Integrali

Motivazioni

Motivazioni principali

Motivazioni principali

area di regioni del piano

Motivazioni principali

area di regioni del piano $\longleftrightarrow$ integrale definito

Motivazioni principali

area di regioni del piano $\longleftrightarrow$ integrale definito

ricerca delle primitive

Motivazioni principali

area di regioni del piano $\longleftrightarrow$ integrale definito

ricerca delle primitive $\longleftrightarrow$ integrale indefinito

Motivazioni principali

area di regioni del piano $\longleftrightarrow$ integrale definito

Teorema fondam. del calcolo

ricerca delle primitive $\longleftrightarrow$ integrale indefinito

Motivazioni principali

area di regioni del piano $\longleftrightarrow$ integrale definito

Teorema fondam. del calcolo

ricerca delle primitive $\longleftrightarrow$ integrale indefinito

Per certi aspetti, l'operazione di ricerca delle primitive può essere considerata come l'operazione inversa della derivazione

Integrale indefinito

Primitive di una funzione

Sia $f : I \to \mathbb{R}$ una funzione, con I intervallo

Si dice che $F : I \to \mathbb{R}$ è una primitiva di f su I, se F è derivabile su I e

$$F'(x) = f(x) \text{ per ogni } x \in I$$

Primitive di una funzione

Sia $f : I \to \mathbb{R}$ una funzione, con I intervallo

Si dice che $F : I \to \mathbb{R}$ è una primitiva di f su I, se F è derivabile su I e

$$F'(x) = f(x) \text{ per ogni } x \in I$$

Osservazione: le primitive non sono uniche!

Esempi

$\boxed{1}$ Per $f(x) = 1$, una primitiva su $\mathbb{R}$ è

$$F(x) = x$$

Esempi

$\boxed{1}$ Per $f(x) = 1$, una primitiva su $\mathbb{R}$ è

$$F(x) = x \quad \text{infatti } F'(x) = 1 = f(x)$$

Esempi

$\boxed{1}$ Per $f(x) = 1$, una primitiva su $\mathbb{R}$ è

$$F(x) = x \quad \text{infatti } F'(x) = 1 = f(x)$$

ma è anche primitiva

$$F_2(x) = x + 2 \quad \text{infatti } F_2'(x) = 1 = f(x)$$

$\boxed{1}$ Per $f(x) = 1$, una primitiva su $\mathbb{R}$ è

$$F(x) = x \quad \text{infatti } F'(x) = 1 = f(x)$$

ma è anche primitiva

$$F_2(x) = x + 2 \quad \text{infatti } F_2'(x) = 1 = f(x)$$

e in generale sono primitive le funzioni

$$F_c(x) = x + c \quad \text{infatti } F_c'(x) = 1 = f(x)$$

Esempi

$\boxed{1}$ Per $f(x) = 1$, una primitiva su $\mathbb{R}$ è

$$F(x) = x \quad \text{infatti } F'(x) = 1 = f(x)$$

ma è anche primitiva

$$F_2(x) = x + 2 \quad \text{infatti } F_2'(x) = 1 = f(x)$$

e in generale sono primitive le funzioni

$$F_c(x) = x + c \quad \text{infatti } F_c'(x) = 1 = f(x)$$

Ogni primitiva si ottiene da $F(x)$ addizionando un generico numero reale c

Al variare di c si ottengono infinite primitive!

$\boxed{2}$ una primitiva di $f(x) = x$ è

$$F(x) = x^2/2 \quad \text{infatti } F'(x) = \frac{2x}{2} = f(x)$$

$\boxed{2}$ una primitiva di $f(x) = x$ è

$$F(x) = x^2/2 \quad \text{infatti } F'(x) = \frac{2x}{2} = f(x)$$

ma anche $F_c(x) = \frac{x^2}{2} + c$ con $c \in \mathbb{R}$ è ancora primitiva

$\boxed{2}$ una primitiva di $f(x) = x$ è

$$F(x) = x^2/2 \quad \text{infatti } F'(x) = \frac{2x}{2} = f(x)$$

ma anche $F_c(x) = \frac{x^2}{2} + c$ con $c \in \mathbb{R}$ è ancora primitiva

$\boxed{3}$ una primitiva di $f(x) = \mathrm{e}^x$ è

$$F(x) = \mathrm{e}^x \quad \text{infatti } F'(x) = \mathrm{e}^x = f(x)$$

$\boxed{2}$ una primitiva di $f(x) = x$ è

$$F(x) = x^2/2 \quad \text{infatti } F'(x) = \frac{2x}{2} = f(x)$$

ma anche $F_c(x) = \frac{x^2}{2} + c$ con $c \in \mathbb{R}$ è ancora primitiva

$\boxed{3}$ una primitiva di $f(x) = \mathrm{e}^x$ è

$$F(x) = \mathrm{e}^x \quad \text{infatti } F'(x) = \mathrm{e}^x = f(x)$$

ma anche $F_c(x) = \mathrm{e}^x + c$ con $c \in \mathbb{R}$ è ancora primitiva

Integrale indefinito

Data $f : I \to \mathbb{R}$ indichiamo con

$$\int f \, dx$$

l'insieme, eventualmente vuoto, di tutte le primitive di f, detto integrale indefinito di f

Integrale indefinito

Data $f : I \to \mathbb{R}$ indichiamo con

$$\int f \, dx$$

l'insieme, eventualmente vuoto, di tutte le primitive di f, detto integrale indefinito di f

Teorema. Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una funzione. Se F, G sono primitive di f allora $\exists \, c \in \mathbb{R}$:

$$F(x) - G(x) = c, \quad \text{per ogni } x \in [a, b]$$

Quindi, due primitive di f su un intervallo differiscono per una costante

Teorema. Se F è una primitiva di f su I intervallo, allora tutte le altre primitive di f si ottengono aggiungendo una costante:

$$\int f\,dx = \{F + c \ : \ c \in \mathbb{R}\}$$

Teorema. Se F è una primitiva di f su I intervallo, allora tutte le altre primitive di f si ottengono aggiungendo una costante:

$$\int f\,dx = \{F + c \ : \ c \in \mathbb{R}\}$$

Problema: come si calcolano le primitive?

Teorema. Se F è una primitiva di f su I intervallo, allora tutte le altre primitive di f si ottengono aggiungendo una costante:

$$\int f\,dx = \{F + c \;:\; c \in \mathbb{R}\}$$

Problema: come si calcolano le primitive?

Generalmente, una tabella di derivate letta al contrario fornisce una tabella di primitive

Tabelle di derivate e primitive

Funzione	Derivata
kx	k
x^{β}	$\beta x^{\beta-1}$
$\log\|x\|$	x^{-1}
$\cos x$	$-\operatorname{sen} x$
$\operatorname{sen} x$	$\cos x$
a^x	$a^x \log a$
$\operatorname{arctg} x$	$\dfrac{1}{x^2+1}$
$\operatorname{tg} x$	$\dfrac{1}{\cos^2 x}$
$\operatorname{cotg} x$	$-\dfrac{1}{\operatorname{sen}^2 x}$
$\operatorname{arcsen} x$	$\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

Tabelle di derivate e primitive

Funzione	Derivata
kx	k
x^β	$\beta x^{\beta-1}$
$\log\|x\|$	x^{-1}
$\cos x$	$-\operatorname{sen} x$
$\operatorname{sen} x$	$\cos x$
a^x	$a^x \log a$
$\operatorname{arctg} x$	$\dfrac{1}{x^2+1}$
$\operatorname{tg} x$	$\dfrac{1}{\cos^2 x}$
$\operatorname{cotg} x$	$-\dfrac{1}{\operatorname{sen}^2 x}$
$\operatorname{arcsen} x$	$\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

Funzione	Primitiva
k (cost.)	kx
$\beta x^{\beta-1}$	x^β
x^{-1}	$\log\|x\|$
$-\operatorname{sen} x$	$\cos x$
$\cos x$	$\operatorname{sen} x$
$a^x \log a$	a^x
$\dfrac{1}{x^2+1}$	$\operatorname{arctg} x$
$\dfrac{1}{\cos^2 x}$	$\operatorname{tg} x$
$-\dfrac{1}{\operatorname{sen}^2 x}$	$\operatorname{cotg} x$
$\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\operatorname{arcsen} x$

Tabelle di derivate e primitive

Funzione	Derivata
kx	k
x^β	$\beta x^{\beta-1}$
$\log\lvert x\rvert$	x^{-1}
$\cos x$	$-\operatorname{sen} x$
$\operatorname{sen} x$	$\cos x$
a^x	$a^x \log a$
$\operatorname{arctg} x$	$\dfrac{1}{x^2+1}$
$\operatorname{tg} x$	$\dfrac{1}{\cos^2 x}$
$\operatorname{cotg} x$	$-\dfrac{1}{\operatorname{sen}^2 x}$
$\operatorname{arcsen} x$	$\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

Funzione	Primitiva
k (cost.)	kx
$\beta x^{\beta-1}$	x^β
x^{-1}	$\log\lvert x\rvert$
$-\operatorname{sen} x$	$\cos x$
$\cos x$	$\operatorname{sen} x$
$a^x \log a$	a^x
$\dfrac{1}{x^2+1}$	$\operatorname{arctg} x$
$\dfrac{1}{\cos^2 x}$	$\operatorname{tg} x$
$-\dfrac{1}{\operatorname{sen}^2 x}$	$\operatorname{cotg} x$
$\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\operatorname{arcsen} x$

Funzione	Primitiva
k (cost.)	kx
$x^\alpha,\ \alpha \neq -1$	$\dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}$
x^{-1}	$\log\lvert x\rvert$
$\operatorname{sen} x$	$-\cos x$
$\cos x$	$\operatorname{sen} x$
a^x	$\dfrac{a^x}{\log a}$
$\dfrac{1}{x^2+1}$	$\operatorname{arctg} x$
$\dfrac{1}{\cos^2 x}$	$\operatorname{tg} x$
$\dfrac{1}{\operatorname{sen}^2 x}$	$-\operatorname{cotg} x$
$\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\operatorname{arcsen} x$

Tabelle di primitive 1

Funzione	Primitiva
k (cost.)	kx
$x^\alpha, \ \alpha \neq -1$	$\dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}$
x^{-1}	$\log\lvert x\rvert$
$\operatorname{sen} x$	$-\cos x$
$\cos x$	$\operatorname{sen} x$
a^x	$\dfrac{a^x}{\log a}$
$\operatorname{senh} x$	$\cosh x$
$\cosh x$	$\operatorname{senh} x$

Funzione	Primitiva
$\dfrac{x}{x^2+k}$	$\dfrac{1}{2}\log\lvert x^2+k\rvert$
$\dfrac{1}{x^2+k^2}, \ k \neq 0$	$\dfrac{1}{k}\operatorname{arctg}\dfrac{x}{k}$
$\dfrac{1}{x^2-k^2}, \ k \neq 0$	$\dfrac{1}{2k}\log\left\lvert\dfrac{x-k}{x+k}\right\rvert$
$\dfrac{1}{\cos^2 x} = 1+\operatorname{tg}^2 x$	$\operatorname{tg} x$
$\dfrac{1}{\operatorname{sen}^2 x} = 1+\operatorname{cotg}^2 x$	$-\operatorname{cotg} x$
$\dfrac{1}{\cosh^2 x} = 1-\operatorname{tgh}^2 x$	$\operatorname{tgh} x$
$\dfrac{1}{\sqrt{k+x^2}}, \ k \neq 0$	$\log\lvert x+\sqrt{x^2+k}\rvert$
$\dfrac{1}{\sqrt{k^2-x^2}}, \ k > 0$	$\operatorname{arcsen}(\dfrac{x}{k})$

Tabella 1

Tabelle di primitive 2

Se f è una funzione derivabile con derivata continua:

Funzione	Primitiva
$f(x)^\alpha f'(x),\ \alpha \neq -1$	$\dfrac{f(x)^{\alpha+1}}{\alpha+1}$
$\dfrac{f'(x)}{f(x)}$	$\log\lvert f(x)\rvert$
$f'(x)\cos f(x)$	$\operatorname{sen} f(x)$
$f'(x)\operatorname{sen} f(x)$	$-\cos f(x)$

