Università degli Studi di Udine
Facoltà di Scienze Matematiche Fisiche e Naturali
Corso di Laurea in Matematica

Dispense sulle Equazioni Differenziali Ordinarie

Paolo Baiti

Anno Accademico 2014/2015
(versione alpha del 12.01.2015)

Indice

1 Definizioni di base **1**

Definizioni 1

Regolarità delle soluzioni 5

Alcune considerazioni sulla forma normale 6

2 Due classici teoremi di esistenza **10**

Il Teorema di Cauchy-Lipschitz 10

Esistenza e unicità per equazioni di ordine N 17

Il Teorema di Peano 18

Approfondimenti 28

Altre dimostrazioni del Teorema di Cauchy-Lipschitz 28

Altre dimostrazioni del Teorema di Peano 31

Estensione del concetto di soluzione 33

3 Unicità e prolungabilità **35**

Unicità locale e globale 35

Conseguenze sulle traiettorie e sulle orbite 37

Il fenomeno di Peano 39

Prolungamenti - Soluzioni massimali 44

Fuga dai compatti 49

Alcune conseguenze della fuga dai compatti 50

Approfondimenti 61

Dimostrazione del Teorema della chiusura del grafico: caso generale. 61

4 Alcuni criteri di esistenza globale **63**

Criteri di compattezza e limitatezza 63

Criterio delle direttrici di Liapunov 66

Teoremi di esistenza globale 69

Esempi ed esercizi 72

5 Dipendenza dai dati iniziali 79
Dipendenza continua dai dati iniziali 80
Differenziabilità rispetto ai dati iniziali 84
Dipendenza continua rispetto al campo vettoriale 85
Approfondimenti 89
Cenni ai sistemi dinamici 89
Dimostrazione del Teorema 5.10 91
Dimostrazione del Teorema 5.12 92
Dimostrazione del Teorema 5.13 94

6 Analisi qualitativa 96
Il Teorema del confronto 96
Il criterio dell'asintoto 100
Esempi ed esercizi 102
Analisi di un sistema di Lotka-Volterra 113

7 Sistemi autonomi e integrali primi 120
Integrali primi e sistemi conservativi 120
Sistemi di ordine 2 conservativi: il caso dell'energia 123
Il pendolo non lineare senza attrito 125
La ricerca di integrali primi 134
Il sistema preda-predatore di Lotka-Volterra 144

8 Alcune classi di equazioni integrabili 149
Equazioni lineari a coefficienti continui di ordine 1 149
Equazioni di Bernoulli 151
L'equazione di Verhulst 152
Equazioni omogenee 153
Equazioni riconducibili a equazioni omogenee o a variabili separabili 155
Alcune classi di equazioni di ordine 2 160
Il problema della fune inestensibile 165
Alcune classi di equazioni in forma non normale 168
Il problema della brachistòcrona 170
Equazioni di Eulero 174

9 Sistemi lineari **178**
Nozioni e risultati di base sulle equazioni lineari 178
Sistemi lineari omogenei 180
Sistemi lineari non omogenei 184
Sistemi lineari a coefficienti costanti 186
Esponenziale di una matrice 188
Calcolo della matrice esponenziale 191
Matrici della forma $S + N$ con S semisemplice, N nilpotente. 196
Caso generale: decomposizione $S + N$. 197
Esempi ed esercizi 200
Forma canonica di Jordan 211
Esercizi 215
Equazioni di ordine n a coefficienti costanti 218
Equazioni omogenee 219
Equazioni non omogenee: il metodo per simiglianza 224
Equazioni di ordine n a coefficienti continui 231
Esercizi 234
Approfondimenti 236
Sulla differenziabilità delle mappa $t \mapsto \mathrm{e}^{tA}$ 236

10 Alcuni cenni alle soluzioni periodiche **238**
Un teorema di esistenza di soluzioni periodiche 238
Applicazione: l'oscillatore armonico con resistenza del mezzo 246

11 Il metodo di separazione delle variabili **251**
Separazione delle variabili per PDE 251
Serie di Fourier 254
Richiami sugli spazi di Hilbert 254
Serie di Fourier trigonometriche in L^2 256
Alcune proprietà - Sviluppo in serie di seni e di coseni 260
Convergenza puntuale e uniforme 262
Alcuni esempi 268
Alcune applicazioni alle PDE 271
Il problema misto per l'equazione omogenea del calore unidimensionale 271
La corda vibrante fissata ai due estremi 275
Il problema di Dirichlet per l'equazione di Laplace sulla palla 2-dimensionale 279
Il metodo di Fourier 286

Il problema misto per l'equazione del calore unidimensionale non omogenea 286

12 Esercizi di approfondimento 289
Analisi qualitativa 289
Analisi qualitativa delle soluzioni dell'equazione (7.17) 289
Analisi qualitativa delle soluzioni del sistema (7.22) 303
Analisi delle soluzioni del sistema (7.5) 309
Altri esercizi 314

13 Il metodo delle caratteristiche 336
L'equazione lineare omogenea del trasporto 336
L'equazione lineare non omogenea del trasporto 339
L'equazione semilineare del trasporto 341
L'equazione quasilineare del trasporto 345
Cenni al metodo delle caratteristiche 349
Approfondimenti 354
Il principio di Duhamel 354
Dipendenza continua rispetto ai dati 357

Appendice 359
Alcuni risultati di topologia 359
Alcuni richiami di Analisi Matematica I e II 366
La norma degli operatori 368
Richiami sulle serie di funzioni 370
Sulla convergenza uniforme delle serie di Fourier 372

Bibliografia 374

Introduzione

L'obiettivo di queste dispense è quello di approfondire la preparazione riguardante i sistemi di equazioni differenziali ordinarie, già incontrati nel corso di Analisi Matematica II. Verranno quindi supposte note le definizioni di base di equazione/sistemi di equazioni differenziali, il concetto di soluzione, di problema di Cauchy, come anche il Teorema di esistenza di Cauchy-Lipschitz, le equazioni a variabili separabili e le equazioni lineari di ordine n a coefficienti costanti alle quali si possa applicare il metodo per simiglianza, tutti argomenti già affrontati durante il corso di Analisi Matematica II. Chi non li ricordasse o avesse perso familiarità con qualcuno di essi, è invitato a ripassarli, sebbene nei Capitoli 1 e 2 si farà un breve riassunto dei concetti e risultati principali. Va da sé ricordare che tutti gli argomenti dell'Analisi Matematica, come anche alcuni dell'Algebra Lineare, sono propedeutici alla lettura e alla comprensione delle dispense. In particolare, oltre alle sopra citate nozioni di base sulle equazioni differenziali, saranno fondamentali il calcolo differenziale per funzioni di una o più variabili e il calcolo integrale, soprattutto l'integrazione indefinita per funzioni di una variabile reale, le serie di funzioni e i loro criteri di convergenza. Altri strumenti utilizzati in maniera minore: asintoticità per funzioni di una variabile, criteri di convergenza per integrali impropri, compattezza in spazi metrici, il Teorema del Dini della funzione implicita (alcuni di questi sono richiamati nell'Appendice finale).

La prima parte delle dispense affronta questioni di carattere più teorico e astratto; nel Capitolo 2 vengono trattati i due più classici teoremi di esistenza, quello di Cauchy-Lipschitz, già incontrato lo scorso anno, e quello di Peano che lo generalizza al caso di un campo vettoriale solamente continuo. Il Capitolo 3 è dedicato alla questione dell'unicità delle soluzioni dei relativi problemi di Cauchy e alla possibilità di prolungare le soluzioni fuori dall'intervallo di definizione individuato dai due teoremi di esistenza. Ciò porterà alla definizione di soluzione massimale, intervallo massimale di esistenza, e di soluzione "globalmente definita". Infine si studierà il comportamento del-

le soluzioni massimali vicino agli estremi del proprio intervallo massimale di esistenza. Lo studio delle problematiche di questo capitolo continuerà nel Capitolo 4, dove saranno presentati vari criteri di esistenza "in grande" delle soluzioni che culmineranno con la formulazione e la dimostrazione dei tre teoremi di esistenza globale.

I capitoli successivi sono di carattere più applicativo. È ben noto che tranne in rari casi non è possibile calcolare esplicitamente la soluzione generale di un'equazione differenziale. Diventa allora fondamentale trovare dei metodi per studiare il comportamento delle varie soluzioni senza conoscerne l'espressione esplicita; ciò conduce al cosiddetto "studio qualitativo". Nel Capitolo 6 i risultati teorici precedentemente introdotti verranno utilizzati per studiare le soluzioni di vari esempi di equazioni differenziali da un punto di vista qualitativo. A tal fine, due nuovi strumenti saranno molto utili: il Teorema del Confronto e il Criterio dell'asintoto. Ed è soprattutto qui che risulterà importante una buona conoscenza dell'analisi matematica acquisita nei primi due anni.

Il Capitolo 7 tratterà i sistemi conservativi per i quali esiste un integrale primo, o integrale del moto. Ognuno di questi delimita la regione di spazio dove ciascuna soluzione può trovarsi, dunque fornisce importanti indicazioni per lo studio qualitativo delle traiettorie di quest'ultime, e in certi casi permette anche di trovare le soluzioni, in maniera esplicita o mediante una formula chiusa. A complemento della teoria svolta verranno infine studiate due applicazioni, la prima al caso del pendolo non lineare, la seconda a quello del sistema preda-predatore di Lotka-Volterra.

