbe non esserlo), dunque per ogni $x\neq -3$, $x\neq 1$. Studiando la derivabilità in $x=-3$ e $x=1$ mediante la definizione, si ha

$$\lim_{x\to -3}\frac{g(x)-g(-3)}{x-(-3)}=\lim_{x\to -3}\sqrt[3]{\frac{(x+3)(x-1)}{(x+3)^3}}=\lim_{x\to -3}\sqrt[3]{\frac{x-1}{(x+3)^2}}=\Big[\sqrt[3]{\frac{-4}{0^+}}\Big]=-\infty,$$

$$\lim_{x\to 1}\frac{g(x)-g(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1}\sqrt[3]{\frac{(x+3)(x-1)}{(x-1)^3}}=\lim_{x\to 1}\sqrt[3]{\frac{x+3}{(x-1)^2}}=\Big[\sqrt[3]{\frac{4}{0^+}}\Big]=+\infty,$$

per cui g non è derivabile in nessuno dei due punti. Si osservi che tali limiti implicano che in $x=-3$ e $x=1$ la tangente è verticale.

c) Banalmente g non ammette asintoti verticali. Per quanto riguarda quelli obliqui, vale

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{g(x)}{x}=\lim_{x\to\pm\infty}\sqrt[3]{\frac{x^2+2x-3}{x^3}}=\lim_{x\to\pm\infty}\sqrt[3]{\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}-\frac{3}{x^3}}=0=:m,$$

mentre

$$\lim_{x\to\pm\infty}\big(g(x)-mx\big)=\lim_{x\to\pm\infty}g(x)=+\infty,$$

dunque g non ammette neppure asintoti obliqui/orizzontali.

d) Per ogni $x\neq -3$, $x\neq 1$, la derivata prima è

$$g'(x)=\big((x^2+2x-3)^{1/3}\big)'=\frac{1}{3}(x^2+2x-3)^{-2/3}(2x+2)=\frac{2}{3}\cdot\frac{x+1}{\sqrt[3]{(x^2+2x-3)^2}}.$$

Il numeratore è ≥ 0 se $x\geq -1$, il denominatore è sempre positivo nel dominio dove è derivabile, dunque per $x\neq -3$, $x\neq 1$, quindi

$$g'(x)\begin{cases}<0, & \text{se } x\in]-\infty,-3[\cup]-3,-1[,\\ =0, & \text{se } x=-1,\\ >0, & \text{se } x\in]-1,1[\cup]1,+\infty[.\end{cases}$$

In definitiva la funzione è decrescente in $]-\infty,-3[$ e in $]-3,1[$, mentre è crescente in $]-1,1[$ e in $]1,+\infty[$. Si osservi che poiché g è continua in $x=-3$ ed è decrescente in $]-\infty,-3[$ e in $]-3,1[$, allora è decrescente su tutto $]-\infty,1[$. Analogamente è crescente su tutto $]1,+\infty[$. In $x=-1$ ammette un punto di minimo relativo e assoluto. Poiché g tende a $+\infty$ per $x\to\pm\infty$, la funzione non ammette massimo.

e) Si ha

$$\lim_{x\to -3}g'(x)=\frac{2}{3}\lim_{x\to -3}\frac{x+1}{\sqrt[3]{(x^2+2x-3)^2}}=\frac{2}{3}\Big[\frac{-2}{0^+}\Big]=-\infty,$$

$$\lim_{x\to 1} g'(x) = \frac{2}{3} \lim_{x\to 1} \frac{x+1}{\sqrt[3]{(x^2+2x-3)^2}} = \frac{2}{3}\left[\frac{2}{0^+}\right] = +\infty,$$

dunque in tali punti la funzione ha la tangente verticale.