Funzione	Primitiva
$f'(x)a^{f(x)}$	$\dfrac{a^{f(x)}}{\log a}$
$\dfrac{f'(x)}{\sqrt{1-f(x)^2}}$	$\operatorname{arcsen} f(x)$
$\dfrac{f'(x)}{1+f(x)^2}$	$\operatorname{arctg} f(x)$
$\dfrac{f'(x)}{\sqrt{1+f(x)^2}}$	$\log\lvert f(x)+\sqrt{1+f(x)^2}\rvert$

Tabella 2

Proprietà delle primitive

Siano F e G primitive di f e g su I intervallo, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, allora

(i) αF è una primitiva di αf

(ii) $F + G$ è una primitiva di $f + g$

(iii) $F(x+\beta)$ è una primitiva di $f(x+\beta)$

(iv) se $\alpha \neq 0$ allora $\dfrac{F(\alpha x)}{\alpha}$ è una primitiva di $f(\alpha x)$

(v) se $\alpha \neq 0$ allora $\dfrac{F(\alpha x + \beta)}{\alpha}$ è primitiva di $f(\alpha x + \beta)$

Applicazioni

Equazioni differenziali lineari

Per l'equazione differenziale lineare del primo ordine

$$\boxed{y' = a(t)y + b(t)}$$

dove a, b sono funzioni continue

Equazioni differenziali lineari

Per l'equazione differenziale lineare del primo ordine

$$\boxed{y' = a(t)y + b(t)}$$

dove a, b sono funzioni continue, la generica soluzione è

$$y(t) = \mathrm{e}^{A(t)} \int \mathrm{e}^{-A(t)} b(t)\, dt$$

dove

$$A(t) = \int a(t)\, dt$$

è una primitiva di $a(t)$

Equazioni a variabili separabili

Per equazioni del tipo

$$\boxed{y' = h(t)g(y)}$$

dove h e g sono funzioni continue

Equazioni a variabili separabili

Per equazioni del tipo

$$\boxed{y' = h(t)g(y)}$$

dove h e g sono funzioni continue, dividendo per $g \neq 0$

$$\frac{y'}{g(y)} = h(t)$$

e integrando rispetto a t si ottiene

$$\int \frac{y'(t)}{g\big(y(t)\big)}\, dt = \int h(t)\, dt$$

ricavando infine la funzione incognita $y(t)$

Procedimento informale

Ricordando che $y' = dy/dt$, dividendo si ha

$$\frac{dy}{g(y)} = h(t)\,dt$$

e integrando a primo membro rispetto ad y e al secondo rispetto a t

$$\int \frac{dy}{g(y)} = \int h(t)\,dt$$

Risolti gli integrali, si ottiene

$$F(y) = H(t)$$

che, esplicitata rispetto a y, fornisce $y(t)$

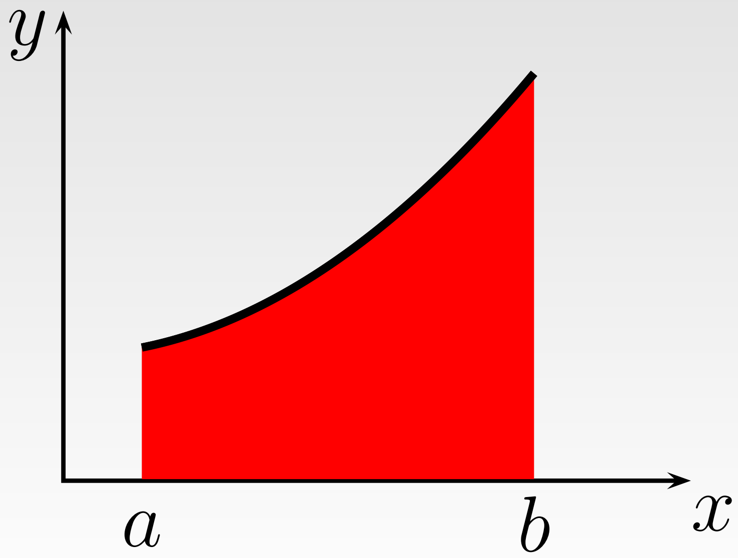
Integrale definito

Sottografico di una funzione

Sia $f : [a, b] \to [0, +\infty[$ una funzione limitata

Il sottografico (o rettangoloide o trapezoide) di f è l'insieme

$$SG(f) = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ a \le x \le b, \ 0 \le y \le f(x)\right\}$$



Area del sottografico

Problema: vogliamo "definire" e calcolare l'area del sottografico $SG(f)$ di f

Area del sottografico

Problema: vogliamo "definire" e calcolare l'area del sottografico $SG(f)$ di f

Idea fondamentale

Si inscrive e circoscrive il sottografico in regioni (rettangoli) la cui area sia calcolabile elementarmente ottenendo delle approssimazioni per difetto e per eccesso

L'area sarà l'elemento separatore tra le due classi d'approssimazioni

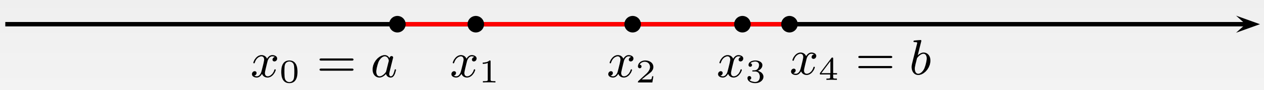
Sia f una funzione limitata in $[a, b]$

Prendiamo una partizione $\mathcal{P}$ di $[a, b]$ cioè un insieme finito di punti

$$\mathcal{P} = \{x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n\}$$

tali che

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b$$



Data una partizione $\mathcal{P}$ di $[a, b]$, definiamo la somma inferiore relativa alla partizione $\mathcal{P}$

$$s(f, \mathcal{P}) = \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1}) \inf_{[x_{i-1}, x_i]} f$$

e la somma superiore relativa alla partizione $\mathcal{P}$

$$S(f, \mathcal{P}) = \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1}) \sup_{[x_{i-1}, x_i]} f$$

Data una partizione $\mathcal{P}$ di $[a, b]$, definiamo la somma inferiore relativa alla partizione $\mathcal{P}$

$$s(f, \mathcal{P}) = \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1}) \inf_{[x_{i-1}, x_i]} f$$

e la somma superiore relativa alla partizione $\mathcal{P}$

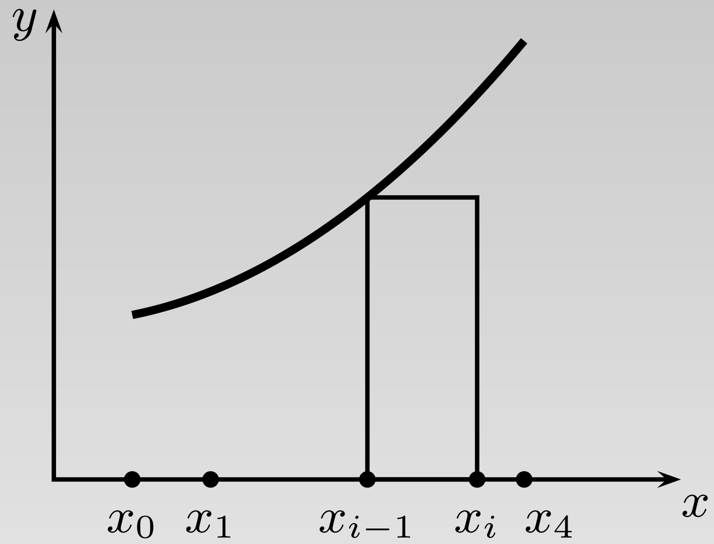
$$S(f, \mathcal{P}) = \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1}) \sup_{[x_{i-1}, x_i]} f$$

Si osserva che

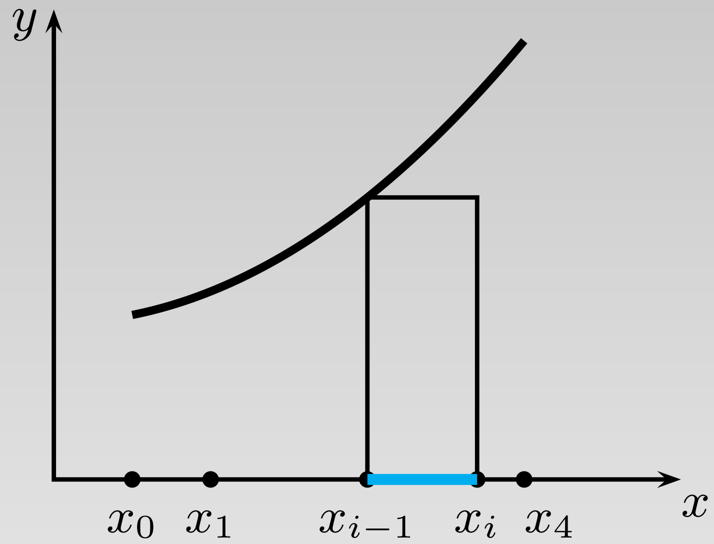
$$s(f, \mathcal{P}) \leq S(f, \mathcal{Q})$$

per ogni coppia di partizioni $\mathcal{P}$ e $\mathcal{Q}$ di $[a, b]$

Somma inferiore



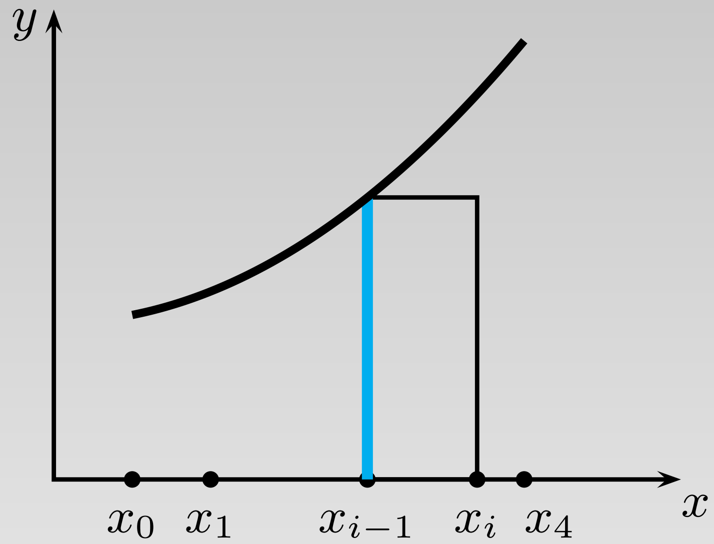
Consideriamo una partizione di $[a, b]$. Sul generico intervallo $[x_{i-1}, x_i]$ costruiamo il rettangolo di figura, con area