Nel Capitolo 8 verrà presentata una carrellata delle più note classi di equazioni differenziabili risolubili, ovvero riconducibili a equazioni integrabili o a variabili separabili. Anche qui saranno studiate alcune applicazioni a due classici problemi della meccanica razionale, il problema della fune inestensibile e il problema della brachistocrona.

I sistemi lineari saranno l'argomento principale del Capitolo 9; dopo la presentazione della teoria generale che culminerà col Teorema della separazione delle variabili, ci si soffermerà a studiare quelle a coefficienti costanti e le strategie per trovarne le soluzioni esplicite. La teoria verrà quindi applicata alle equazioni di ordine n a coefficienti costanti con alcuni cenni a quelle a coefficienti continui. Per terminare verrà richiamato il metodo per simiglianza, con vari esempi ed esercizi. Per una maggiore comprensione si consiglia di rivedere le definizioni e i risultati principali sulle applicazioni lineari tra spazi vettoriali e il calcolo matriciale.

Il Capitolo 10 (non presentato a lezione quest'anno) tratterà alcuni cenni al problema dell'esistenza di soluzioni periodiche, con l'intenzione di gettare

un ponte verso possibili ulteriori approfondimenti nel campo delle equazioni differenziali ordinarie.

L'obiettivo del nuovo Capitolo 11 sarà quello di presentare il metodo di separazione delle variabili per alcune classi di equazioni differenziali alle derivate parziali (PDE); tale metodo permette in certi di casi di ricondurre la ricerca di soluzioni per alcune PDE alla ricerca di soluzioni per opportune equazioni/sistemi di equazioni differenziali ordinarie. Come prerequisito, verrà prima affrontata la classica teoria delle serie di Fourier trigonometriche, insieme ai teoremi di convergenza uniforme e puntuale.

Infine, nel Capitolo 12 saranno collezionati alcuni esercizi di carattere anche avanzato, diversi dei quali estrapolati da vari testi d'esame.

Capitolo 1

Definizioni di base

Gli argomenti di queste dispense sono un ideale seguito a quelli affrontati nell'ultima parte del corso di Analisi Matematica II del secondo anno del Corso di Laurea in Matematica. Verranno quindi date per conosciute le principali definizioni e i risultati di base sulle equazioni differenziali ordinarie. Per comodità, alcune definizioni sono richiamate brevemente nel seguito, mentre al termine del capitolo saranno fatte alcune nuove considerazioni riguardanti la regolarità delle soluzioni e la riduzione in forma normale.

Definizioni

Un'equazione differenziale ordinaria è essenzialmente un'equazione in cui l'incognita è una funzione la quale compare insieme ad alcune sue derivate.

Definizione 1.1 *Un sistema di* equazioni differenziali ordinarie *(EDO) di* ordine N *è un'equazione formale del tipo*

$$F(t, y, y', \dots, y^{(N)}) = 0, \tag{1.1}$$

dove $F : \mathcal{D} \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \cdots \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ *è una funzione, generalmente supposta continua,* $\mathcal{D}$ *è un aperto e* $y^{(k)} = \frac{d^k y}{dt^k}$, $k = 1, \dots, N$.

Più precisamente, si tratta di un sistema di m equazioni in n incognite, di cui (1.1) è una scrittura compatta; spesso si parlerà brevemente di equazioni (in $\mathbb{R}^m$) invece che, più precisamente, di sistemi. Posto $y = (y_1, \dots, y_n)$ e $F = (F_1, \dots, F_m)$ il sistema si può scrivere esplicitamente come

$$\begin{cases} F_1\big(t, y_1, \dots, y_n, y_1', \dots, y_n', \dots, y_1^{(N)}, \dots y_n^{(N)}\big) = 0 \\ F_2\big(t, y_1, \dots, y_n, y_1', \dots, y_n', \dots, y_1^{(N)}, \dots y_n^{(N)}\big) = 0 \\ \dots \\ F_m\big(t, y_1, \dots, y_n, y_1', \dots, y_n', \dots, y_1^{(N)}, \dots y_n^{(N)}\big) = 0. \end{cases}$$

Definizione 1.2 *Dato un intervallo $I \subseteq \mathbb{R}$, una* soluzione dell'equazione differenziale (1.1) in I *è una funzione $y : I \to \mathbb{R}^n$ tale che*

i) *y è derivabile N volte in I;*

ii) *$(t, y(t), y'(t), \dots, y^{(N)}(t)) \in \mathcal{D}$ per ogni $t \in I$;*

iii) *$F(t, y(t), y'(t), \dots, y^{(N)}(t)) = 0$ per ogni $t \in I$.*

Se è possibile esplicitare le derivate di ordine massimo in funzione di tutte le altre variabili, il sistema si dice in forma normale. Ciò può avvenire quando $n = m$ cioè il numero delle equazioni è uguale a quello delle incognite.

Definizione 1.3 *Un sistema di equazioni differenziali ordinarie si dice in* forma normale *se è equivalente a un sistema del tipo*

$$y^{(N)} = f(t, y, y', \dots, y^{(N-1)}), \tag{1.2}$$

dove $f : \Omega \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \cdots \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ e Ω è un aperto. In forma estesa

$$\begin{cases} y_1^{(N)} = f_1\big(t, y_1, \dots, y_n, y_1', \dots, y_n', \dots, y_1^{(N-1)}, \dots y_n^{(N-1)}\big) \\ y_2^{(N)} = f_2\big(t, y_1, \dots, y_n, y_1', \dots, y_n', \dots, y_1^{(N-1)}, \dots y_n^{(N-1)}\big) \\ \dots \\ y_n^{(N)} = f_n\big(t, y_1, \dots, y_n, y_1', \dots, y_n', \dots, y_1^{(N-1)}, \dots y_n^{(N-1)}\big). \end{cases}$$

Per (1.2) il concetto di soluzione diventa il seguente.

Definizione 1.4 *Dato un intervallo $I \subseteq \mathbb{R}$, una* soluzione dell'equazione differenziale (1.2) in I *è una funzione $y : I \to \mathbb{R}^n$ tale che*

i) *y è derivabile N volte in I;*

ii) *$(t, y(t), y'(t), \dots, y^{(N-1)}(t)) \in \Omega$ per ogni $t \in I$;*

iii) *$y^{(N)}(t) = f(t, y(t), y'(t), \dots, y^{(N-1)}(t))$ per ogni $t \in I$.*

In particolare si hanno le *equazioni differenziali ordinarie di ordine N in forma normale*:

$$y^{(N)} = f\big(t, y, y', \dots, y^{(N-1)}\big),$$

dove $f : \Omega \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \cdots \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, tra cui si distinguono quelle di ordine 1

$$y' = f(t, y),$$

e quelle di ordine 2, molto importanti nelle applicazioni della fisica.

$$y'' = f(t, y, y').$$

Nel seguito si studieranno quasi esclusivamente i sistemi di ordine 1 in forma normale; ciò non è una restrizione perché ogni sistema di n equazioni di ordine N in forma normale è equivalente a un sistema di nN equazioni di ordine 1. Infatti, posto $y = (y_1, \dots, y_n)$ e $z_1 = y$, $z_2 = y'$, $\dots$, $z_N = y^{(N-1)}$ si ha che

$$y^{(N)} = f(t, y, y', \dots, y^{(N-1)}) \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} z_1' = z_2 \\ z_2' = z_3 \\ \dots \\ z_{N-1}' = z_N \\ z_N' = f(t, z_1, z_2, \dots, z_N). \end{cases}$$

Si osservi che ciascuna equazione $z_k' = z_{k+1}$, come anche l'ultima, è a sua volta un sistema di n equazioni, perciò l'intero sistema ha nN equazioni e nN incognite. In definitiva, molte delle proprietà delle equazioni di ordine N saranno dedotte, se non comuni, a quelle dei sistemi di ordine 1

$$y' = f(t, y) \tag{1.3}$$

con $f : \Omega \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ che andremo a studiare. In relazione a (1.3) si definiscono

$$\begin{array}{ll} \mathbb{R}^n & \textit{spazio delle fasi} \\ \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n & \textit{spazio delle traiettorie.} \end{array}$$

Se $y : I \to \mathbb{R}^n$ è una soluzione, si definisce l'*orbita di* y, come l'insieme

$$\mathcal{O}_y := \big\{ y(t) : \ t \in I \big\} \subseteq \mathbb{R}^n,$$

ovvero l'insieme immagine di y, e la *traiettoria di* y, come l'insieme

$$\mathcal{T}_y := \big\{ (t, y(t)) : \ t \in I \big\} \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n,$$

cioè il grafico di y. Si osservi che la traiettoria è contenuta nello spazio delle traiettorie, mentre l'orbita, proiezione della traiettoria su $\mathbb{R}^n$, è contenuta nello spazio delle fasi (si veda la Figura 1.1).

Nel caso di un sistema di equazioni di ordine N conviene definire come spazio delle fasi/traiettorie quelli del sistema di ordine 1 equivalente. In particolare, data un'equazione differenziale di ordine 2 del tipo $y'' = f(t, y, y')$ e il sistema di ordine 1 corrispondente, nelle incognite $(z_1, z_2) = (y, y')$, lo spazio delle fasi è $\mathbb{R}^2$.