f) Essendo $\sqrt[3]{(x^2+2x-3)^2} = (x^2+2x-3)^{2/3}$ si ha

$$\left(\sqrt[3]{(x^2+2x-3)^2}\right)' = \frac{2}{3}(x^2+2x-3)^{-1/3}(2x+2) = \frac{4(x+1)}{3\sqrt[3]{x^2+2x-3}},$$

per cui la derivata seconda è

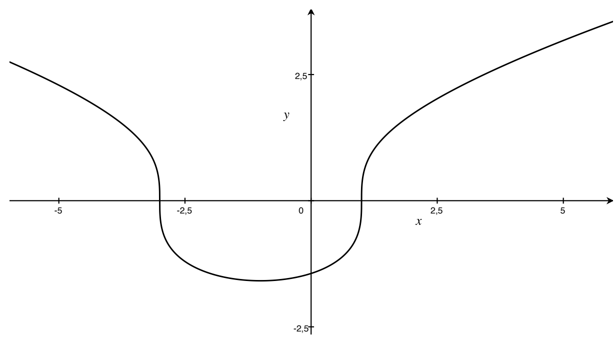
$$\begin{aligned} g''(x) &= \frac{2}{3} \cdot \frac{\sqrt[3]{(x^2+2x-3)^2} - (x+1)\frac{4(x+1)}{3\sqrt[3]{x^2+2x-3}}}{\sqrt[3]{(x^2+2x-3)^4}} \\ &= \frac{2}{9} \cdot \frac{3(x^2+2x-3) - 4(x+1)^2}{\sqrt[3]{(x^2+2x-3)^5}} = -\frac{2}{9} \cdot \frac{x^2+2x+13}{\sqrt[3]{(x^2+2x-3)^5}}. \end{aligned}$$

Il numeratore è sempre positivo, dunque, tenendo conto del segno $-$ davanti alla frazione, la derivata seconda è positiva se e solo se $\sqrt[3]{(x^2+2x-3)^5} < 0$ cioè $x^2+2x-3 < 0$, ovvero $-3 < x < 1$. Dunque la funzione è concava in $]-\infty, -3[$ e in $]1, +\infty[$, mentre è convessa in $]-3, 1[$. In $x = -3$ e $x = 1$ ha dei punti di flesso a tangente verticale.

Per concludere, si osservi che la funzione si può scrivere nella forma

$$g(x) = \sqrt[3]{(x+1)^2 - 4},$$

dunque è composizione della funzione $w(y) = \sqrt[3]{y^2-4}$ con la traslazione $y(x) = x+1$. Essendo w funzione pari ciò comporta che il grafico di g è simmetrico rispetto alla retta verticale di equazione $x = -1$, come si può anche osservare in figura.



g) L'equazione della retta tangente al grafico nel generico punto $(x_0, g(x_0))$ di derivabilità per la funzione è

$$y = (x - x_0)g'(x_0) + g(x_0).$$

Poiché $g(2) = \sqrt[3]{5}$ e $g'(2) = 2/\sqrt[3]{25}$, l'equazione della retta cercata è

$$y = \frac{2}{\sqrt[3]{25}}(x-2) + \sqrt[3]{5}.$$

$\boxed{9}$ a) Si ha $y'(t) = -\frac{1}{3\sqrt{1-t^2}}$ e sostituendo si ottiene l'equazione

$$-\frac{1}{3\sqrt{1-t^2}} = -2t\frac{\operatorname{sen}(\frac{1}{3}\arccos t)}{\cos(\frac{1}{3}\arccos t)}$$

che non è identicamente soddisfatta (per esempio, per $t = 0$ si ottiene $-1/3 \neq 0$). La funzione non è dunque soluzione. Si osservi che invece la funzione soddisfa la seconda condizione, cioè $y(0) = \pi/6$.

b) Scrivendo $y' = \frac{dy}{dt}$ e utilizzando il metodo di separazione delle variabili si ha

$$\frac{\cos y}{\operatorname{sen} y}\,dy = -2t\,dt \quad\Longrightarrow\quad \int \frac{\cos y}{\operatorname{sen} y}\,dy = -\int 2t\,dt \quad\Longrightarrow\quad \ln|\operatorname{sen} y| = -t^2 + c$$

dove c è la generica costante d'integrazione. Osservando che $\operatorname{sen} y(0) = \operatorname{sen}(\pi/6) = 1/2$, si ha che per t vicini a 0 la funzione $\operatorname{sen} y(t)$ è positiva e nell'equazione sopra si può togliere il valore assoluto. Imponendo inoltre la condizione $y(0) = \pi/6$ si ricava $\ln(1/2) = c$ ed infine