Consideriamo una partizione di $[a, b]$. Sul generico intervallo $[x_{i-1}, x_i]$ costruiamo il rettangolo di figura, con area

$$(x_i - x_{i-1})$$

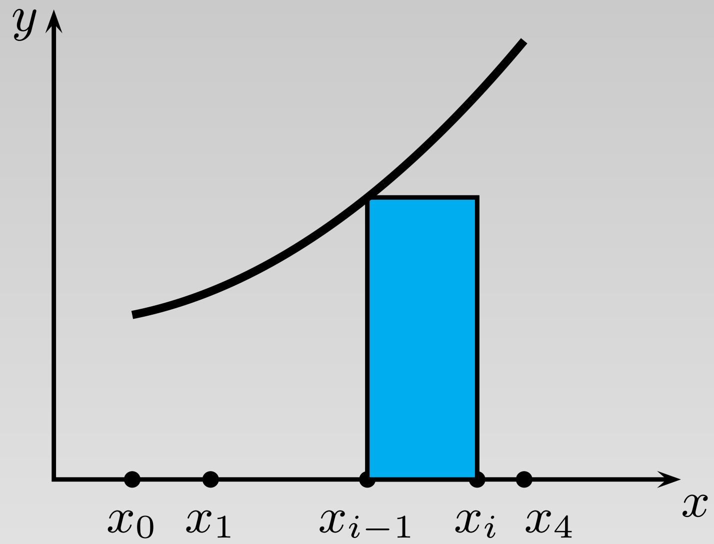
Somma inferiore



Consideriamo una partizione di $[a, b]$. Sul generico intervallo $[x_{i-1}, x_i]$ costruiamo il rettangolo di figura, con area

$$(x_i - x_{i-1}) \inf_{[x_{i-1}, x_i]} f$$

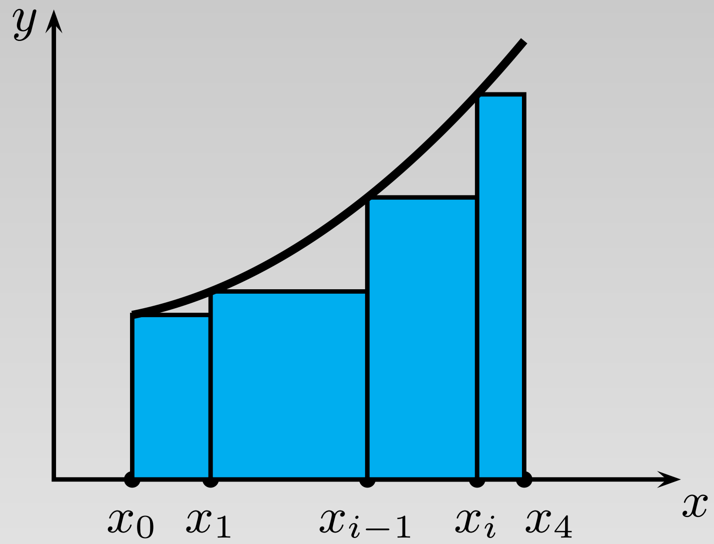
Somma inferiore



Consideriamo una partizione di $[a, b]$. Sul generico intervallo $[x_{i-1}, x_i]$ costruiamo il rettangolo di figura, con area

$$(x_i - x_{i-1}) \inf_{[x_{i-1}, x_i]} f$$

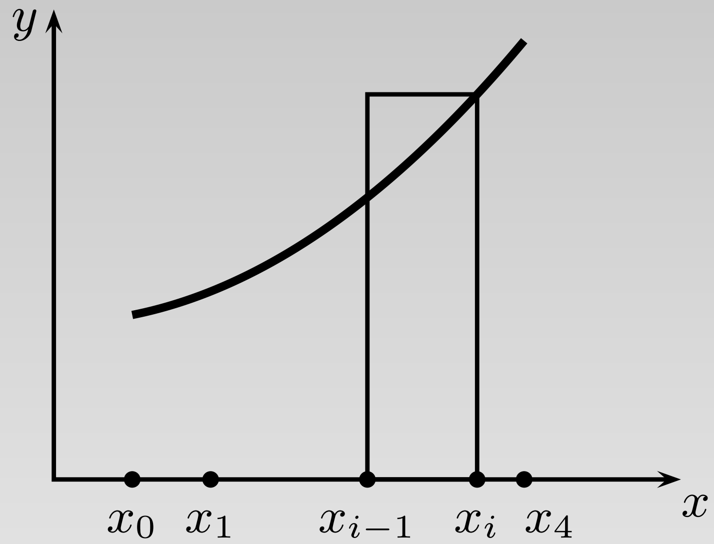
Somma inferiore



Consideriamo una partizione di $[a,b]$. Sul generico intervallo $[x_{i-1}, x_i]$ costruiamo il rettangolo di figura. Sommando

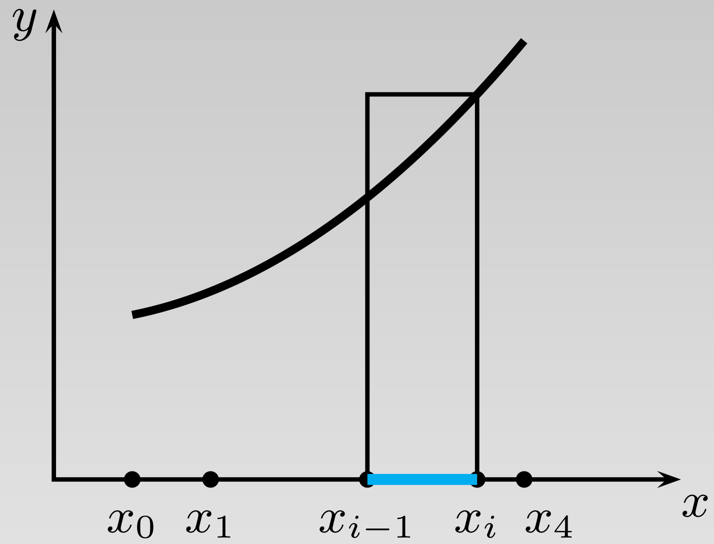
$$s(f,\mathcal{P}) = \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1}) \inf_{[x_{i-1},x_i]} f$$

Somma superiore



Analogamente consideriamo il rettangolo di figura, con area

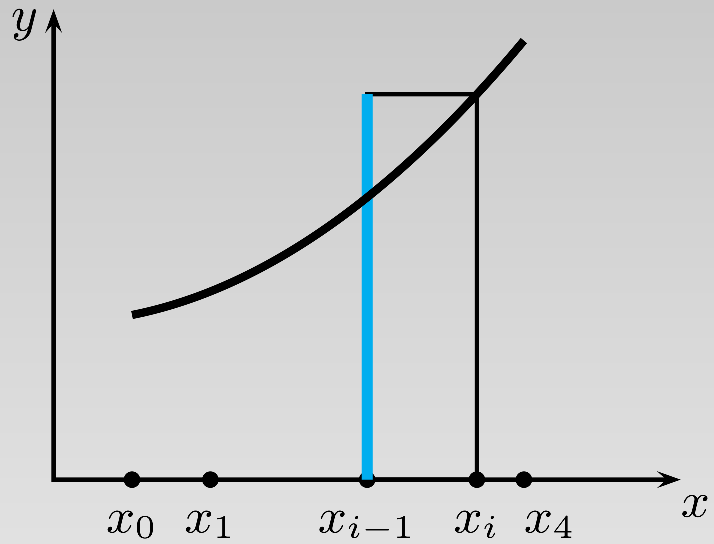
Somma superiore



Analogamente consideriamo il rettangolo di figura, con area

$$(x_i - x_{i-1})$$

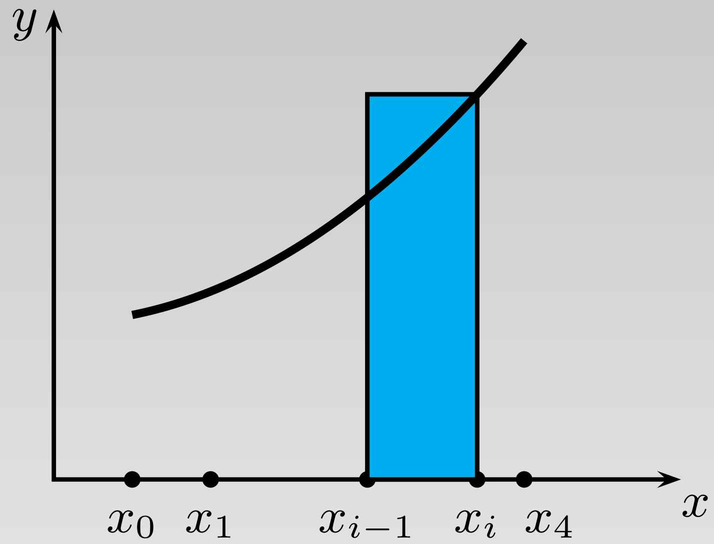
Somma superiore



Analogamente consideriamo il rettangolo di figura, con area

$$(x_i - x_{i-1}) \sup_{[x_{i-1},x_i]} f$$

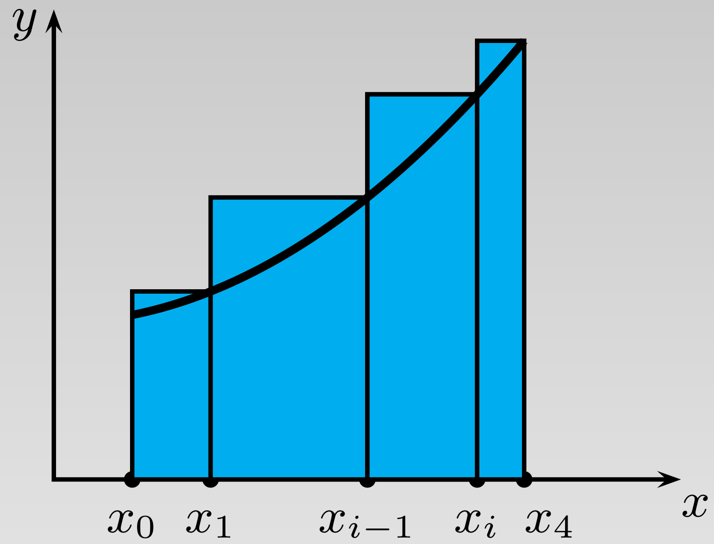
Somma superiore



Analogamente consideriamo il rettangolo di figura, con area

$$(x_i - x_{i-1}) \sup_{[x_{i-1}, x_i]} f$$

Somma superiore



Analogamente consideriamo il rettangolo di figura. Sommando

$$S(f, \mathcal{P}) = \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1}) \sup_{[x_{i-1}, x_i]} f$$

Interpretazione geometrica

Quindi $s(f, \mathcal{P})$ e $S(f, \mathcal{P})$ hanno l'evidente significato geometrico di somma delle aree di rettangoli inscritti e circoscritti, rispettivamente, al sottografico di f

Interpretazione geometrica

Quindi $s(f, \mathcal{P})$ e $S(f, \mathcal{P})$ hanno l'evidente significato geometrico di somma delle aree di rettangoli inscritti e circoscritti, rispettivamente, al sottografico di f

Problema: come variano le somme superiori e inferiori al variare della partizione $\mathcal{P}$?

Esempio

Consideriamo la funzione

$$f(x) = x^2 - 5x + 7, \quad x \in [0, 2]$$

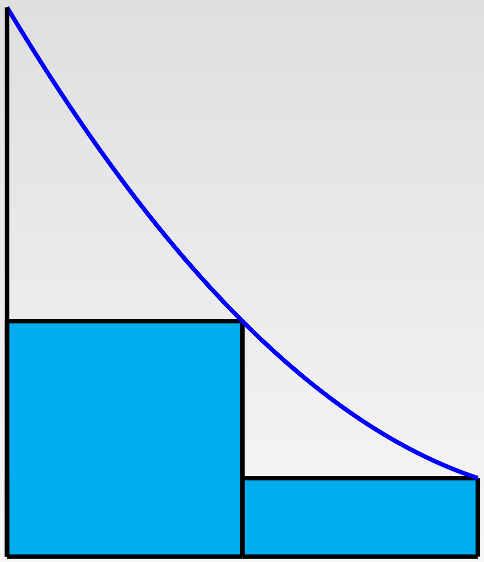
Compariamo $s(f, n)$ e $S(f, n)$ per partizioni in n intervallini di uguale ampiezza

Esempio

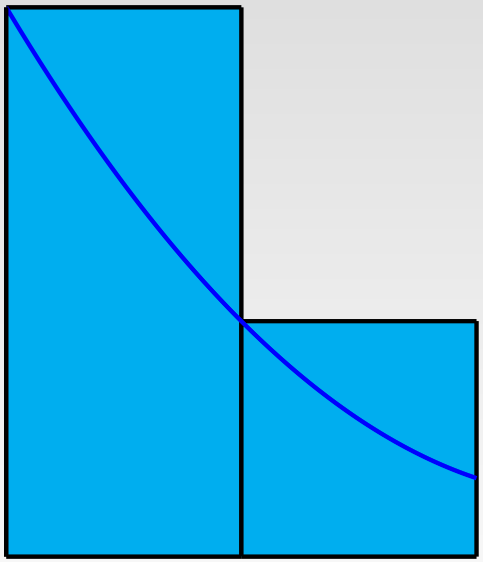
Consideriamo la funzione

$$f(x) = x^2 - 5x + 7, \quad x \in [0, 2]$$

Compariamo $s(f,n)$ e $S(f,n)$ per partizioni in n intervallini di uguale ampiezza