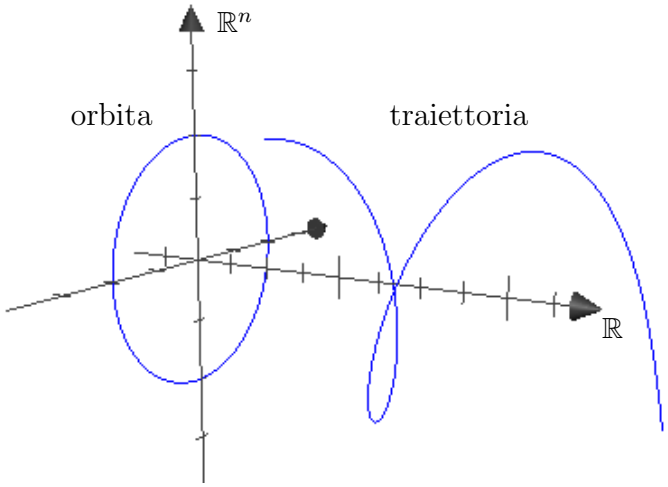


Figura 1.1: Traiettoria e orbita di una soluzione

Definizione 1.5 *Un sistema* (1.3) *si dice* sistema autonomo *se il campo vettoriale non dipende esplicitamente da t, ovvero è della forma*

$$y' = f(y), \tag{1.4}$$

con $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$. Si osservi che, come funzione dei due gruppi di variabili (t, y), f ha come dominio $\Omega = \mathbb{R} \times A$.

Osservazione 1.6 Se $y : I \to \mathbb{R}^n$ è soluzione di un sistema autonomo, ogni traslata temporale è ancora soluzione su un dominio traslato, cioè per ogni t^* la funzione $x(t) := y(t - t^*)$ è soluzione in $I^* := I + t^*$. Infatti

$$x'(t) = y'(t - t^*) = f\big(y(t - t^*)\big) = f(x(t)) \qquad t \in I^*.$$

Ricordiamo che in generale le equazioni/sistemi (1.1) e (1.2) hanno infinite soluzioni e che per selezionare quelle importanti nei vari casi in considerazione bisognerà affiancare all'equazione ulteriori condizioni, le più note delle quali sono le *condizioni al bordo* e le *condizioni ai valori iniziali*. Ciò conduce a studiare particolari tipi di problemi, il più conosciuto e importante dei quali è il problema di Cauchy.

Definizione 1.7 *Il* problema di Cauchy *o* problema ai valori iniziali *per un'equazione differenziale ordinaria è del tipo*

$$\begin{cases} y' = f(t, y) \\ y(t_0) = y_0, \end{cases} \tag{1.5}$$

dove $f : \Omega \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \cdots \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, Ω *è un aperto e* $(t_0, y_0) \in \Omega$. t_0 *si dice* istante iniziale, y_0 *si dice* valore iniziale.

Una soluzione del problema di Cauchy (1.5) *in un intervallo* I *è una funzione* $y : I \to \mathbb{R}^n$ *tale che*

i) y *è soluzione dell'equazione* $y' = f(t, y)$ *in* I*;*

ii) $t_0 \in I$ *e vale* $y(t_0) = y_0$.

Osservazione 1.8 Nel caso di un sistema autonomo, per studiare il problema di Cauchy ci si può sempre restringere a considerare il caso $t_0 = 0$. Infatti, per l'Osservazione 1.6

$$\begin{array}{c}\bar{y}(t)\\ \text{è soluzione di}\end{array} \begin{cases} y' = f(y) \\ y(0) = y_0 \end{cases} \iff \begin{array}{c} y^*(t) = \bar{y}(t - t_0) \\ \text{è soluzione di}\end{array} \begin{cases} y' = f(y) \\ y(t_0) = y_0. \end{cases}$$

Il problema di Cauchy per un sistema di equazioni di ordine N è definito come il problema di Cauchy per il sistema di ordine 1 equivalente, da cui si ottiene la seguente definizione.

Definizione 1.9 *Il* problema di Cauchy *per un'equazione differenziale ordinaria di ordine* N *è del tipo*

$$\begin{cases} y^{(N)} = f(t, y, y', \ldots, y^{(N-1)}) \\ y(t_0) = y_0 \\ y'(t_0) = y_1 \\ \ldots \\ y^{(n-1)}(t_0) = y_{N-1}, \end{cases} \tag{1.6}$$

con $(t_0, y_0, y_1, \ldots, y_{N-1}) \in \Omega$ *fissato.*

In maniera naturale si definisce poi il concetto di soluzione del problema.

Regolarità delle soluzioni

Data un'equazione (sistema di equazioni) $y' = f(t, y)$ con $f : \Omega \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ continua, per definizione ogni soluzione è una funzione derivabile che soddisfa l'equazione puntualmente. Si noti che per la continuità di f le soluzioni $y(t)$ sono automaticamente di classe C^1; infatti la funzione $t \mapsto f(t, y(t))$ è continua, dunque $y'(t) = f(t, y(t))$ è continua cioè $y(t)$ è di classe C^1. Allo stesso modo, se f è di classe C^1 le soluzioni sono di classe

C^2; infatti, ora $t \mapsto f(t, y(t))$ è di classe C^1 perché lo sono f e y, quindi $y'(t)$ è di classe C^1 ovvero $y(t)$ è di classe C^2. In generale, per induzione si dimostra facilmente che se f è di classe C^k allora ogni soluzione è di classe C^{k+1}, cioè le soluzioni guadagnano un grado di regolarità rispetto al campo vettoriale. In particolare se $f \in C^\infty$ allora $y(t) \in C^\infty$.

Alcune considerazioni sulla forma normale

Quando è possibile esplicitare un sistema di equazioni differenziali (1.1) in forma normale (1.2)? Sebbene il caso generale sia complicato, possiamo qui dare un'idea su come si possa ottenere ciò almeno *localmente*. Consideriamo anzitutto il caso di una singola equazione di ordine 1 del tipo

$$F(t, y, y') = 0,$$

dove $F : \mathcal{D} \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è continua con derivata parziale rispetto a y' continua. Fissiamo anche dei dati iniziali $y(t_0) = y_0$. È subito evidente che se l'equazione $F(t_0, y_0, y') = 0$ non ha soluzioni nell'incognita y', allora non possono esistere soluzioni dell'equazione tali che $y(t_0) = y_0$. Questa appare, dunque, una condizione necessaria. Supponiamo quindi che l'equazione $F(t_0, y_0, y') = 0$ abbia soluzione e sia y'_0 *una* di queste (potrebbero infatti esisterne molteplici), cioè $F(t_0, y_0, y'_0) = 0$ con $(t_0, y_0, y'_0) \in \mathcal{D}$. Osserviamo che siamo in una situazione tipica per provare ad applicare il Teorema del Dini. Dunque, se in aggiunta si ha

$$\frac{\partial F}{\partial y'}(t_0, y_0, y'_0) \neq 0,$$

allora è possibile esplicitare l'equazione $F(t, y, y') = 0$ rispetto alla variabile y', localmente vicino al punto (t_0, y_0). Più precisamente esistono un intorno aperto U di (t_0, y_0), un intorno aperto V di y'_0 e una funzione $f : U \to V$ tali che le soluzioni dell'equazione $F(t, y, y') = 0$ in $U \times V$ sono tutte e sole le soluzioni dell'equazione $y' = f(t, y)$ in U e a valori in V.

Dal Teorema del Dini discende quindi il seguente risultato.

Teorema 1.10 *Sia data l'equazione differenziale $F(t, y, y') = 0$ con dati iniziali $y(t_0) = y_0$, dove $F : \Omega \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è continua con derivata parziale rispetto a y' continua. Se $F(t_0, y_0, y'_0) = 0$ e $\frac{\partial F}{\partial y'}(t_0, y_0, y'_0) \neq 0$, allora l'equazione è esplicitabile in forma normale, localmente vicino al punto (t_0, y_0, y'_0). In particolare esistono intorni aperti U di (t_0, y_0), V di y'_0 e una*

funzione continua $f : U \to V$ *tali che* $y_0' = f(t_0, y_0)$ *e*

$$y(t) \text{ è soluzione di } F(t, y, y') = 0 \text{ con } (t, y(t), y'(t)) \in U \times V$$
$$\Updownarrow$$
$$y(t) \text{ è soluzione di } y' = f(t, y) \text{ con } (t, y(t)) \in U.$$

In generale si può dimostrare il seguente teorema.

Teorema 1.11 *Sia data l'equazione differenziale* $F(t, y, y', \ldots, y^{(N)}) = 0$, *dove* $F : \mathcal{D} \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \cdots \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ *è continua con* $\frac{\partial F}{\partial y^{(N)}}$ *continua; siano inoltre fissati* $(t_0, y_0, \ldots, y_0^{(N-1)})$. *Se* $F(t_0, y_0, \ldots, y_0^{(N-1)}, y_0^{(N)}) = 0$ *e* $\frac{\partial F}{\partial y^{(N)}}(t_0, y_0, \ldots, y_0^{(N-1)}, y_0^{(N)})$ *è invertibile, allora l'equazione è esplicitabile in forma normale, localmente vicino al punto* $(t_0, y_0, \ldots, y_0^{(N-1)}, y_0^{(N)})$. *In particolare esistono intorni aperti* U *di* $(t_0, y_0, \ldots, y_0^{(N-1)})$, V *di* $y_0^{(N)}$ *e una funzione continua* $f : U \to V$ *tali che* $y_0^{(N)} = f(t_0, y_0, \ldots, y_0^{(N-1)})$ *e*

$$y(t) \text{ è soluzione di } F(t, y, \ldots, y^{(N)}) = 0 \text{ con } (t, y(t), \ldots, y^{(N)}(t)) \in U \times V$$
$$\Updownarrow$$
$$y(t) \text{ è soluzione di } y^{(N)} = f(t, y, \ldots, y^{(N-1)}) \text{ con } (t, \ldots, y^{(N-1)}(t)) \in U.$$

Osservazione 1.12 Poiché, per ogni fissato $(t_0, y_0, \ldots, y_0^{(N)})$, il differenziale $\frac{\partial F}{\partial y^{(N)}}(t_0, y_0, \ldots, y_0^{(N)})$ è un'applicazione lineare da $\mathbb{R}^n$ in $\mathbb{R}^m$, affinché sia invertibile dovrà essere $n = m$, cioè il numero delle equazioni $F = (F_1, \ldots, F_m)$ dovrà coincidere col numero delle incognite $y = (y_1, \ldots, y_n)$.