$$\ln \operatorname{sen} y = -t^2 + \ln(1/2) \quad\Longleftrightarrow\quad \operatorname{sen} y = \frac{1}{2}e^{-t^2}$$

e poiché $y(t)$ è positiva e prossima a $1/2$ per t vicino a 0 e $0 \le \frac{1}{2}e^{-t^2} \le 1$, si può invertire la funzione seno ottenendo

$$y(t) = \operatorname{arcsen}(\frac{1}{2}e^{-t^2}).$$

Alternativamente, si poteva utilizzare direttamente la formula risolutiva per le equazioni a variabili separabili (insieme alla formula fondamentale del calcolo integrale)

$$\int_{\pi/6}^{y} \frac{\cos z}{\operatorname{sen} z}\,dz = \int_0^t -s\,ds \quad\Longrightarrow\quad \Big[\ln|\operatorname{sen} z|\Big]_{\pi/6}^{y} = \Big[-s^2\Big]_0^t \quad\Longrightarrow\quad \ln|\operatorname{sen} y| - \ln\frac{1}{2} = -t^2,$$

che, supposto $\operatorname{sen} y > 0$ e risolta rispetto a y, fornisce la soluzione cercata.

Verifichiamo che quella trovata è una soluzione:

$$y'(t) = \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{1}{2}e^{-t^2}\right)^2}}\,\frac{1}{2}e^{-t^2}(-2t)$$

mentre, ricordando che $|\cos z| = \sqrt{1-\operatorname{sen}^2 z}$ ed osservando che $\cos y(t)$ è sempre positiva, si ha

$$-2t\,\frac{\operatorname{sen} y(t)}{\cos y(t)} = -2t\frac{\operatorname{sen}\big(\operatorname{arcsen}(\frac{1}{2}e^{-t^2})\big)}{\cos\big(\operatorname{arcsen}(\frac{1}{2}e^{-t^2})\big)} = -2t\frac{\frac{1}{2}e^{-t^2}}{\sqrt{1-\left(\frac{1}{2}e^{-t^2}\right)^2}}.$$

Si riconosce facilmente che queste due funzioni coincidono. Inoltre, sostituendo si ottiene $y(0) = \operatorname{arcsen}(1/2) = \pi/6$, dunque y è effettivamente soluzione del problema di Cauchy.

b') Dalle tabelle si ottiene

$$\begin{aligned}\int \Big(\frac{1}{e^x\,2^{-x}} + \frac{x^5-3x^2+4}{x}\Big)\,dx &= \int \Big(\frac{2}{e}\Big)^x dx + \int x^4\,dx - 3\int x\,dx + 4\int \frac{1}{x}\,dx \\ &= \frac{(2/e)^x}{\ln(2/e)} + \frac{x^5}{5} - 3\frac{x^2}{2} + 4\ln|x| + c = \frac{2^x}{e^x(\ln 2 - 1)} + \frac{x^5}{5} - \frac{3}{2}x^2 + 4\ln|x| + c,\end{aligned}$$

con c costante arbitraria. Per le tabelle e il Teorema fondamentale del calcolo si ha

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi/4} \frac{1-3\operatorname{sen} x}{\cos^2 x}\,dx &= \int_0^{\pi/4}\Big(\frac{1}{\cos^2 x} - \frac{3\operatorname{sen} x}{\cos^2 x}\Big)\,dx = \Big[\operatorname{tg} x\Big]_0^{\pi/4} + 3\int_0^{\pi/4}(\cos x)^{-2}(\cos x)'\,dx \\ &= (1-0) + 3\Big[-\frac{1}{\cos x}\Big]_0^{\pi/4} = 1 - 3\Big(\frac{1}{1/\sqrt{2}} - 1\Big) = 4 - 3\sqrt{2}.\end{aligned}$$

10 La derivata prima e seconda sono date da

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{1+(\sqrt{3}e^{-x})^2}(-\sqrt{3}e^{-x}) = -\sqrt{3}\frac{e^x}{e^{2x}+3}, \\ f''(x) &= -\sqrt{3}\,\frac{e^x(e^{2x}+3) - e^x e^{2x}2}{(e^{2x}+3)^2} = \sqrt{3}\,\frac{e^x(e^{2x}-3)}{(e^{2x}+3)^2}.\end{aligned}$$