$s(f,2) = 4.0000$



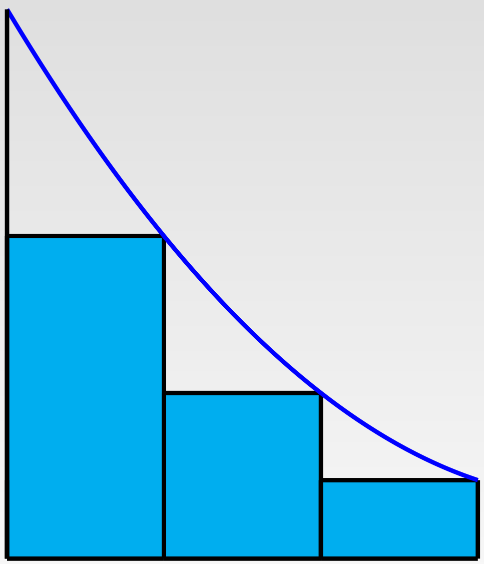
$S(f,2) = 10.0000$

Esempio

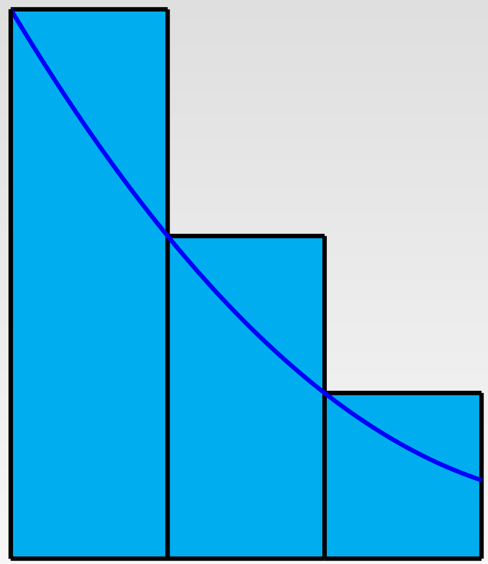
Consideriamo la funzione

$$f(x) = x^2 - 5x + 7, \quad x \in [0, 2]$$

Compariamo $s(f, n)$ e $S(f, n)$ per partizioni in n intervallini di uguale ampiezza



$s(f, 3) = 4.8148$



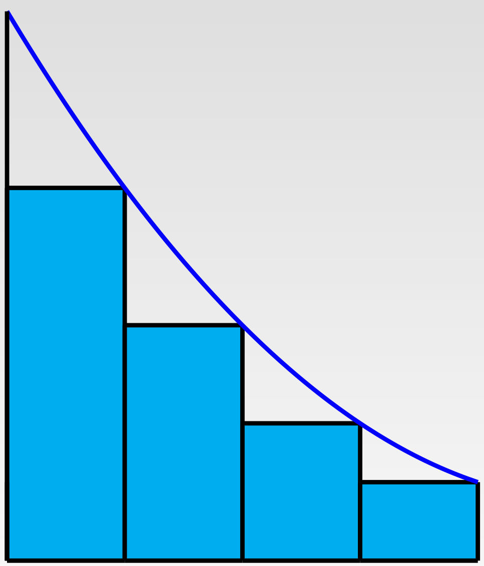
$S(f, 3) = 8.8148$

Esempio

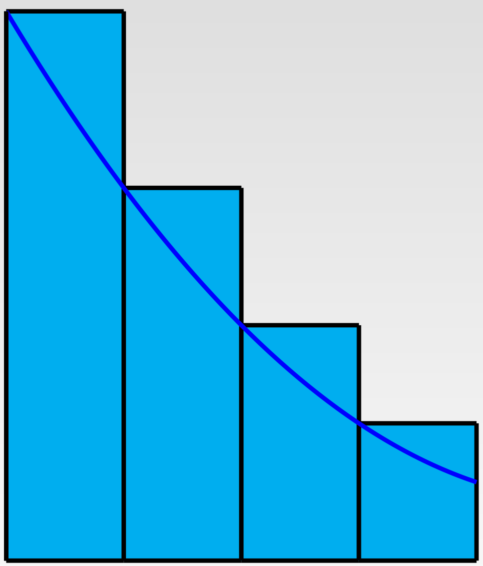
Consideriamo la funzione

$$f(x) = x^2 - 5x + 7, \quad x \in [0, 2]$$

Compariamo $s(f, n)$ e $S(f, n)$ per partizioni in n intervallini di uguale ampiezza



$s(f, 4) = 5.2500$



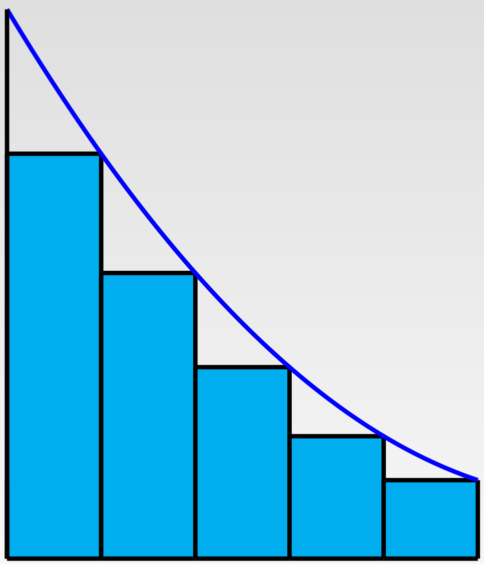
$S(f, 4) = 8.2500$

Esempio

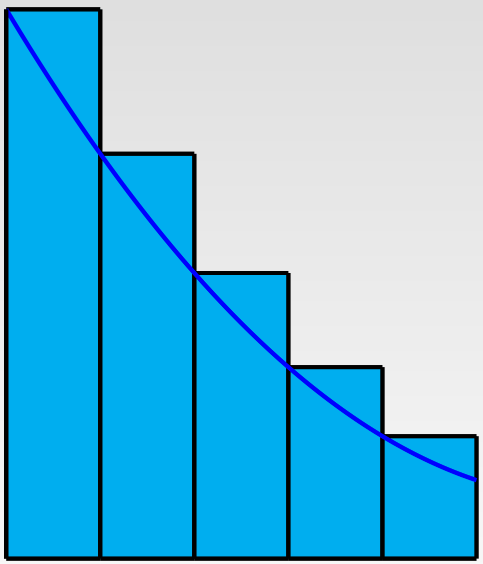
Consideriamo la funzione

$$f(x) = x^2 - 5x + 7, \quad x \in [0, 2]$$

Compariamo $s(f, n)$ e $S(f, n)$ per partizioni in n intervallini di uguale ampiezza



$s(f, 5) = 5.5200$



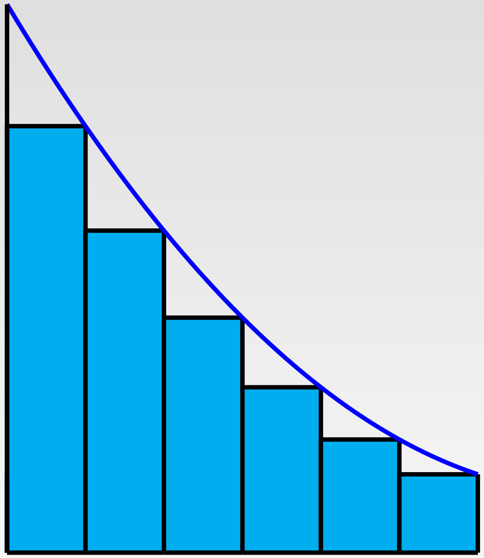
$S(f, 5) = 7.9200$

Esempio

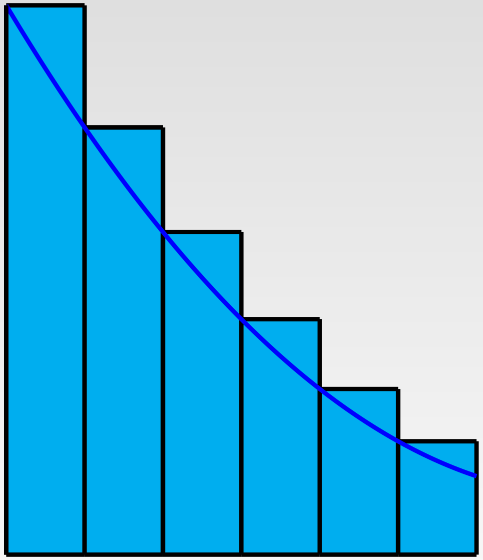
Consideriamo la funzione

$$f(x) = x^2 - 5x + 7, \quad x \in [0, 2]$$

Compariamo $s(f, n)$ e $S(f, n)$ per partizioni in n intervallini di uguale ampiezza



$s(f, 6) = 5.7037$



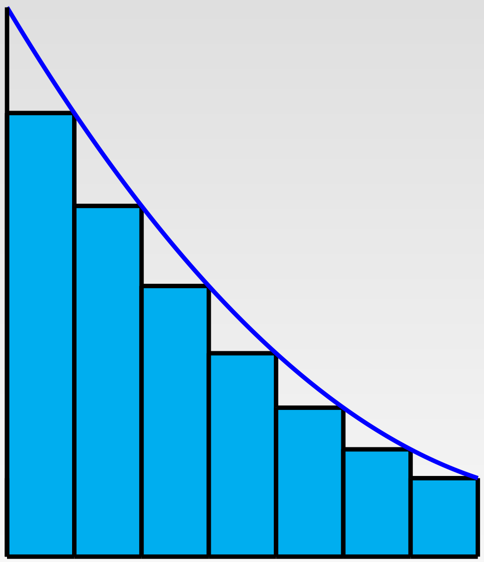
$S(f, 6) = 7.7037$

Esempio

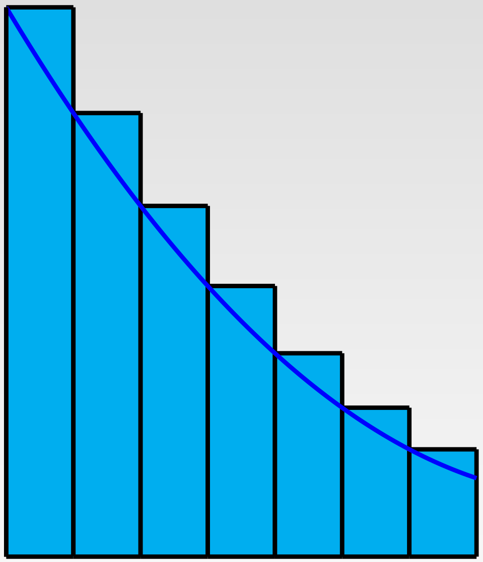
Consideriamo la funzione

$$f(x) = x^2 - 5x + 7, \quad x \in [0, 2]$$

Compariamo $s(f, n)$ e $S(f, n)$ per partizioni in n intervallini di uguale ampiezza



$s(f, 7) = 5.8367$



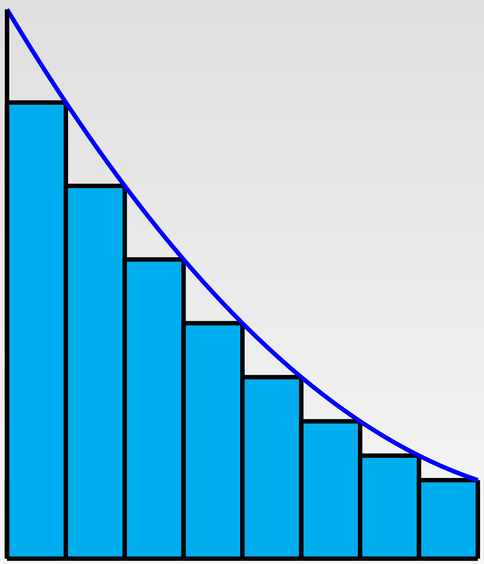
$S(f, 7) = 7.5510$

Esempio

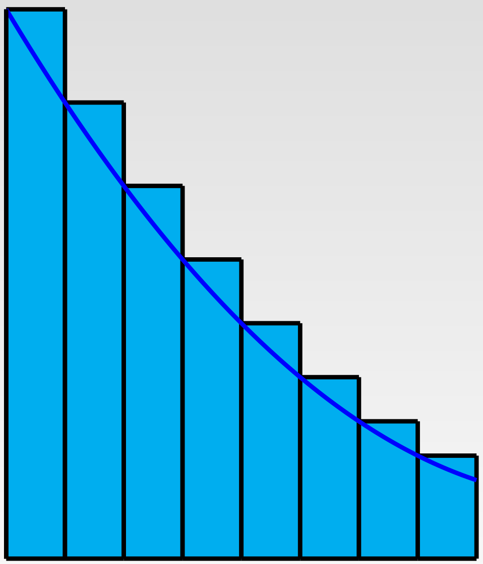
Consideriamo la funzione

$$f(x) = x^2 - 5x + 7, \quad x \in [0, 2]$$

Compariamo $s(f, n)$ e $S(f, n)$ per partizioni in n intervallini di uguale ampiezza