Osservazione 1.13 Il Teorema 1.10 è applicabile localmente vicino a *ogni* soluzione dell'equazione $F(t_0, y_0, y') = 0$. Ciò comporta che l'equazione $F(t, y, y') = 0$ può avere molteplici soluzioni passanti per il punto (t_0, y_0), ciascuna tangente in (t_0, y_0) a una retta di pendenza y_k', $k = 1, \ldots, p$, dove $y_1', \ldots, y_p'$ sono proprio le soluzioni dell'equazione $F(t_0, y_0, y') = 0$. In particolare, se F ha anche derivata parziale rispetto a y continua, il Teorema del Dini garantisce che la funzione $f(t, y)$ nel Teorema 1.10 ha derivata parziale rispetto a y continua, dunque per il Teorema di Cauchy-Lipschitz 2.7 (che richiameremo nel Capitolo 2) il problema di Cauchy $y' = f(t, y)$, $y(t_0) = y_0$ ha un'unica soluzione locale. Se, come prima, $y_1', \ldots, y_p'$ sono le soluzioni dell'equazione $F(t_0, y_0, y') = 0$, allora in questo caso l'equazione $F(t, y, y') = 0$ ha esattamente p soluzioni passanti per il punto (t_0, y_0).

Esempio 1.14 Consideriamo l'equazione $F(t, y, y') = (y')^2 - t^4 y^4 = 0$ con $y(1) = 1$. L'equazione $F(1, 1, y') = 0$ ha due soluzioni $y'_\pm = \pm 1$. Per il Teorema 1.10, in un intorno del punto $(1, 1, 1)$ il problema si può esplicitare rispetto alla variabile y', in questo caso ottenendo facilmente $y' = t^2 y^2$. Allo stesso modo, vicino al punto $(1, 1, -1)$ il problema è ancora esplicitabile ed è equivalente a $y' = -t^2 y^2$. Col metodo di separazione delle variabili si ottengono così due soluzioni $y_-(t) = \frac{3}{2+t^3}$ e $y_+(t) = \frac{3}{4-t^3}$, entrambe che verificano la condizione iniziale $y_\pm(1) = 1$ ma con $y'_\pm(1) = \pm 1$.

Esercizio 1.15 Data l'equazione $F(t, y, y') = 0$ con $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ differenziabile, dimostrare che se $\frac{\partial F}{\partial y'}(t, y, y') \neq 0$ per ogni (t, y, y') allora l'equazione è esprimibile in forma normale. Se possibile, si applichi il risultato all'equazione $2y' + \ln\big((y')^2 + t^2 + 1\big) - 2yt^2 = 0$.

Osservazione 1.16 Supponiamo ora che F sia di classe C^1, cioè che anche la derivata parziale di F rispetto a t sia continua. Allora è possibile ridurre in forma normale l'equazione $F(t, y, y') = 0$ senza calcolare esplicitamente la sua inversa rispetto alla variabile y', operazione che in generale non si è in grado di portare a termine. Più precisamente, mostriamo che nelle ipotesi del Teorema 1.10 se $n = 1$ l'equazione è equivalente a un problema di Cauchy per un'equazione in forma normale di ordine 2. Infatti, sempre per il Teorema del Dini, la funzione $f(t, y)$ nel Teorema 1.10 è di classe C^1 e ciò comporta che la soluzione del problema di Cauchy $y' = f(t, y)$, $y(t_0) = y_0$ sia di classe C^2. Se dunque $y(t)$ è tale soluzione, per l'equivalenza asserita dal Teorema 1.10 si avrà anche $F(t, y(t), y'(t)) = 0$ e derivando ulteriormente rispetto a t (ciò è possibile perché $F \in C^1$ e $y' \in C^1$) si ottiene

$$F_t(t, y(t), y'(t)) + F_y(t, y(t), y'(t))y'(t) + F_{y'}(t, y(t), y'(t))y''(t) = 0$$

dove abbiamo usato la notazione compatta $F_t = \frac{\partial F}{\partial t}$, con analoghe definizioni per F_y e $F_{y'}$. Poiché per ipotesi $F_{y'}(t_0, y(t_0), y'(t_0)) \neq 0$ (con $y'(t_0) = y'_0$), per continuità si avrà anche $F_{y'}(t, y(t), y'(t)) \neq 0$ per t vicino a t_0. Dividendo, si ottiene così il seguente problema di Cauchy per un'equazione in forma normale di ordine 2

$$\begin{cases} y'' = -\dfrac{F_t(t, y, y') + F_y(t, y, y')y'}{F_{y'}(t, y, y')} \\ y(t_0) = y_0 \\ y'(t_0) = y'_0. \end{cases}$$

Si osservi che per calcolare il campo vettoriale di quest'ultima equazione è sufficiente derivare parzialmente F e non è necessario invertire la funzione.

Esempio 1.17 Con riferimento all'equazione dell'Esercizio 1.15, per la quale non è possibile scrivere esplicitamente la funzione $f(t, y)$, e prendendo $(t_0, y_0, y_0') = (0, 1, 0)$, si ottiene il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'' = \dfrac{(t^2 y' + y)\big((y')^2 + t^2 + 1\big) - t}{(y')^2 + y' + 1 + t^2} \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = 0. \end{cases}$$

Capitolo 2

Due classici teoremi di esistenza

Nella prima sezione richiameremo il classico Teorema di esistenza di Cauchy-Lipschitz, che vale sotto ipotesi di locale lipschitzianità del campo vettoriale f. Nella seconda sezione, invece, enunceremo e dimostreremo il Teorema di esistenza di Peano, che vale nell'ipotesi di sola continuità per f.

Il Teorema di Cauchy-Lipschitz

Ricordiamo alcune definizioni e teoremi che saranno necessari nell'enunciato del teorema.

Definizione 2.1 *Una funzione* $f = f(t, y) : \Omega \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ *si dice* localmente lipschitziana (rispetto alla variabile y) *se ogni* (t_0, y_0) *ammette un intorno* U *in* Ω *e* $L > 0$ *tali che*

$$\|f(t, y) - f(t, y^*)\| \leq L\|y - y^*\|,$$

per ogni $(t, y), (t, y^*) \in U$.

Definizione 2.2 *Una funzione* $f = f(t, y) : \Omega \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ *si dice* lipschitziana sui compatti di Ω (rispetto alla variabile y) *se per ogni compatto* $K \subset \Omega$ *esiste* $L = L_K > 0$ *tale che*

$$\|f(t, y) - f(t, y^*)\| \leq L\|y - y^*\|,$$

per ogni $(t, y), (t, y^*) \in K$.

È noto che le funzioni lisce sono in particolare localmente lipschitziane e che le funzioni localmente lipschitziane sono lipschitziane sui compatti.

Proposizione 2.3 *Sia $f : \Omega \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, Ω aperto. Se esistono continue le derivate parziali $\frac{\partial f}{\partial y_i}(t, y)$ per ogni $(t, y) \in \Omega$, $i = 1, \dots, n$, allora f è localmente lipschitziana in Ω.*

Dimostrazione Fissato $(t_0, y_0) \in \Omega$, siano $\alpha, R > 0$ tali che $U := [t_0 - \alpha, t_0 + \alpha] \times B[y_0, R] \subset \Omega$. Sia $Jf(t, y)$ la matrice jacobiana di f relativamente alle variabili y, cioè

$$Jf(t,y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial y_1}(t,y) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial y_n}(t,y) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial y_1}(t,y) & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial y_n}(t,y) \end{pmatrix}.$$

Per ipotesi $Jf : U \to \mathbb{R}^{n^2}$ è continua sul compatto U, ne discende che esiste $L := \max\big\{\|Jf(t,y)\| : \ (t,y) \in U\big\}$. Per il Teorema del valor medio, per ogni $P = (t, y), P^* = (t, y^*) \in U$ si ha

$$\begin{aligned} \|f(t,y) - f(t,y^*)\| &\le \max\big\{\|Jf(t,z)\| \text{ sul segmento } PP^*\big\}\|y - y^*\| \\ &\le L\|y - y^*\|, \end{aligned}$$

e dall'arbitrarietà di (t_0, y_0) segue la tesi. □

Proposizione 2.4 *Sia $f : \Omega \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, Ω aperto. Se f è localmente lipschitziana in Ω allora è lipschitziana sui compatti di Ω.*

Dimostrazione Per assurdo, supponiamo che esista un compatto $K \subset \Omega$ tale che per ogni $k \in \mathbb{N}$ esistono $(t_k, y_k), (t_k, y_k^*) \in K$ tali che

$$\|f(t_k, y_k) - f(t_k, y_k^*)\| \ge k\|y_k - y_k^*\|.$$

Dalla compattezza di K segue che, eventualmente passando a sottosuccessioni, (t_k, y_k) e (t_k, y_k^*) convergono a due elementi di K, diciamoli $(\bar{t}, \bar{y})$ e $(\bar{t}, \bar{y}^*)$, rispettivamente[1]. Se fosse $\bar{y} \neq \bar{y}^*$ passando al limite per $k \to +\infty$ si avrebbe

$$\lim_{k\to+\infty} \|f(t_k, y_k) - f(t_k, y_k^*)\| \ge \lim_{k\to+\infty} \big[k\|y_k - y_k^*\|\big] = +\infty,$$