Essendo $e^{\ln 3} = 3$, $e^{-\ln 3} = 1/3$, $e^{2\ln 3} = e^{\ln 9} = 9$, $\operatorname{arctg}(1/\sqrt{3}) = \pi/6$, si ha $f(\ln 3) = \pi/6$ $f'(\ln 3) = -\sqrt{3}/4$, $f''(\ln 3) = \sqrt{3}/8$ perciò il polinomio di Taylor cercato è

$$P(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x - x_0)^2 = \frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{4}(x - \ln 3) + \frac{\sqrt{3}}{16}(x - \ln 3)^2.$$

Appello del 14 settembre 2016

N.B.: scrivere nome, cognome e numero di matricola su ogni foglio consegnato.
Tempo a disposizione: 2.5 ore

---

1 Se $\lim_{x\to x_0} f(x) = 0^+$ e $\lim_{x\to x_0} g(x) = -\infty$, allora $\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$ è

- A $-\infty$
- B $+\infty$
- C 0
- D non ci sono elementi sufficienti per rispondere

---

2 Se f è una funzione derivabile due volte in $]a, b[$ e tale che $f'(x_0) = 0$ e $f''(x_0) = \pi$ con $x_0 \in]a, b[$, allora

- A x_0 è punto di minimo relativo ma non necessariamente assoluto per f in $]a, b[$
- B x_0 è punto di massimo relativo ma non necessariamente assoluto per f in $]a, b[$
- C x_0 è punto di minimo assoluto per f in $]a, b[$
- D x_0 è punto di massimo assoluto per f in $]a, b[$

---

3 L'equazione differenziale $y'' = t^2 y + 3\sqrt{t}y'$ è

- A un'equazione lineare del primo ordine
- B un'equazione lineare del secondo ordine
- C un'equazione non lineare del primo ordine
- D un'equazione non lineare del secondo ordine

---

4 La funzione $f(x) = \sqrt[7]{x}$

- A è definita e derivabile in $\mathbb{R}$
- B è crescente e convessa in $]-\infty, 0[$
- C è una funzione pari
- D è definita e positiva in $\mathbb{R}$

---

5 Scrivere la definizione di asintoto di una funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ per $x \to +\infty$

---

6 Rappresentare il grafico di una funzione g che verifichi contemporaneamente le seguenti proprietà:

$$\lim_{x\to-\infty} g(x) = 0, \qquad \lim_{x\to-2^-} g(x) = -\infty, \qquad \lim_{x\to-2^+} g(x) = 0, \qquad \lim_{x\to+\infty} g(x) = 1.$$

---

7 a) Enunciare il Teorema di de L'Hôpital;

b) per ciascuno dei seguenti tre limiti

$$\lim_{x\to0} \frac{3\,\mathrm{tg}\,x - \ln(\cos(3x))}{\sqrt{1+x} - \mathrm{e}^x}, \qquad \lim_{x\to+\infty} \frac{3^x + x^2}{\mathrm{sen}(x^4) + 5\,\mathrm{arctg}\,x}, \qquad \lim_{x\to0} \frac{\mathrm{sen}(\cos x) + x^3}{4\,\mathrm{tg}(x^2) - 3x\,\mathrm{sen}\,x},$$

determinare se è possibile applicare il teorema ed eventualmente calcolarne il valore.

---

8 Data la funzione

$$g(x) = x^3\mathrm{e}^{-x}$$

a) determinare il dominio $\mathcal{D}$, il segno di g e calcolare i limiti agli estremi del dominio;

b) trovare gli eventuali asintoti;

c) determinare gli intervalli in cui la funzione è crescente, quelli in cui è decrescente, gli eventuali punti di massimo/minimo relativo e/o assoluto;

d) determinare gli intervalli in cui la funzione è concava e quelli in cui è convessa;

e) trovare l'equazione della retta tangente al grafico nel punto di ascissa $x_0 = 1$;

f) disegnare un grafico approssimativo di g.