$s(f, 8) = 5.9375$



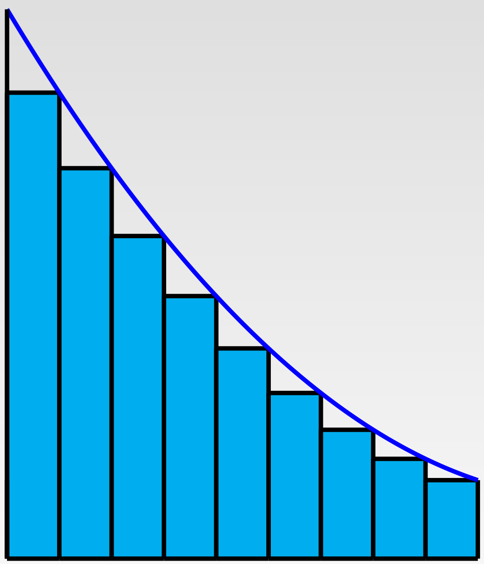
$S(f, 8) = 7.4375$

Esempio

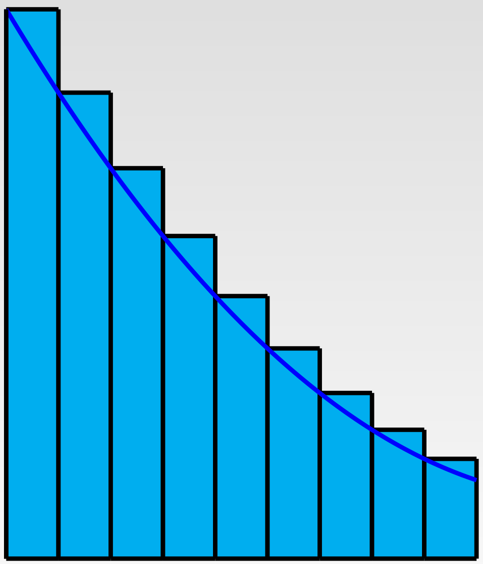
Consideriamo la funzione

$$f(x) = x^2 - 5x + 7, \quad x \in [0, 2]$$

Compariamo $s(f, n)$ e $S(f, n)$ per partizioni in n intervallini di uguale ampiezza



$s(f, 9) = 6.0165$



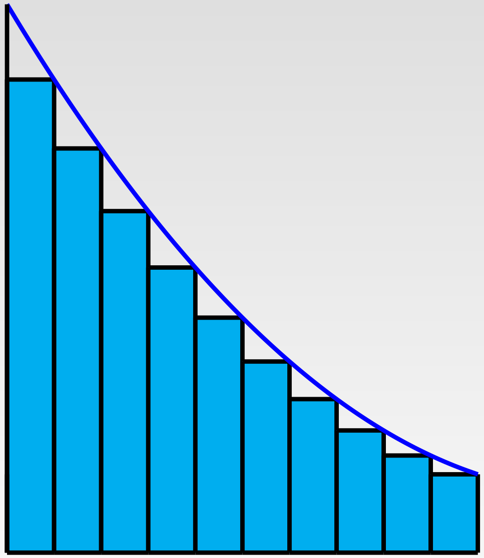
$S(f, 9) = 7.3498$

Esempio

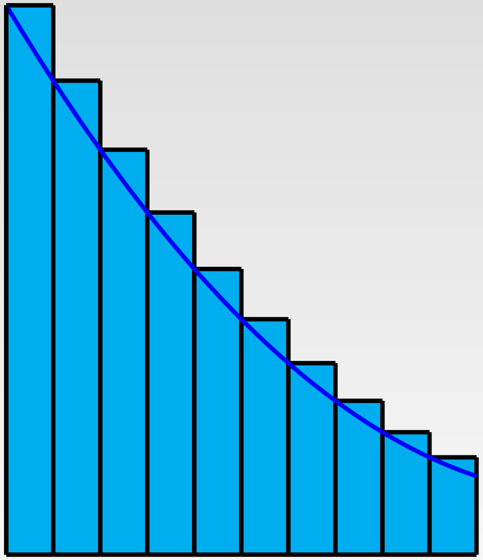
Consideriamo la funzione

$$f(x) = x^2 - 5x + 7, \quad x \in [0, 2]$$

Compariamo $s(f, n)$ e $S(f, n)$ per partizioni in n intervallini di uguale ampiezza



$s(f, 10) = 6.0800$



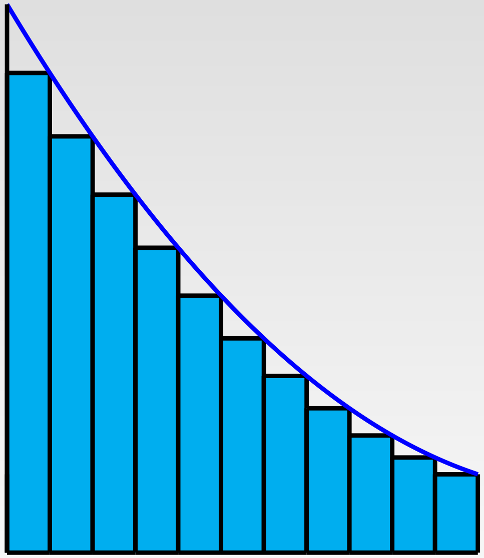
$S(f, 10) = 7.2800$

Esempio

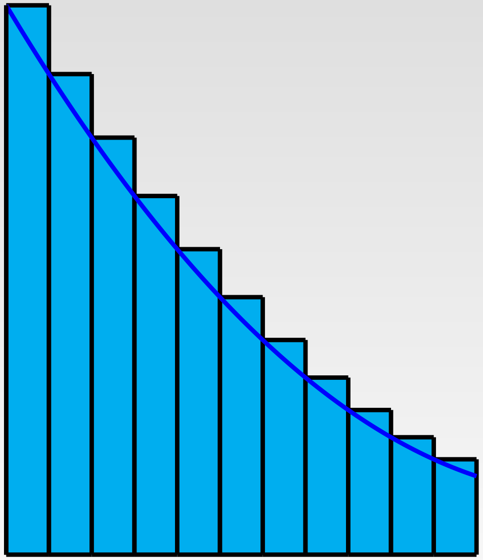
Consideriamo la funzione

$$f(x) = x^2 - 5x + 7, \quad x \in [0, 2]$$

Compariamo $s(f, n)$ e $S(f, n)$ per partizioni in n intervallini di uguale ampiezza



$s(f, 11) = 6.1322$



$S(f, 11) = 7.2231$

In tabella sono riportati i valori delle somme inferiori e superiori per varie partizioni in n intervallini di uguale ampiezza

n	$s(f,n)$	$S(f,n)$
5	5.54	7.92
10	6.08	7.28
100	6.6068	6.7268
1000	6.6606	6.6726
10000	6.6660	6.6672
100000	6.6666	6.6667

In tabella sono riportati i valori delle somme inferiori e superiori per varie partizioni in n intervallini di uguale ampiezza

n	$s(f,n)$	$S(f,n)$
5	5.54	7.92
10	6.08	7.28
100	6.6068	6.7268
1000	6.6606	6.6726
10000	6.6660	6.6672
100000	6.6666	6.6667

Dalla tabella si vede che la differenza tra le aree $S(f,n)$ e $s(f,n)$ diventa sempre più piccola

In tabella sono riportati i valori delle somme inferiori e superiori per varie partizioni in n intervallini di uguale ampiezza

n	$s(f,n)$	$S(f,n)$
5	5.54	7.92
10	6.08	7.28
100	6.6068	6.7268
1000	6.6606	6.6726
10000	6.6660	6.6672
100000	6.6666	6.6667

Dalla tabella si vede che la differenza tra le aree $S(f,n)$ e $s(f,n)$ diventa sempre più piccola

In effetti, calcolando l'integrale si troverà che

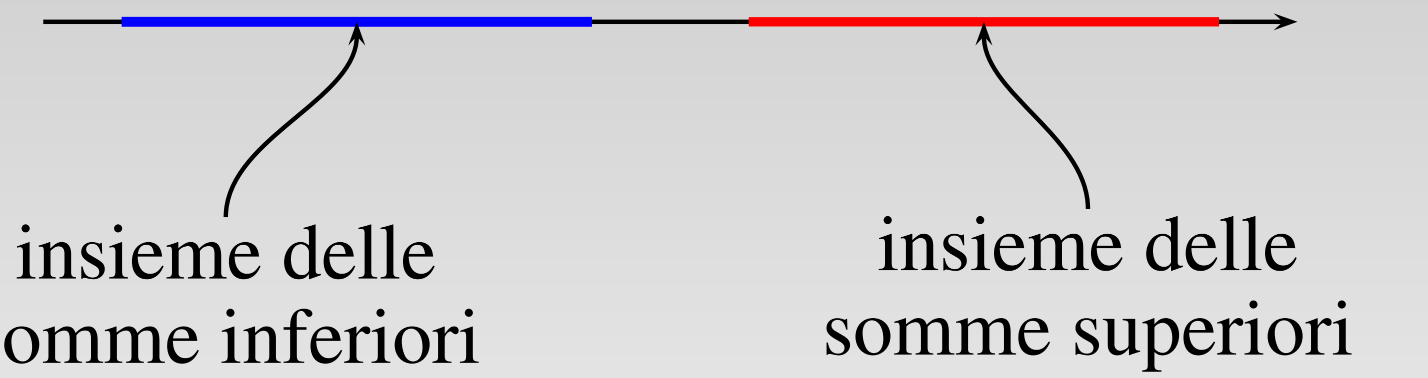
$$\int_0^2 x^2 - 5x + 7\,dx = \frac{20}{3} = 6.6666...$$

Integrale superiore e inferiore

Rappresentiamo tutte le possibili somme superiori ed inferiori sull’asse reale.

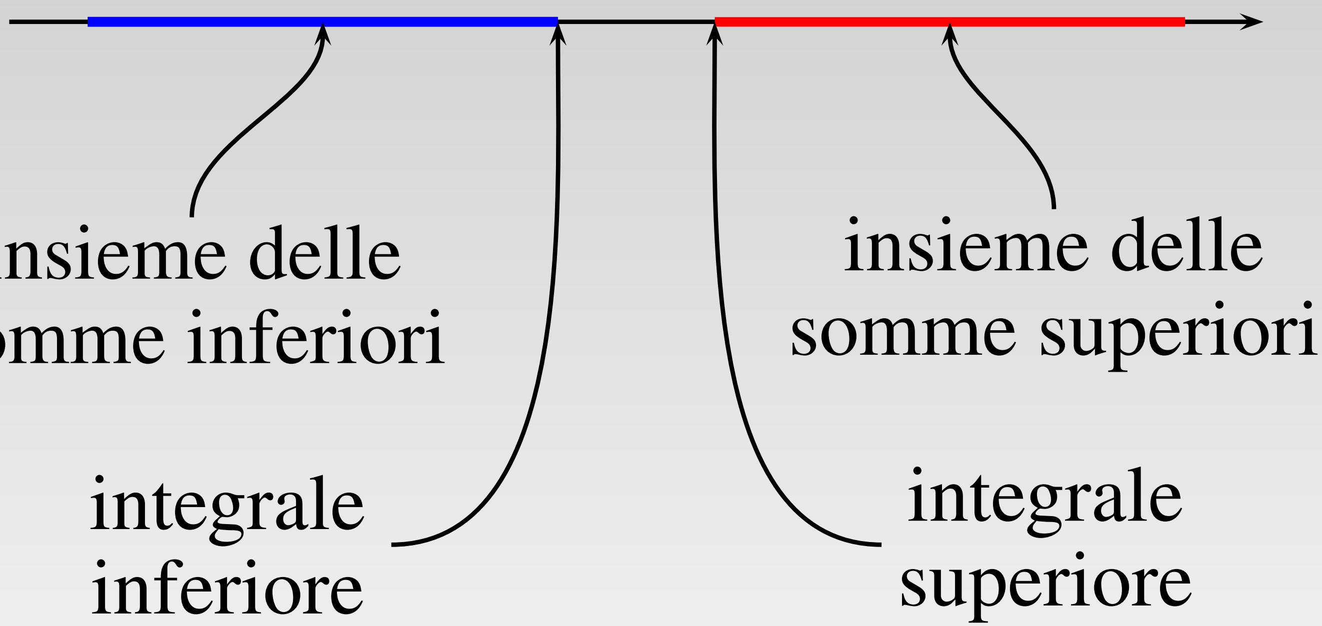
Integrale superiore e inferiore

Rappresentiamo tutte le possibili somme superiori ed inferiori sull'asse reale.