[1] Passando a sottosuccessioni prima per (t_k, y_k) e successivamente per (t_k, y_k^*) è possibile fare in modo che tali convergenze avvengano per gli *stessi* sottoindici k.

assurdo perché $\|f(t_k, y_k) - f(t_k, y_k^*)\| \leq 2\max_K \|f\|$. Dunque dev'essere $\bar{y} = \bar{y}^*$. Sia allora U un intorno sul quale vale la stima di locale lipschitzianità con costante $L > 0$ relativamente al punto $(\bar{t}, \bar{y})$. Si ha $(t_k, y_k), (t_k, y_k^*) \in U$ definitivamente per $k \geq \bar{k}$. Preso inoltre $k > L$ si ha

$$\|f(t_k, y_k) - f(t_k, y_k^*)\| \leq L\|y_k - y_k^*\| < k\|y_k - y_k^*\| \leq \|f(t_k, y_k) - f(t_k, y_k^*)\|,$$

il che è un assurdo. □

Fissati (t_0, y_0) e presi $\alpha, R > 0$, indicheremo con $I_\alpha = I_\alpha(t_0) := [t_0 - \alpha, t_0 + \alpha]$ e $B[y_0, R]$ la palla chiusa di centro y_0 e raggio R in $\mathbb{R}^n$. Poniamo poi $C_{\alpha,R} := C_{\alpha,R}(t_0, y_0) = I_\alpha \times B[y_0, R]$ che rappresenta un cilindro in $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$.

Definizione 2.5 *Fissato (t_0, y_0), il cilindro $C_{\alpha,R}$ si dice* cilindro di sicurezza *per l'equazione differenziale $y' = f(t, y)$ se per ogni funzione continua $\varphi : I_\alpha \to B[y_0, R]$ la funzione $T\varphi : I_\alpha \to B[y_0, R]$ è ancora a valori in $B[y_0, R]$, dove con T indichiamo l'operatore integrale di Volterra associato, cioè*

$$T\varphi(t) = y_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, \varphi(s))\, ds, \quad t \in I_\alpha.$$

In seguito vedremo che se $C_{\alpha,R}$ è di sicurezza allora tutte le soluzioni del problema ai valori iniziali $y' = f(t, y)$ con $y(t_0) = y_0$ non possono scappare da $B[y_0, R]$ per $t \in I_\alpha$.

Proposizione 2.6 *Ogni cilindro $C_{\alpha,R}$ contenuto in Ω contiene un cilindro di sicurezza.*

Dimostrazione Per ipotesi, siano $\alpha, R > 0$ tali che $C_{\alpha,R} \subset \Omega$. Poniamo

$$M := \max\left\{\|f(s, z)\| : \ (s, z) \in C_{\alpha,R}\right\},$$
$$\varepsilon_0 = \min\left\{\alpha, \frac{R}{M}\right\}.$$

Allora ogni cilindro $C_{\delta,R}$ con $\delta \leq \varepsilon_0$ è di sicurezza, infatti, se $\varphi : I_\delta \to B[y_0, R]$ è continua allora $(t, \varphi(t)) \in C_{\delta,R} \subseteq C_{\alpha,R}$ dunque

$$\|T\varphi(t) - y_0\| \leq \left|\int_{t_0}^{t} \|f(s, \varphi(s))\|\, ds\right| \leq M|t - t_0| \leq M\delta \leq R,$$

per ogni $t \in I_\delta$, cioè la tesi. □

Essenzialmente, un cilindro $C_{\delta,R}$ è di sicurezza se $\delta \leq R/M$ dove M è il massimo della norma del campo vettoriale in $C_{\delta,R}$ stesso.

Siamo ora pronti per enunciare il teorema principale di questa sezione.

Teorema 2.7 (di Cauchy-Lipschitz) *Sia $f : \Omega \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ continua e localmente lipschitziana in Ω aperto. Fissato (t_0, y_0), esiste $\varepsilon_0 > 0$ tale che il problema di Cauchy*

$$\begin{cases} y' = f(t, y) \\ y(t_0) = y_0, \end{cases} \tag{2.1}$$

ammette un'unica soluzione definita in I_δ per ogni $\delta \leq \varepsilon_0$. Più precisamente, siano $\alpha, R > 0$ tali che il cilindro $C_{\alpha,R}$ sia contenuto in Ω e si ponga

$$M := \max\left\{\|f(s, z)\| : \ (s, z) \in C_{\alpha,R}\right\}, \tag{2.2}$$

$$\varepsilon_0 = \min\left\{\alpha, \frac{R}{M}\right\}, \tag{2.3}$$

e sia L la costante di Lipschitz di f sul compatto $C_{\alpha,R}$. Allora, preso $\delta \leq \varepsilon_0$, il problema di Cauchy (2.1) ammette una soluzione in I_δ, unica se inoltre vale $\delta < 1/L$.

Dimostrazione Ricorderemo solo le linee principali della dimostrazione, già studiata durante il corso di Analisi Matematica II. Il primo passo è osservare che una funzione y è soluzione del problema di Cauchy in considerazione se e solo se è una funzione continua che soddisfa l'equazione integrale di Volterra

$$y(t) = y_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, y(s))\, ds. \tag{2.4}$$

Ci si riconduce così al problema di trovare un punto fisso dell'operatore

$$\begin{aligned} T : C(I_\delta, \mathbb{R}^n) &\to C(I_\delta, \mathbb{R}^n) \\ y(t) &\mapsto Ty(t) := y_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, y(s))\, ds. \end{aligned}$$

A tal fine si utilizza il Teorema delle contrazioni; più precisamente si dimostra successivamente che

i) per δ sufficientemente piccolo T trasforma $\mathcal{B}_R$ in sé stessa, dove $\mathcal{B}_R = \mathcal{B}[y_0, R]$ è la palla chiusa di centro la funzione costante uguale a y_0 e raggio R in $C(I_\delta, \mathbb{R}^n)$, ovvero

$$\begin{aligned} \mathcal{B}_R :&= \left\{y \in C(I_\delta, \mathbb{R}^n) : \ \|y - y_0\|_\infty \leq R\right\} \\ &= \left\{y : I_\delta \to \mathbb{R}^n \text{ continua} : \ \|y(t) - y_0\| \leq R, \ \forall\, t \in I_\delta\right\}. \end{aligned}$$

Ciò si dimostra essere vero se $\delta \leq \varepsilon_0$ cioè, alla luce della Proposizione 2.6, se $C_{\delta,R}$ è cilindro di sicurezza per l'equazione differenziale considerata;

ii) se inoltre $\delta < 1/L$ la mappa $T : \mathcal{B}_R \to \mathcal{B}_R$ è una contrazione di costante δL (in realtà si può dimostrare che questa ulteriore restrizione non è necessaria).

Per i dettagli si consultino le dispense di Analisi Matematica II. □

Ricordiamo che la condizione $\delta < 1/L$ in realtà non è necessaria per l'unicità che vale nelle sole ipotesi $\delta \leq \varepsilon_0$.

In effetti il teorema dimostra solamente l'unicità tra tutte le soluzioni definite in I_δ *e a valori in* $B[y_0, R]$. Ciò non toglie che a priori potrebbero esistere altre soluzioni definite sul medesimo intervallo ma a valori non contenuti in $B[y_0, R]$. Il seguente lemma risolve questo problema.

Lemma 2.8 *Nelle ipotesi e nelle notazioni del Teorema di Cauchy-Lipschitz 2.7, ogni soluzione del problema di Cauchy* (2.1) *definita in* I_δ *è a valori in* $B[y_0, R]$. *In altri termini, ogni soluzione passante per il centro di un cilindro di sicurezza* $C_{\delta,R}$ *e definita in* I_δ *non può uscire dalla superficie laterale.*

Dimostrazione Supponiamo che $y : I_\delta \to \mathbb{R}^n$ sia soluzione del problema di Cauchy; poniamo

$$\begin{aligned} t_1 &:= \inf \big\{ t \in [t_0 - \delta, t_0[: \ \|y(s) - y_0\| \leq R, \ \forall\, s \in [t, t_0] \big\}, \\ t_2 &:= \sup \big\{ t \in]t_0, t_0 + \delta] : \ \|y(s) - y_0\| \leq R, \ \forall\, s \in [t_0, t] \big\}. \end{aligned}$$

L'intervallo $[t_1, t_2]$ risulta dunque essere il più grande sotto-intervallo di I_δ su cui $\|y(t) - y_0\| \leq R$. La tesi equivale a dimostrare che $[t_1, t_2] = I_\delta$. Per assurdo, supponiamo che ciò non sia vero cioè, senza perdere in generalità, che $t_2 < t_0 + \delta$. Allora per continuità si ha $\|y(t_2) - y_0\| \leq R$ e non può essere $\|y(t_2) - y_0\| < R$ altrimenti potremmo estendere questa disuguaglianza a un intorno destro di t_2, contro le proprietà del sup. Vale quindi $\|y(t_2) - y_0\| = R$ ma allora

$$\begin{aligned} R = \|y(t_2) - y_0\| &\leq \sup_{[t_0,t_2]} \|y'(s)\| \cdot (t_2 - t_0) \\ &= \sup_{[t_0,t_2]} \|f(s, y(s))\| \cdot (t_2 - t_0) \leq M(t_2 - t_0) < M\delta \leq R, \end{aligned}$$

da cui un assurdo. Sarà quindi $t_2 = t_0 + \delta$ e analogamente $t_1 = t_0 - \delta$. □

Corollario 2.9 *Nelle ipotesi del Teorema 2.7 l problema di Cauchy* (2.1) *ammette un'unica soluzione definita in* I_δ *per ogni* $\delta \leq \varepsilon_0$.