---

9 Dato il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = \dfrac{(6t^2 - \cos t)(2 + y^2)}{y} \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

a) dire se la funzione $y(t) = \sqrt{t^2+1}$ è soluzione del problema;

b) determinare una soluzione del problema nel caso in cui non lo sia la funzione di cui al punto precedente; oppure, alternativamente

b') calcolare i seguenti integrali

$$\int \left(\frac{5x^2+3x-1}{\sqrt{x}} - \frac{3}{\sqrt{4-x^2}}\right) dx \qquad \int_1^2 \frac{x^2+1}{x(x^2+3)}\,dx.$$

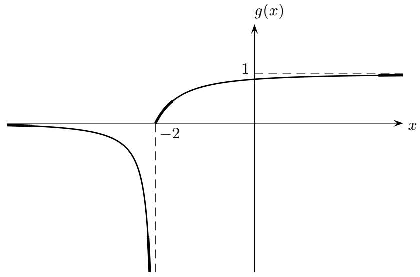
---

10 Calcolare il polinomio di Taylor di grado 2 di $f(x) = \ln(1 + \ln x)$ nel punto $x_0 = \mathrm{e}$.

Soluzioni dei quesiti dell'esame del 14 settembre 2016

1 C; **2** A; **3** B; **4** B; **5** consultare il libro di testo.

6 In neretto si evidenziano le informazioni date dai limiti. Il grafico della funzione è quindi completato a piacere (linea sottile), per esempio:



$\boxed{7}$ a) consultare il libro di testo. b) il primo limite è della forma $0/0$; applicando il teorema di ha

$$\lim_{x\to 0}\frac{3\operatorname{tg}x-\ln(\cos(3x))}{\sqrt{1+x}-\mathrm{e}^x}\overset{H}{=}\lim_{x\to 0}\frac{\frac{3}{\cos^2 x}+\frac{3\operatorname{sen}(3x)}{\cos(3x)}}{\frac{1}{2\sqrt{1+x}}-\mathrm{e}^x}=\left[\frac{3+0}{1/2-1}\right]=-6.$$

Per quanto riguarda il secondo, il denominatore non tende né a zero né a ∞ in quanto l'arcotangente ha limite finito per $x\to+\infty$ mentre $\operatorname{sen}(x^4)$ è una funzione oscillante che non ammette limite per $x\to+\infty$; per questo motivo non si può applicare il teorema. Il terzo è della forma $(\operatorname{sen}1)/0$, dunque anche in questo caso non si può applicare il teorema.

$\boxed{8}$ a) La funzione è definita per ogni $x\in\mathbb{R}=\mathcal{D}$. Poiché e^{-x} è positiva per ogni x, la funzione è positiva per $x>0$, negativa per $x<0$ e si annulla in $x=0$. Inoltre g non è funzione né pari né dispari. Ha senso andare a studiare solamente i limiti a $\pm\infty$. Si ha

$$\lim_{x\to-\infty}x^3\mathrm{e}^{-x}=[-\infty\cdot+\infty]=-\infty,$$

mentre

$$\lim_{x\to+\infty}x^3\mathrm{e}^{-x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^3}{\mathrm{e}^x}=0\quad\text{(limite fondamentale)}.$$

Al secondo limite si poteva applicare (tre volte di seguito) anche il Teorema di de L'Hôpital, essendo della forma indeterminata $[\infty/\infty]$.

b) Banalmente g non ammette asintoti verticali. Poiché la funzione ha limite finito uguale a 0 per $x\to+\infty$, allora la retta $y=0$ è asintoto (orizzontale) a $+\infty$. Poiché inoltre

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{g(x)}{x}=\lim_{x\to-\infty}x^2\mathrm{e}^{-x}=-\infty,$$

non ci sono asintoti a $-\infty$.

c) La derivata prima è

$$g'(x)=3x^2\mathrm{e}^{-x}+x^3\mathrm{e}^{-x}(-1)=(3x^2-x^3)\mathrm{e}^{-x}=x^2(3-x)\mathrm{e}^{-x}.$$

Poiché $x^2\mathrm{e}^{-x}>0$ per ogni $x\neq 0$, essendo inoltre nullo in $x=0$, mentre $3-x\geq 0$ se solo se $x\leq 3$, allora

$$g'(x)\begin{cases}>0, & \text{se } x\in]-\infty,0[\cup]0,3[,\\ =0, & \text{se } x=0 \text{ oppure } x=3,\\ <0, & \text{se } x\in]3,+\infty[.\end{cases}$$