Integrale superiore e inferiore

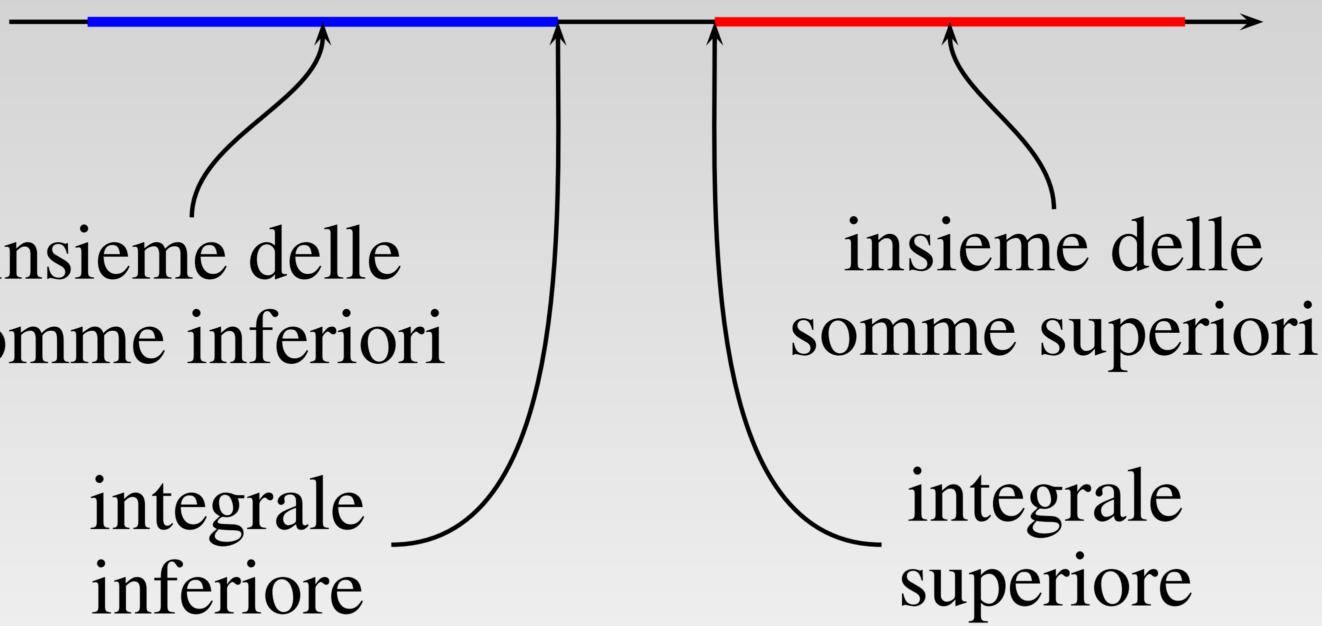
Rappresentiamo tutte le possibili somme superiori ed inferiori sull'asse reale.



$$\underline{\int_a^b} f \qquad\qquad \overline{\int_a^b} f$$

Integrale superiore e inferiore

Rappresentiamo tutte le possibili somme superiori ed inferiori sull'asse reale.



$$\underline{\int_a^b} f \qquad\qquad \overline{\int_a^b} f$$

In generale questi due numeri sono diversi

Più precisamente si definiscono

L'**integrale superiore** di f in $[a,b]$:

$$\overline{\int_a^b} f = \inf\{S(\mathcal{Q}) \ : \ \mathcal{Q} \text{ partiz. di } [a,b]\}$$

e l'**integrale inferiore** di f in $[a,b]$:

$$\underline{\int_a^b} f = \sup\{s(\mathcal{P}) \ : \ \mathcal{P} \text{ partiz. di } [a,b]\}$$

Più precisamente si definiscono

L'integrale superiore di f in $[a, b]$:

$$\overline{\int_a^b} f = \inf\{S(\mathcal{Q}) \ : \ \mathcal{Q} \text{ partiz. di } [a, b]\}$$

e l'integrale inferiore di f in $[a, b]$:

$$\underline{\int_a^b} f = \sup\{s(\mathcal{P}) \ : \ \mathcal{P} \text{ partiz. di } [a, b]\}$$

Poiché $s(\mathcal{P}) \leq S(\mathcal{Q})$ si ha che $\underline{\int_a^b} f \leq \overline{\int_a^b} f$

Integrale definito di Riemann

Se risulta $\underline{\int_a^b} f = \overline{\int_a^b} f$ allora si dice che f è **integrabile secondo Riemann** in $[a, b]$

Il valore comune

$$\int_a^b f(x)\,dx := \underline{\int_a^b} f = \overline{\int_a^b} f$$

si chiama **integrale (definito)** di f in $[a, b]$

Integrale definito di Riemann

Se risulta $\underline{\int_a^b} f = \overline{\int_a^b} f$ allora si dice che f è integrabile secondo Riemann in $[a, b]$

Il valore comune

$$\int_a^b f(x)\, dx := \underline{\int_a^b} f = \overline{\int_a^b} f$$

si chiama integrale (definito) di f in $[a, b]$

Geometricamente, l'integrale di Riemann rappresenta l'area del sottografico di f in $[a, b]$

Osservazione

La x che compare nel simbolo d'integrale è una variabile "muta". Ad esempio

$$\int_a^b f(t)\,dt, \quad \int_a^b f(u)\,du,$$

rappresentano ancora l'integrale di f su $[a,b]$

Esistenza di funzioni integrabili

Esempio. La funzione di Dirichlet

$$D(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in [0,1] \cap \mathbb{Q} \\ 0 & \text{se } x \in [0,1] \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$

non è integrabile in $[0,1]$. Infatti

$$\underline{\int_0^1} D = 0 \qquad \overline{\int_0^1} D = 1$$

Esistenza di funzioni integrabili

Esempio. La funzione di Dirichlet

$$D(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in [0,1] \cap \mathbb{Q} \\ 0 & \text{se } x \in [0,1] \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$

non è integrabile in $[0,1]$. Infatti

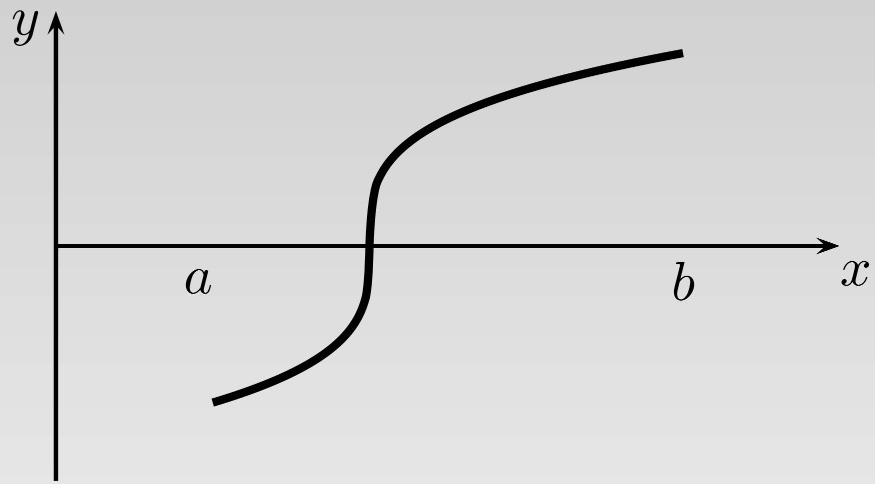
$$\underline{\int_0^1} D = 0 \qquad \overline{\int_0^1} D = 1$$

Ma

Teorema. Se $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ è continua allora f è integrabile

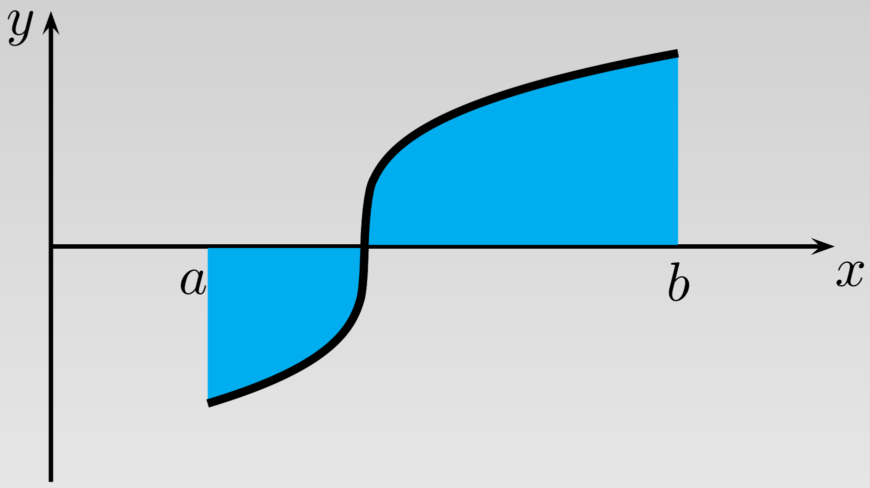
Funzioni di segno variabile

Se f cambia segno



Funzioni di segno variabile

Se f cambia segno

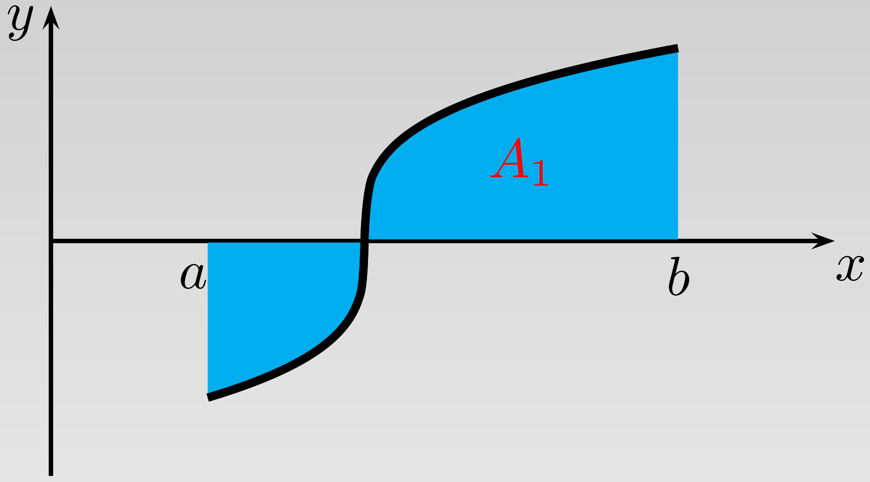


l'integrale rappresenta l'area "con segno"