Dimostrazione Il teorema afferma l'unicità della soluzioni definite in I_δ e a valori in $B[y_0, R]$, e per il lemma precedente tutte le possibili soluzioni verificano questa proprietà, da cui la tesi. □

L'utilizzo del Teorema delle contrazioni permette anche di concludere che la successione delle *iterate di Picard* definite da

$$\begin{cases} y_0(t) \equiv y_0 \\ y_{k+1}(t) = y_0 + \displaystyle\int_{t_0}^{t} f(s, y_k(s))\, ds = Ty_k(t) \end{cases} \tag{2.5}$$

converge uniformemente in I_δ alla soluzione cercata. In certi casi queste possono essere utilizzate per trovare esplicitamente la soluzione.

Esempio 2.10 Consideriamo il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = y \\ y(0) = 1. \end{cases}$$

Il campo vettoriale (autonomo) $f(t, y) = y$ è definito su tutto $\mathbb{R}^2$ e ivi lipschitziano. Preso $(t_0, y_0) = (0, 1)$ si possono dunque fissare α e R a piacimento; in tal caso $M = \max\{\|f(s, z)\| : (s, z) \in C_{\alpha,R}\} = \max\{|z| : |z - 1| \leq R\} = R + 1$, dunque $\varepsilon_0 = \min\{\alpha, R/M\} = R/(R + 1)$ non appena $\alpha \geq 1$. In conclusione, l'intervallo massimo su cui il Teorema di Cauchy-Lipschitz garantisce l'esistenza è $I_1 = [t_0 - \delta, t_0 + \delta] = [-\delta, \delta]$ con $\delta < 1$. Su ciascuno di questi intervalli le iterate di Picard convergono uniformemente alla soluzione. L'operatore di Volterra è

$$Ty(t) = 1 + \int_0^t y(s)\, ds,$$

dove $y_0(t) = 1$, dunque

$$y_1(t) = 1 + \int_0^t y_0(s)\, ds = 1 + t, \quad y_2(t) = 1 + \int_0^t y_1(s)\, ds = 1 + t + \frac{t^2}{2},$$

e in generale, per induzione, si ha

$$y_k(t) = 1 + \int_0^t y_{k-1}(s)\, ds = 1 + t + \frac{t^2}{2} + \ldots + \frac{t^k}{k!}.$$

Si riconosce quindi che la k-esima iterata di Picard è data dal polinomio di Mac-Laurin della funzione esponenziale, che converge (uniformemente in $[-\delta, \delta]$) a $y(t) = \mathrm{e}^t$ per $k \to +\infty$. Per il Teorema di Cauchy-Lipschitz $y(t)$ è soluzione del problema di Cauchy in considerazione, almeno nell'intervallo $[-\delta, \delta]$. In realtà la convergenza delle iterate vale su tutto gli intervalli limitati di $\mathbb{R}$ e $y(t) = \mathrm{e}^t$ è una soluzione in tutto $\mathbb{R}$. Da ciò deriva che l'intervallo di definizione previsto dal Teorema di Cauchy-Lipschitz può non essere l'intervallo più grande sul quale la soluzione è definita.

Esercizio 2.11 *Fissare le idee sul fatto che se la successione delle iterate di Picard converge uniformemente su un* qualsiasi *intervallo I, possibilmente diverso da I_δ, allora la funzione limite è soluzione della relativa equazione differenziale in I. Cosa si può dire, allora, in merito all'esempio precedente?*

Esercizio 2.12 *Scrivere le iterate di Picard relative ai seguenti problemi di Cauchy*

$$\begin{cases} z' = w \\ w' = -z \\ z(0) = 0,\ w(0) = 1, \end{cases} \qquad \begin{cases} z' = w \\ w' = z \\ z(0) = 0,\ w(0) = 1, \end{cases}$$

e trovare una soluzione locale; discutere l'unicità della soluzione trovata.

Negli esempi precedenti, come in altri casi di sistemi lineari, era possibile calcolare esplicitamente il limite delle iterate di Picard. In generale tale calcolo non sempre è agevole, come mostra il seguente esempio.

Esempio 2.13 Consideriamo il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = \mathrm{e}^{-y} \\ y(1) = 0. \end{cases}$$

Il campo vettoriale, ancora autonomo, $f(t, y) = \mathrm{e}^{-y}$ è definito su tutto $\mathbb{R}^2$ ed è di classe C^∞ dunque localmente lipschitziano. Si avranno quindi esistenza e unicità locale della soluzione. Preso $(t_0, y_0) = (1, 0)$ è possibile fissare α e R a piacimento; si ha di conseguenza $M = \max\{\|f\| : (s, z) \in C_{\alpha,R}\} = \max\{\mathrm{e}^{-z} : |z| \le R\} = \mathrm{e}^R$; inoltre $f'(y) = -\mathrm{e}^{-y}$ quindi la costante di Lipschitz di f in $[-R, R]$ è $L = \mathrm{e}^R$. Il Teorema di Cauchy-Lipschitz garantisce esistenza e unicità locale della soluzione in I_δ con $\delta \le \varepsilon_0 = \min\{\alpha, R/M, 1/L\} = \min\{R/\mathrm{e}^R, 1/\mathrm{e}^R\}$, non appena α è sufficientemente grande. Si osservi che anche prendendo R grande a piacere il numero R/e^R è limitato da $1/\mathrm{e}$; infatti la funzione $x \to x\mathrm{e}^{-x}$ ha per $x \ge 0$ un massimo in $x = 1$. Ne consegue che $\varepsilon_0 \le 1/\mathrm{e}$, e il massimo intervallo su cui il teorema garantisce l'esistenza è $[t_0 - 1/\mathrm{e}, t_0 + 1/\mathrm{e}] = [1 - 1/\mathrm{e}, 1 + 1/\mathrm{e}]$. In questo caso l'operatore di Volterra è

$$Ty(t) = \int_1^t \mathrm{e}^{-y(s)}\, ds,$$

con $y_0(t) = 0$, per cui

$$y_1(t) = \int_1^t \mathrm{e}^{-y_0(s)}\, ds = t - 1, \quad y_2(t) = \int_1^t \mathrm{e}^{-y_1(s)}\, ds = 1 - \mathrm{e}^{1-t},$$

di facile calcolo, mentre

$$y_3(t) = \int_1^t \mathrm{e}^{-y_2(s)}\, ds = \int_1^t \mathrm{e}^{-(1-\mathrm{e}^{1-s})}\, ds,$$

non è elementarmente calcolabile. Tuttavia si noti che utilizzando il metodo di separazione delle variabili si ottiene facilmente la soluzione $y(t) = \ln t$ definita in $]0, +\infty[$. In generale non dobbiamo aspettarci di poter ottenere esplicitamente la soluzione calcolando il limite delle successioni di Picard.

Esistenza e unicità per equazioni di ordine N

Si è già osservato che un generico sistema/equazione di ordine N del tipo

$$y^{(N)} = f(t, y, y', \dots, y^{(N-1)}),$$

dove $f : \Omega \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \cdots \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ è equivalente a un sistema di nN equazioni di ordine 1

$$\begin{cases} z_1' = z_2 \\ z_2' = z_3 \\ \dots \\ z_{N-1}' = z_N \\ z_N' = f(t, z_1, z_2, \dots, z_N), \end{cases} \tag{2.6}$$

avendo posto $z_k = y^{(k-1)}$, $k = 1, \dots, N$. Cosa si può dire dell'esistenza e dell'unicità dei problemi di Cauchy associati? Volendo utilizzare il Teorema di Cauchy-Lipschitz torna utile il seguente risultato.

Lemma 2.14 *Data $f : \Omega \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \cdots \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, sia $F : \Omega \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{nN} \to \mathbb{R}^{nN}$ definita da $F(t, z_1, \dots, z_N) = \big(z_2, \dots, z_N, f(t, z_1, \dots, z_N)\big)$. Allora*

i) f è localmente lipschitziana rispetto alle variabili $(y, y', \dots, y^{(N-1)})$ se e solo se F è localmente lipschitziana rispetto alle variabili $(z_1, \dots, z_N)$.

ii) f è globalmente lipschitziana rispetto alle variabili $(y, y', \dots, y^{(N-1)})$ (uniformemente in t) se e solo se F è globalmente lipschitziana rispetto alle variabili $(z_1, \dots, z_N)$ (uniformemente in t).