Dunque la funzione è crescente in $]-\infty,0[$ e in $]0,3[$, mentre è decrescente in $]3,+\infty[$. In $x=3$ ammette un punto di massimo relativo e assoluto. Poiché la funzione è derivabile anche in 0 con derivata nulla, segue che $g(x)$ è strettamente crescente su tutto $]-\infty,3[$; è probabile che $x=0$ sia un punto di flesso a tangente orizzontale (si veda d)).

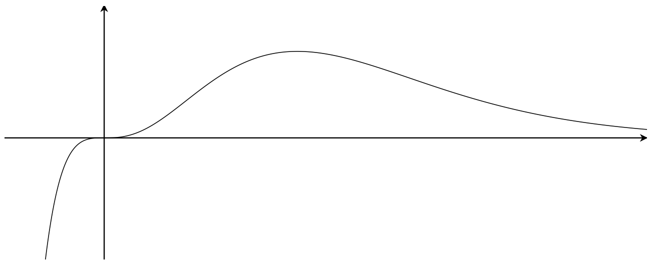
d) La derivata seconda è data da

$$g''(x)=(6x-3x^2)\mathrm{e}^{-x}+(3x^2-x^3)\mathrm{e}^{-x}(-1)=x(x^2-6x+6)\mathrm{e}^{-x}.$$

Essendo $(x^2 - 6x + 6) \geq 0$ per $x \leq 3 - \sqrt{3}$ oppure $x \geq 3 + \sqrt{3}$, si ha

$$g''(x) \begin{cases} < 0, & \text{se } x \in]-\infty, 0[\,\cup\,]3-\sqrt{3}, 3+\sqrt{3}[, \\ = 0, & \text{se } x = 0 \text{ oppure } x = 3-\sqrt{3} \text{ oppure } x = 3-\sqrt{3}, \\ > 0, & \text{se } x \in]0, 3-\sqrt{3}[\,\cup\,]3+\sqrt{3}, +\infty[, \end{cases}$$

perciò la funzione è concava in $]-\infty, 0[$ e in $]3-\sqrt{3}, 3+\sqrt{3}[$, mentre è convessa in $]0, 3-\sqrt{3}[$ e in $]3+\sqrt{3}, +\infty[$. In $x = 0$, $x = 3 - \sqrt{3}$, $x = 3 + \sqrt{3}$ ha tre punti di flesso, il primo a tangente orizzontale.



g) L'equazione della retta tangente al grafico nel generico punto $(x_0, g(x_0))$ di derivabilità per la funzione è

$$y = (x - x_0)g'(x_0) + g(x_0).$$

Poiché $g(1) = \mathrm{e}^{-1}$ e $g'(1) = 2\mathrm{e}^{-1}$, l'equazione della retta cercata è

$$y = 2\mathrm{e}^{-1}(x-1) + \mathrm{e}^{-1}.$$

$\boxed{9}$ a) Si ha $y'(t) = \frac{2t}{2\sqrt{t^2+1}}$. Sostituendo si ottiene

$$\frac{t}{\sqrt{t^2+1}} = \frac{(6t^2 - \cos t)(t^2+3)}{\sqrt{t^2+1}}$$

che non è identicamente soddisfatta (per esempio, per $t = 0$ si ha $0 \neq -3$). La funzione non è dunque soluzione. Si osservi che $y(t)$ soddisfa invece la seconda condizione $y(0) = 1$.

b) Scrivendo $y' = \frac{dy}{dt}$ e utilizzando il metodo di separazione delle variabili si ha

$$\frac{y}{y^2+2}\,dy = (6t^2 - \cos t)\,dt \qquad \Longrightarrow \qquad \int \frac{y}{y^2+2}\,dy = \int (6t^2 - \cos t)\,dt.$$