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

Funzioni di segno variabile

Se f cambia segno

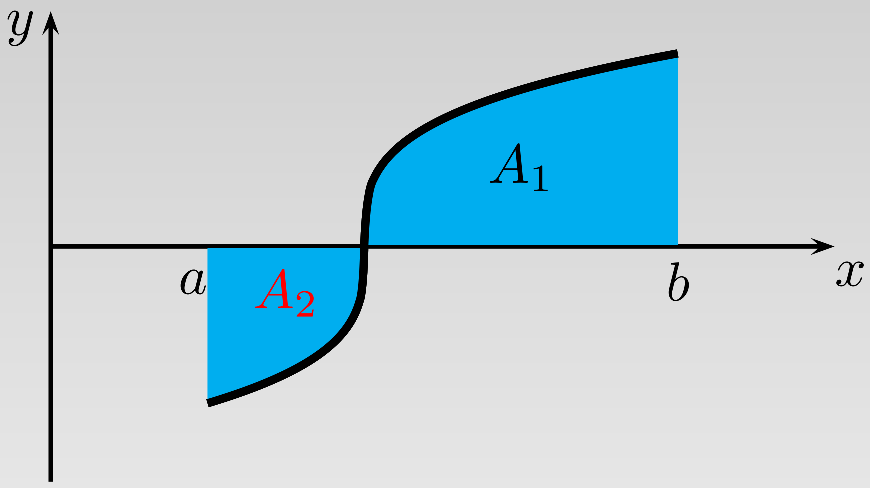


l'integrale rappresenta l'area "con segno"

$$\int_a^b f(x)\,dx = A_1$$

Funzioni di segno variabile

Se f cambia segno



l'integrale rappresenta l'area "con segno"

$$\int_a^b f(x)\,dx = A_1 - A_2$$

Proprietà dell'integrale

Proprietà fondamentali

Convenzione: se f è integrabile in $[a,b]$, si pone

$$\int_b^a f(x)\,dx := -\int_a^b f(x)\,dx$$

e

$$\int_a^a f(x)\,dx := 0$$

Proprietà fondamentali

Convenzione: se f è integrabile in $[a, b]$, si pone

$$\int_b^a f(x)\,dx := -\int_a^b f(x)\,dx$$

e

$$\int_a^a f(x)\,dx := 0$$

Linearità: se $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ sono integrabili e $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ allora anche $\alpha f + \beta g$ è integrabile e si ha

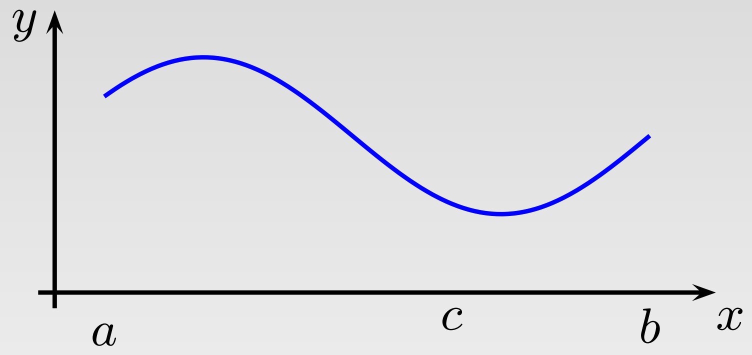
$$\int_a^b \left[\alpha f(x) + \beta g(x)\right] dx = \alpha \int_a^b f(x)\,dx + \beta \int_a^b g(x)\,dx$$

Additività: se a, b, c sono tre punti di un intervallo in cui f è integrabile allora si ha

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$$

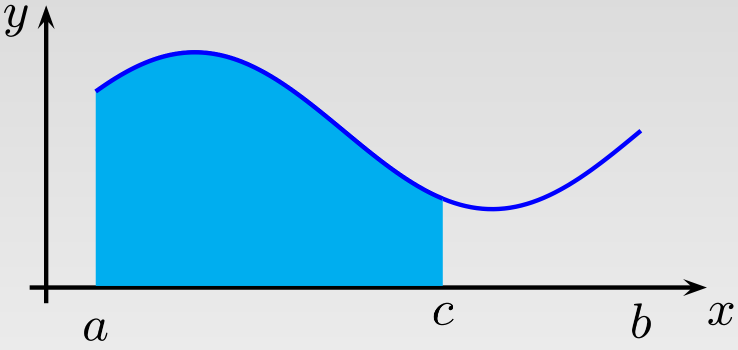
Additività: se a, b, c sono tre punti di un intervallo in cui f è integrabile allora si ha

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$$



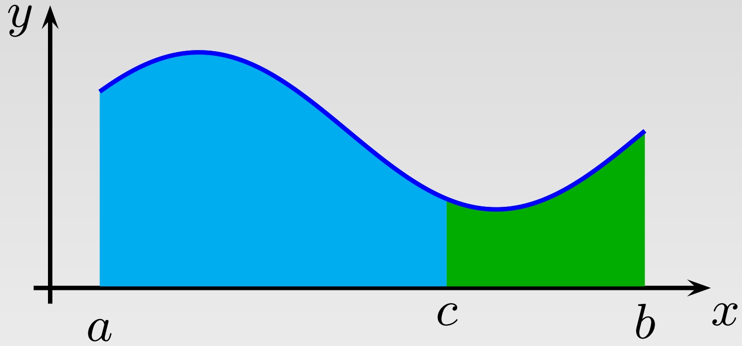
Additività: se a, b, c sono tre punti di un intervallo in cui f è integrabile allora si ha

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$$



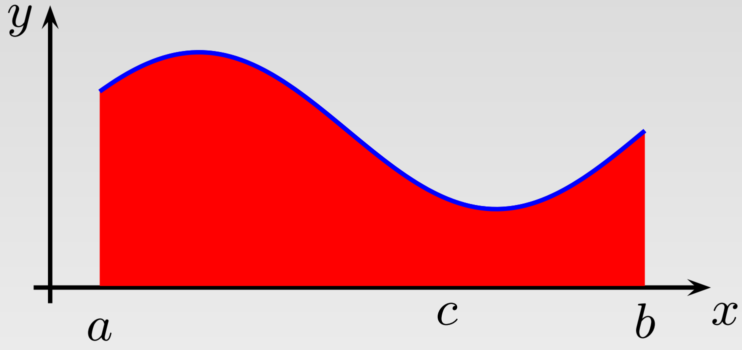
Additività: se a, b, c sono tre punti di un intervallo in cui f è integrabile allora si ha

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$$



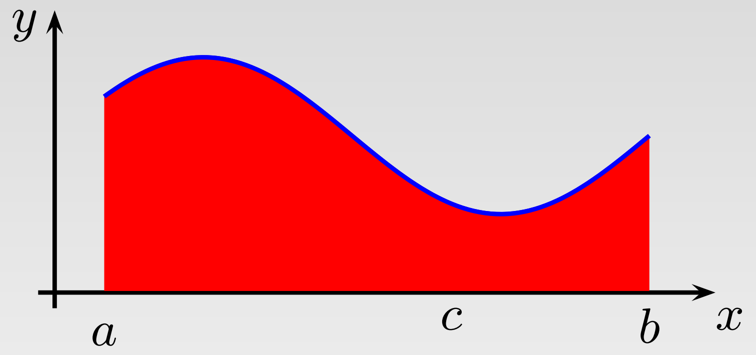
Additività: se a, b, c sono tre punti di un intervallo in cui f è integrabile allora si ha

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$$



Additività: se a, b, c sono tre punti di un intervallo in cui f è integrabile allora si ha

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$$



Monotonia: se $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ sono integrabili e se $f(x) \leq g(x)$ per ogni $x \in [a, b]$ allora

$$\int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b g(x)\,dx$$

Altre proprietà

Media integrale: se $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ è continua, esiste $c \in [a, b]$ tale che

$$\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)\, dx = f(c)$$

Altre proprietà

Media integrale: se $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ è continua, esiste $c \in [a, b]$ tale che

$$\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)\, dx = f(c)$$

o anche

$$\int_a^b f(x)\, dx = f(c)(b-a)$$

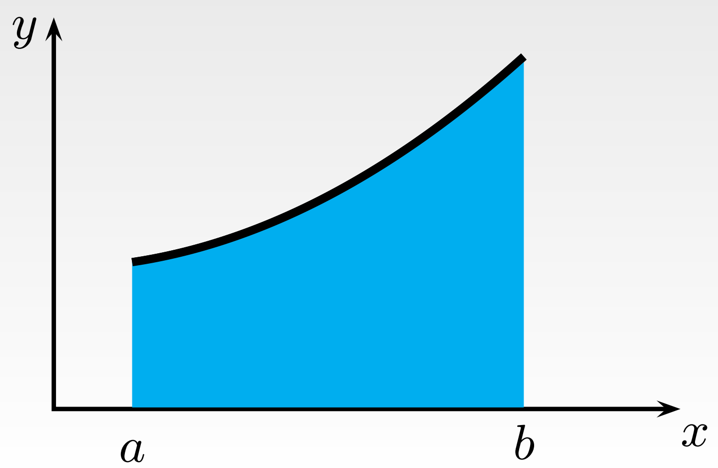
Altre proprietà

Media integrale: se $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ è continua, esiste $c \in [a, b]$ tale che

$$\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)\, dx = f(c)$$

o anche

$$\int_a^b f(x)\, dx = f(c)(b-a)$$



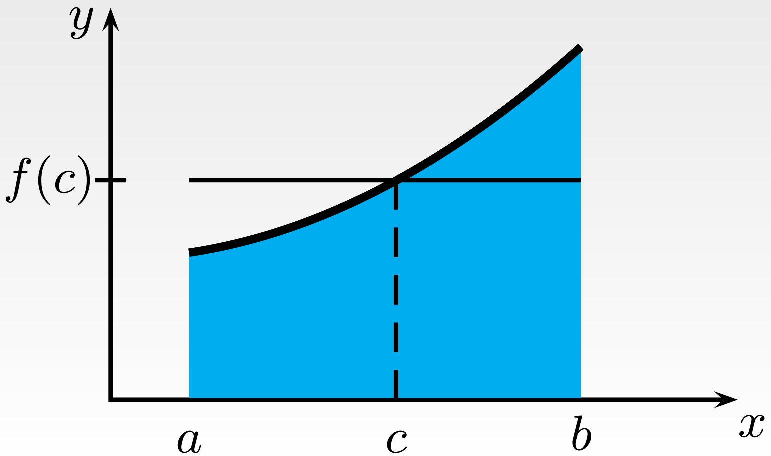
Altre proprietà

Media integrale: se $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ è continua, esiste $c \in [a, b]$ tale che

$$\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)\,dx = f(c)$$

o anche

$$\int_a^b f(x)\,dx = f(c)(b-a)$$



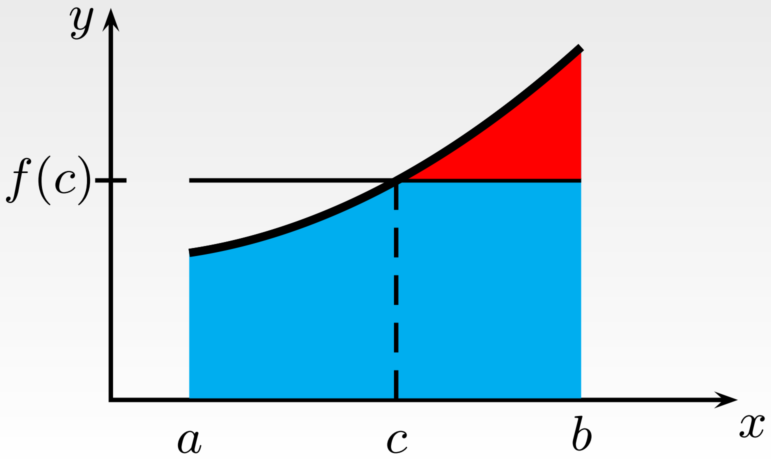
Altre proprietà

Media integrale: se $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ è continua, esiste $c \in [a,b]$ tale che