Dimostrazione Verifichiamo ii) nel caso $n = 1$ e $N = 2$, lasciando il caso generale e i) come esercizio. Supponiamo quindi che f sia lipschitziana

di costante L. Presi $z = (z_1, z_2)$ e $z^* = (z_1^*, z_2^*)$, ponendo $\ell = \max\{L, 1\}$ e utilizzando la norma euclidea si ha

$$\begin{aligned}\|F(t,z) - F(t,z^*)\| &= \sqrt{|z_2 - z_2^*|^2 + |f(t,z_1,z_2) - f(t,z_1^*,z_2^*)|^2} \\ &\le \sqrt{|z_2 - z_2^*|^2 + L^2\big(|z_1 - z_1^*|^2 + |z_2 - z_2^*)|^2\big)} \\ &\le \ell\sqrt{2}\,\sqrt{|z_1 - z_1^*|^2 + |z_2 - z_2^*|^2} = \ell\sqrt{2}\|z - z^*\|,\end{aligned}$$

dunque F è globalmente lipschitziana di costante $\ell\sqrt{2}$ nelle variabili $z = (z_1, z_2)$. Viceversa, sia F lipschitziana di costante L; allora

$$\begin{aligned}L\|z - z^*\| &\ge \|F(t,z) - F(t,z^*)\| \\ &= \sqrt{|z_2 - z_2^*|^2 + |f(t,z_1,z_2) - f(t,z_1^*,z_2^*)|^2} \\ &\ge \sqrt{|f(t,z_1,z_2) - f(t,z_1^*,z_2^*)|^2} = |f(t,z_1,z_2) - f(t,z_1^*,z_2^*)|,\end{aligned}$$

dunque f è lipschitziana di costante L rispetto alle variabili (y, y'). □

Corollario 2.15 *Se $f : \Omega \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \cdots \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ è localmente lipschitziana rispetto alle variabili $(y, y', \ldots, y^{(N-1)})$ allora ogni problema di Cauchy associato all'equazione di ordine N, $y^{(N)} = f(t, y, y', \ldots, y^{(N-1)})$ ammette localmente una e una sola soluzione.*

Dimostrazione Basta applicare il Teorema di Cauchy-Lipschitz al sistema equivalente (2.6) per il quale il campo vettoriale F è localmente lipschitziana grazie al lemma precedente. □

Il Teorema di Peano

Se il campo vettoriale f è solo continuo e non localmente lipschitziano nella seconda variabile, la successione delle iterate di Picard $(y_k)_{k\in\mathbb{N}}$ definite da (2.5) non è in generale una successione di Cauchy in $C(I_\delta, \mathbb{R}^n)$, come pure l'operatore T non definisce necessariamente una contrazione in un opportuno sottoinsieme di $C(I_\delta, \mathbb{R}^n)$ e il Teorema delle contrazioni non è applicabile.

È inoltre noto che la locale lipschitzianità è solamente una condizione sufficiente per l'esistenza e l'unicità locale della soluzione; per esempio, il problema di Cauchy unidimensionale

$$\begin{cases} y' = 1 + 2\sqrt{|y|} \\ y(0) = 0, \end{cases}$$

ammette una e una sola soluzione locale (ciò appare chiaro utilizzando il metodo di separazione delle variabili), pur essendo $f(t,y) = 1 + 2\sqrt{|y|}$ non localmente lipschitziana in alcun intorno di $(t_0, 0)$, mentre il problema

$$\begin{cases} y' = 2\sqrt{|y|} \\ y(0) = 0, \end{cases}$$

ammette infinite soluzioni: oltre alla soluzione identicamente nulla, si verifica facilmente che, al variare di $c, d \geq 0$, le funzioni

$$y_{c,d}(t) := \begin{cases} -(t+d)^2 & \text{se } t < -d \\ 0 & \text{se } -d \leq t \leq c \\ (t-c)^2 & \text{se } t > c, \end{cases}$$

sono ancora soluzioni del problema di Cauchy in oggetto.

In generale, se il campo vettoriale è solamente continuo, non ci si aspetta di avere l'unicità locale ma continua invece a sussistere l'esistenza locale, come si vedrà dal Teorema di Peano.

Non potendo contare sulle iterate di Picard (a posteriori si veda anche l'Osservazione 2.21), l'idea è quella di trovare delle opportune soluzioni approssimate che convergono a una soluzione del problema di Cauchy in oggetto. A tal fine esistono diverse strategie, una delle più semplici è fornita dal *metodo delle poligonali di Eulero* che essenzialmente consiste nell'approssimare le curve integrali del campo vettoriale f con delle funzioni affini a tratti (poligonali) ottenute incollando segmenti di rette tangenti a opportune curve integrali.

Più precisamente, fissato un intervallo destro $[t_0, t_0 + \delta]$ di t_0 (su un intervallo sinistro $[t_0 - \delta, t_0]$ si può fare una costruzione analoga), lo si divide in ν intervalli di uguale ampiezza $\Delta t = \delta/\nu$. Posto $t_k = t_0 + k\Delta t$ per $k = 0, \ldots, \nu - 1$ (si osservi che anche $t_k = t_k(\nu)$ dipende da ν), si definisce la soluzione approssimata $y_\nu(t)$ in maniera induttiva nel seguente modo

$$\begin{cases} y_\nu(t_0) = y_0 \\ y_\nu(t) = y_\nu(t_k) + (t - t_k) f\big(t_k, y_\nu(t_k)\big) \quad \text{se } t \in [t_k, t_{k+1}], \end{cases} \tag{2.7}$$

con $k = 0, \ldots, \nu - 1$. Si verifica facilmente che se $t \in [t_k, t_{k+1}]$ la soluzione approssimata può essere espressa nella forma

$$\begin{aligned} y_\nu(t) &= y_0 + \sum_{i=0}^{k-1} (t_{i+1} - t_i) f\big(t_i, y_\nu(t_i)\big) + (t - t_k) f\big(t_k, y_\nu(t_k)\big) \\ &= y_0 + \sum_{i=0}^{k-1} f\big(t_i, y_\nu(t_i)\big) \Delta t + (t - t_k) f\big(t_k, y_\nu(t_k)\big). \end{aligned} \tag{2.8}$$

In maniera analoga si può definire $y_\nu(t)$ anche in $[t_0 - \delta, t_0]$, dunque in I_δ.

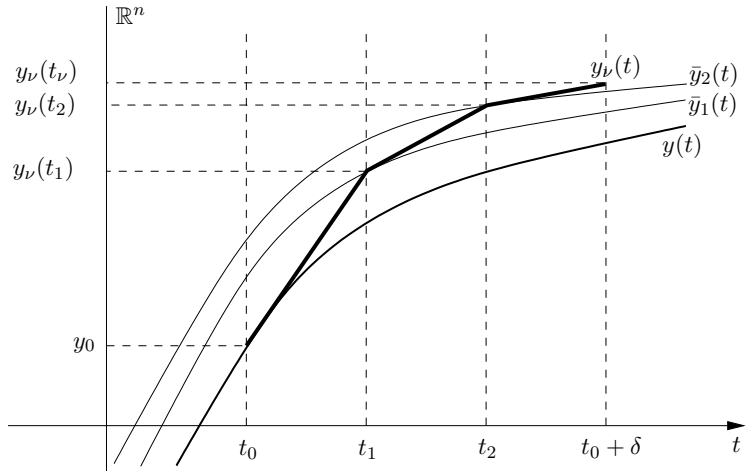


Figura 2.1: Poligonali di Eulero

L'idea geometrica della costruzione è la seguente: si divide $[t_0, t_0 + \delta]$ in ν sottointervalli $[t_k, t_{k+1}]$, $k = 0, \ldots, \nu - 1$ di uguale ampiezza. Su $[t_0, t_1]$ si approssima la soluzione $y(t)$, pensata come curva integrale $(t, y(t))$ del campo vettoriale $(1, f(t, y))$ in Ω, con la retta $(t, y_\nu(t))$ passante per (t_0, y_0) e avente direzione $(1, f(t_0, y_0))$ (nel caso $n = 1$ equivale a prendere la retta passante per (t_0, y_0) e di coefficiente angolare $f(t_0, y_0)$). Si definisce così la soluzione approssimata $y_\nu(t)$ in $[t_0, t_1]$. Al tempo t_1 tale funzione assumerà il valore $y_\nu(t_1)$ e il punto $(t_1, y_\nu(t_1))$ in generale non apparterrà alla curva integrale passante per (t_0, y_0). Supponendo che il grafico di y_ν rimanga sempre all'interno di Ω, consideriamo la curva integrale passante per $(t_1, y_\nu(t_1))$ (rappresentata in figura da $(t, \bar{y}_1(t))$) e ripetiamo il procedimento nell'intervallo $[t_1, t_2]$ approssimando $(t, y(t))$ con la retta passante per $(t_1, y_\nu(t_1))$ e direzione $\big(1, f(t_1, y_\nu(t_1))\big)$. Si procede in maniera induttiva fino al tempo $t_\nu = t_0 + \delta$ definendo infine la funzione y_ν su tutto $[t_0, t_0 + \delta]$.