Dalla seconda tabella si ha

$$\int \frac{y}{y^2+2}\,dy = \frac{1}{2}\int \frac{2y}{y^2+2}\,dy = \frac{1}{2}\int \frac{(y^2+2)'}{y^2+2}\,dy = \frac{1}{2}\ln(y^2+2)$$

mentre, grazie semplicemente alla prima tabella, si ottiene

$$\int (6t^2 - \cos t)\,dt = 2t^3 - \operatorname{sen} t + c,$$

da cui segue

$$\frac{1}{2}\ln(y^2+2) = 2t^3 - \operatorname{sen} t + c,$$

con c generica costante d'integrazione. Risolvendo in y si ottiene quindi

$$2 + y^2 = \mathrm{e}^{4t^3 - 2\operatorname{sen} t + 2c} \qquad \Longrightarrow \qquad y = \pm\sqrt{\mathrm{e}^{4t^3 - 2\operatorname{sen} t + 2c} - 2}.$$

In quest'ultima si sceglie il segno + in quanto $y(0)$ è inizialmente positiva. Imponendo ora la condizione $y(0) = 1$ nella prima delle tre relazioni sopra si ottiene $\frac{1}{2}\ln 3 = c$. Una soluzione è quindi

$$y(t) = \sqrt{\mathrm{e}^{4t^3 - 2\,\mathrm{sen}\,t + \ln 3} - 2} = \sqrt{3\mathrm{e}^{4t^3 - 2\,\mathrm{sen}\,t} - 2}.$$

Alternativamente, si poteva utilizzare direttamente la formula risolutiva per le equazioni a variabili separabili (insieme alla formula fondamentale del calcolo integrale)

$$\int_1^y \frac{z}{z^2+2}\,dz = \int_0^t (6s^2 - \cos s)\,ds \quad \Longrightarrow \quad \Big[\frac{1}{2}\ln(z^2+2)\Big]_1^y = \Big[2s^3 - \mathrm{sen}\,s\Big]_0^t$$
$$\Longrightarrow \quad \frac{1}{2}\ln(y^2+2) - \frac{1}{2}\ln 3 = 2t^3 - \mathrm{sen}\,t,$$

che risolta rispetto a y fornisce la soluzione cercata.

b') Dalle tabelle si ottiene

$$\int \Big(\frac{5x^2+3x-1}{\sqrt{x}} - \frac{3}{\sqrt{4-x^2}}\Big)\,dx = 5\int x^{3/2}\,dx + 3\int x^{1/2}\,dx - \int x^{-1/2}\,dx - \int \frac{3}{\sqrt{2^2-x^2}}\,dx$$
$$= 5\frac{x^{5/2}}{5/2} + 3\frac{x^{3/2}}{3/2} - \frac{x^{1/2}}{1/2} - 3\,\mathrm{arcsen}\,\frac{x}{2} + c = 2x^2\sqrt{x} + 2x\sqrt{x} - 2\sqrt{x} - 3\,\mathrm{arcsen}\,\frac{x}{2} + c,$$

con c costante arbitraria. Per il Teorema fondamentale del calcolo e grazie alla seconda tabella, si ha

$$\int_1^2 \frac{x^2+1}{x(x^2+3)}\,dx = \frac{1}{3}\int_1^2 \frac{3x^2+3}{x^3+3x}\,dx = \frac{1}{3}\int_1^2 \frac{(x^3+3x)'}{x^3+3x}\,dx = \frac{1}{3}\Big[\ln|x^3+3x|\Big]_1^2 = \frac{1}{3}\ln\frac{7}{2}.$$

10 Si ha $f'(x) = \frac{1}{1+\ln x}\cdot\frac{1}{x} = \frac{1}{x+x\ln x}$ e $f''(x) = -\frac{1+\ln x + x(1/x)}{(x+x\ln x)^2} = -\frac{2+\ln x}{(x+x\ln x)^2}$ da cui $f(\mathrm{e}) = \ln 2$, $f'(\mathrm{e}) = 1/(2\mathrm{e})$, $f''(\mathrm{e}) = -3/(4\mathrm{e}^2)$ perciò il polinomio di Taylor cercato è

$$P(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x-x_0)^2 = \ln 2 + \frac{1}{2\mathrm{e}}(x-\mathrm{e}) - \frac{3}{8\mathrm{e}^2}(x-\mathrm{e})^2.$$