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx = f(c)$$

o anche

$$\int_a^b f(x)\,dx = f(c)(b-a)$$

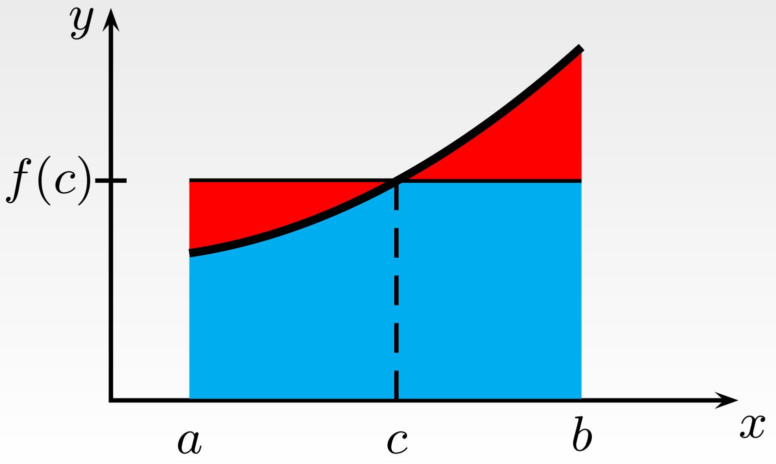


Media integrale: se $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ è continua, esiste $c \in [a,b]$ tale che

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx = f(c)$$

o anche

$$\int_a^b f(x)\,dx = f(c)(b-a)$$



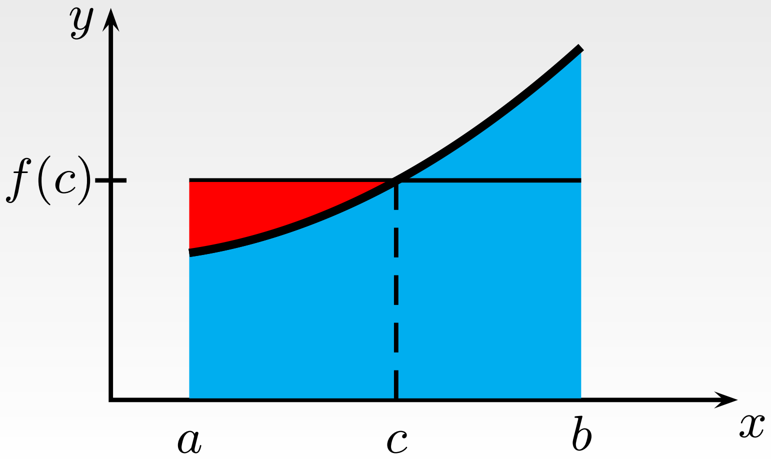
Altre proprietà

Media integrale: se $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ è continua, esiste $c \in [a, b]$ tale che

$$\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)\, dx = f(c)$$

o anche

$$\int_a^b f(x)\, dx = f(c)(b-a)$$



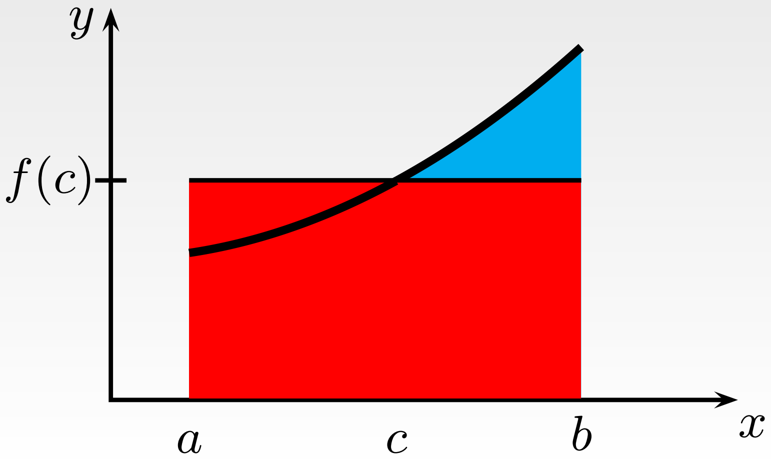
Altre proprietà

Media integrale: se $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ è continua, esiste $c \in [a,b]$ tale che

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx = f(c)$$

o anche

$$\int_a^b f(x)\,dx = f(c)(b-a)$$



Il teorema fondamentale del calcolo integrale

Il teorema fondamentale

Data una funzione continua, fornisce una sua primitiva in forma integrale

Teorema. Sia $f : I \to \mathbb{R}$ una funzione continua su I e sia $x_0 \in I$. La cosiddetta funzione integrale

$$\int_{x_0}^{x} f(t)\, dt$$

è una primitiva di f, ovvero è derivabile per ogni $x \in I$ e si ha

$$\frac{d}{dx} \int_{x_0}^{x} f(t)\, dt = f(x)$$

Conseguenza

Dal Teorema fondamentale si ottiene che se f è continua sull'intervallo I allora tutte le sue primitive sono del tipo

$$F(x) = \int_{x_0}^{x} f(t)\,dt + c,$$

al variare di $c \in \mathbb{R}$
Precisamente F è quella primitiva di f che nel punto x_0 assume il valore c

La formula fondamentale

Stabilisce una relazione gli integrali definiti e indefiniti

La formula fondamentale

Stabilisce una relazione gli integrali definiti e indefiniti

Se f è una funzione continua su $[a, b]$ si ha la formula fondamentale del calcolo integrale

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a) =: \Big[F(x)\Big]_a^b}$$

dove F è una qualsiasi primitiva di f su $[a, b]$

La formula fondamentale

Stabilisce una relazione gli integrali definiti e indefiniti

Se f è una funzione continua su $[a, b]$ si ha la formula fondamentale del calcolo integrale

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a) =: \Big[F(x)\Big]_a^b}$$

dove F è una qualsiasi primitiva di f su $[a, b]$

Conclusione: per calcolare un integrale definito di f, è sufficiente conoscerne una primitiva F

Metodi di integrazione

Integrazione per parti

Se f e g sono due funzioni derivabili allora

$$(fg)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

Integrazione per parti

Se f e g sono due funzioni derivabili allora

$$(fg)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

Se f' e g' sono funzioni continue, integrando si ha

$$f(x)g(x) = \int f'(x)g(x)\,dx + \int f(x)g'(x)\,dx$$

Integrazione per parti

Se f e g sono due funzioni derivabili allora

$$(fg)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

Se f' e g' sono funzioni continue, integrando si ha

$$f(x)g(x) = \int f'(x)g(x)\,dx + \int f(x)g'(x)\,dx$$

Riordinando i termini si ottiene la formula di integrazione per parti

$$\boxed{\int f(x)g'(x)\,dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)\,dx}$$

che sposta la ricerca di una primitiva del prodotto fg' alla ricerca di una primitiva del prodotto $f'g$

Di questa formula vale anche la versione per l'integrale definito: se f e g sono derivabili su $[a, b]$ con derivate continue allora

$$\boxed{\int_a^b f(x)g'(x)\,dx = \Big[f(x)g(x)\Big]_a^b - \int_a^b f'(x)g(x)\,dx}$$

Di questa formula vale anche la versione per l'integrale definito: se f e g sono derivabili su $[a, b]$ con derivate continue allora

$$\boxed{\int_a^b f(x)g'(x)\,dx = \Big[f(x)g(x)\Big]_a^b - \int_a^b f'(x)g(x)\,dx}$$

L'integrazione per parti è molto utile per calcolare integrali delle seguenti classi di funzioni:

$$x^n \mathrm{e}^{\alpha x}, \qquad x^n \operatorname{sen}\beta x, \qquad x^n \cos\beta x,$$

$$\mathrm{e}^{\alpha x} \operatorname{sen}\beta x, \qquad \mathrm{e}^{\alpha x}\cos\beta x, \qquad x^n \operatorname{arctg} x,$$

$$x^n \operatorname{arcsen} x, \qquad x^\alpha \log x,$$

dove $n \in \mathbb{N}$ e $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

Integrazione per sostituzione

Sia $g : [c, d] \to [a, b]$ invertibile e derivabile con derivata continua. Se F è primitiva di f, per la formula di derivazione delle funzioni composte si ottiene

$$\frac{d}{dx}\big[F(g(x))\big] = f\big(g(x)\big)g'(x) \tag{1}$$

Integrazione per sostituzione

Sia $g : [c, d] \to [a, b]$ invertibile e derivabile con derivata continua. Se F è primitiva di f, per la formula di derivazione delle funzioni composte si ottiene

$$\frac{d}{dx}\big[F(g(x))\big] = f\big(g(x)\big)g'(x) \tag{1}$$

Integrando a primo membro in $[g^{-1}(a), g^{-1}(b)]$ si ha

$$\int_{g^{-1}(a)}^{g^{-1}(b)} \frac{d}{dx}\big[F(g(x))\big]dx = \Big[F(g(x))\Big]_{g^{-1}(a)}^{g^{-1}(b)} = F(b) - F(a)$$

Integrazione per sostituzione

Sia $g : [c, d] \to [a, b]$ invertibile e derivabile con derivata continua. Se F è primitiva di f, per la formula di derivazione delle funzioni composte si ottiene

$$\frac{d}{dx}\left[F(g(x))\right] = f\big(g(x)\big)g'(x) \tag{1}$$

Integrando a primo membro in $[g^{-1}(a), g^{-1}(b)]$ si ha

$$\int_{g^{-1}(a)}^{g^{-1}(b)} \frac{d}{dx}\left[F(g(x))\right]dx = \Big[F(g(x))\Big]_{g^{-1}(a)}^{g^{-1}(b)} = F(b) - F(a)$$

e, se f è continua in $[a, b]$, si ha

$$F(b) - F(a) = \int_a^b f(t)\,dt$$

Integrando in $[g^{-1}(a), g^{-1}(b)]$ ambo i membri della (1) e utilizzando le due uguaglianze precedenti si ha la formula di integrazione per sostituzione

$$\boxed{\int_a^b f(t)\,dt = \int_{g^{-1}(a)}^{g^{-1}(b)} f\big(g(x)\big)\,g'(x)\,dx}$$

Integrando in $[g^{-1}(a), g^{-1}(b)]$ ambo i membri della (1) e utilizzando le due uguaglianze precedenti si ha la formula di integrazione per sostituzione

$$\boxed{\int_a^b f(t)\,dt = \int_{g^{-1}(a)}^{g^{-1}(b)} f\big(g(x)\big)g'(x)\,dx}$$

La stessa si può applicare al calcolo degli integrali indefiniti: se f è una funzione continua e g una funzione invertibile e derivabile con derivata continua, allora

$$\boxed{\int f(t)\,dt = \Big[\int f\big(g(x)\big)g'(x)\,dx\Big]^{x=g^{-1}(t)}}$$

dove le parentesi quadre significano che la funzione entro parentesi va calcolata in $x = g^{-1}(t)$

Regola mnemonica

Come regola mnemonica per il calcolo di

$$\int_a^b f(t)\,dt$$

mediante un cambiamento di variabile $t = g(x)$ si può tenere a mente questo schema:

Regola mnemonica

Come regola mnemonica per il calcolo di

$$\int_a^b f(t)\,dt = \int \qquad f(\qquad)$$

mediante un cambiamento di variabile $t = g(x)$ si può tenere a mente questo schema:

Regola mnemonica

Come regola mnemonica per il calcolo di

$$\int_a^b f(t)\,dt = \int \qquad f\big(g(x)\big)$$

mediante un cambiamento di variabile $t = g(x)$ si può tenere a mente questo schema:

- t viene sostituito da $g(x)$

Regola mnemonica

Come regola mnemonica per il calcolo di

$$\int_a^b f(t)\, dt = \int \qquad f\big(g(x)\big)\, g'(x)\, dx$$

mediante un cambiamento di variabile $t = g(x)$ si può tenere a mente questo schema:

- t viene sostituito da $g(x)$
- dt viene sostituito da $g'(x)dx$

Regola mnemonica

Come regola mnemonica per il calcolo di

$$\int_a^b f(t)\,dt = \int_{g^{-1}(a)}^{g^{-1}(b)} f\big(g(x)\big)\,g'(x)\,dx$$

mediante un cambiamento di variabile $t = g(x)$ si può tenere a mente questo schema:

- t viene sostituito da $g(x)$
- dt viene sostituito da $g'(x)dx$
- gli estremi di integrazione a e b vengono sostituiti da numeri reali u, v tali che $g(u) = a$, $g(v) = b$ (infatti essendo g invertibile si ha $u = g^{-1}(a)$ e $v = g^{-1}(b)$)