Proviamo a valutare l'errore che si commette approssimando la soluzione y mediante la funzione affine a tratti y_ν. Per facilità, supponiamo inizialmente che f sia localmente lipschitziana di costante L quindi, localmente in un intervallo I_δ, la soluzione $y = y(t)$ di (2.1) esiste ed è unica. Nell'ipotesi aggiuntiva che y sia di classe C^2 verifichiamo che effettivamente $y_\nu \to y$ se $\nu \to +\infty$ (ovvero se $\Delta t \to 0$). Sotto tali ipotesi di regolarità per la soluzione possiamo considerare l'espansione di Taylor di $y(t)$ in ciascun intervallo

$[t_k, t_{k+1}]$ con punto iniziale t_k per cui

$$\begin{aligned} y(t) &= y(t_k) + (t - t_k)y'(t_k) + O((t - t_k)^2) \\ &= y(t_k) + (t - t_k)f\big(t_k, y(t_k)\big) + O((t - t_k)^2) \end{aligned}$$

dove $O((t - t_k)^2)$ è una funzione la cui norma è uniformemente maggiorata da $C(t-t_k)^2$ con $C > 0$ (essenzialmente C dipende dal massimo della norma della derivata seconda di $y(t)$ in $[t_0, t_0+\delta]$). Per $t \in [t_k, t_{k+1}]$ si ottiene quindi

$$\begin{aligned} &y(t) - y_\nu(t) \\ &= \big(y(t_k) - y_\nu(t_k)\big) + (t - t_k)\big[f\big(t_k, y(t_k)\big) - f\big(t_k, y_\nu(t_k)\big)\big] + O((t - t_k)^2). \end{aligned}$$

Posto $\delta_k = \big\|y(t_k) - y_\nu(t_k)\big\|$, grazie alla lipschitzianità di f e notando che $\delta_0 = 0$, per $t \in [t_k, t_{k+1}]$ si ha dunque

$$\begin{aligned} \big\|y(t) - y_\nu(t)\big\| &\le \big\|y(t_k) - y_\nu(t_k)\big\| + \\ &\quad + (t - t_k)\big\|f\big(t_k, y(t_k)\big) - f\big(t_k, y_\nu(t_k)\big)\big\| + C(t - t_k)^2 \\ &\le \delta_k + \Delta t\, L\big\|y(t_k) - y_\nu(t_k)\big\| + C(\Delta t)^2 = (1 + L\Delta t)\delta_k + C(\Delta t)^2 \\ &\le (1 + L\Delta t)\big((1 + L\Delta t)\delta_{k-1} + C(\Delta t)^2\big) + C(\Delta t)^2 \\ &= (1 + L\Delta t)^2\delta_{k-1} + \big(1 + (1 + L\Delta t)\big)C(\Delta t)^2 \le \cdots \le \\ &\le (1 + L\Delta t)^{k+1}\delta_0 + \big[1 + (1 + L\Delta t) + \cdots + (1 + L\Delta t)^k\big]C(\Delta t)^2 \\ &= \frac{(1 + L\Delta t)^{k+1} - 1}{(1 + L\Delta t) - 1}C(\Delta t)^2 = \frac{C}{L}\big((1 + L\Delta t)^{k+1} - 1\big)\Delta t \\ &\le \frac{C}{L}\big((1 + L\Delta t)^\nu - 1\big)\Delta t. \end{aligned}$$

Passando all'estremo superiore prima sui $t \in [t_k, t_{k+1}]$, poi su $k = 0, \ldots, \nu-1$ e ricordando che $\Delta t = \delta/\nu$, si ottiene infine

$$||y - y_\nu||_\infty \le \frac{C}{L}\big((1+L\Delta t)^\nu - 1\big)\Delta t = \frac{C}{L}\Big(\big(1+\frac{L\delta}{\nu}\big)^\nu - 1\Big)\Delta t < \frac{C}{L}(\mathrm{e}^{L\delta} - 1)\frac{\delta}{\nu},$$

per cui $y_\nu \to y$ uniformemente in $[t_0, t_0 + \delta]$ per $\nu \to +\infty$.

Osservazione 2.16 Da un punto di vista numerico, le poligonali di Eulero generano l'algoritmo

$$\left\| \begin{array}{l} t_{k+1} = t_k + \Delta t \\ y_{k+1} = y_k + f(t_k, y_k)\Delta t, \end{array} \right.$$

che, per quanto appena visto, converge alla soluzione del problema di Cauchy in oggetto con un errore dell'ordine di $\Delta t = \delta/\nu$.[2]

In definitiva abbiamo dimostrato che *se* esiste un'unica soluzione di classe C^2, allora le poligonali di Eulero convergono uniformemente alla soluzione stessa in $[t_0, t_0+\delta]$ (osserviamo che per garantire che la soluzione sia di classe C^2 basta per esempio assumere che f sia di classe C^1). La speranza è che ciò accada anche in ipotesi di minore regolarità per f.

Esercizio 2.17 Dimostrare che se f è lipschitziana nel complesso delle variabili e dunque la soluzione $y = y(t)$ è solo di classe C^1, l'analisi e le stime precedenti continuano sostanzialmente a valere, possibilmente con costanti diverse. (Suggerimento: provare a utilizzare il Teorema di Lagrange a ciascuna componente di $y(t)$.)

Cosa si può dire se a priori non sappiamo nulla riguardo l'esistenza di una soluzione? In questo caso l'analisi appena svolta perde di significato proprio perché non è disponibile alcuna soluzione con cui confrontare le soluzioni approssimate. Tuttavia, le poligonali di Eulero (2.7) possono essere comunque definite e le utilizzeremo proprio per dimostrare l'esistenza di una soluzione di (2.1). Più precisamente, vogliamo provare che se f è solamente continua, le poligonali di Eulero convergono uniformemente (eventualmente passando a sottosuccessioni) a una funzione che è soluzione di (2.1).

A tal fine cerchiamo di individuare quali dovranno essere le proprietà possedute dalle soluzioni approssimate affinché queste convergano a una soluzione del problema di Cauchy. Con riferimento a (2.8), posto

$$S_\nu(t) = \sum_{i=0}^{k-1} f\big(t_i, y_\nu(t_i)\big)\Delta t + (t - t_k) f\big(t_k, y_\nu(t_k)\big) \quad t \in [t_k, t_{k+1}],$$

si riconosce che $S_\nu(t)$ è una somma alla Cauchy nell'intervallo $[t_0, t]$ relativa alla funzione $t \mapsto f(t, y_\nu(t))$ e alla partizione $\{t_0, t_1, \ldots, t_k, t\}$. Ci aspettiamo quindi che per $\Delta t \to 0$ tale funzione $S_\nu(t)$ approssimi il relativo integrale di Cauchy-Riemann in $[t_0, t]$ (bisogna comunque prestare un po' di attenzione poiché anche la funzione y_ν varia al variare di Δt). L'equazione (2.8) può

[2] Per approssimare la soluzione di un'equazione differenziale esistono altri metodi numerici più efficienti della poligonali di Eulero; si veda per esempio il metodo di Runge-Kutta.

essere riscritta nella forma

$$
\begin{aligned}
y_\nu(t) &= y_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, y_\nu(s))\, ds + \Big(S_\nu(t) - \int_{t_0}^{t} f(s, y_\nu(s))\, ds \Big) \\
&=: y_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, y_\nu(s))\, ds + R_\nu(t),
\end{aligned}
\tag{2.9}
$$

con $R_\nu(t)$ che, per quanto appena visto, presumibilmente tende a 0 se $\Delta t \to 0$, cioè se $\nu \to +\infty$. Sotto questa forma si comprende che, supposto che y_ν converga a una funzione y quando $\nu \to +\infty$, se si riesce a provare la convergenza dell'integrale di $f(t, y_\nu(t))$ al relativo integrale di $f(t, y(t))$, allora y soddisferà l'equazione integrale di Volterra associata al problema (2.1) dunque sarà soluzione di (2.1). Tale convergenza è per esempio (ma non solo) garantita se $y_\nu \to y$ uniformemente in $[t_0, t_0 + \delta]$. Ci siamo dunque ricondotti a cercare di dimostrare che una successione di funzioni continue (o almeno una sua sottosuccessione) converge uniformemente a una funzione (continua) y nell'intervallo $[t_0, t_0 + \delta]$.

Osservazione 2.18 (Importante) In generale, dal punto di vista astratto la situazione si presenta come segue: data una successione $(y_k)_{k \in \mathbb{N}}$ in uno spazio metrico completo (X, d), studiare la sua convergenza o la convergenza di una sua sottosuccessione. Ci sono due modi classici per affrontare il problema:

(A) si utilizza la <u>completezza</u>: si cerca dunque di dimostrare che la successione (y_k) è <u>di Cauchy</u> (questo è l'approccio del Teorema di Cauchy-Lipschitz, con (y_k) successione delle iterate di Picard);

(B) si utilizza la <u>compattezza</u>: si cerca di dimostrare che (y_k) è sequenzialmente <u>compatta in X</u> (questo è l'approccio del Teorema di Peano, con (y_k) successione delle poligonali di Eulero).

Si noti che i due approcci non sono equivalenti; il primo garantisce che *tutta* la successione converge e in generale permette di dimostrare che il limite è unico e spesso che c'è anche "dipendenza continua dai dati iniziali". Il secondo non garantisce la convergenza di tutta la successione: potrebbero infatti esistere sottosuccessioni differenti che convergono a limiti differenti. Si perde quindi, in generale, l'unicità del limite (e la dipendenza continua dai dati).

Tornando alle equazioni differenziali, il caso in considerazione si traduce in un problema di compattezza sequenziale nello spazio normato completo

$\big(C\big([t_0, t_0+\delta], \mathbb{R}^n\big), ||\cdot||_\infty\big)$ (o più precisamente $\big(C\big(I_\delta, \mathbb{R}^n\big), ||\cdot||_\infty\big)$ se consideriamo anche i tempi $t < t_0$) e può essere affrontato mediante il Teorema di Ascoli-Arzelà (si veda il Teorema A.18 in Appendice).

Siamo ora pronti per enunciare il Teorema di esistenza locale di Peano.

Teorema 2.19 (di Peano) *Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ aperto e sia $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$ continua. Fissato $(t_0, y_0) \in \Omega$ siano $\alpha, R > 0$ tali che $I_\alpha \times B[y_0, R] \subset \Omega$, dove $I_\alpha = [t_0 - \alpha, t_0 + \alpha]$, e si definisca*

$$M := \max\big\{||f(s,z)|| : \ (s,z) \in I_\alpha \times B[y_0, R]\big\},$$
$$\varepsilon_0 := \min\Big\{\alpha, \frac{R}{M}\Big\}.$$

Allora per ogni $\delta \le \varepsilon_0$ il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = f(t,y) \\ y(t_0) = y_0, \end{cases} \tag{2.10}$$

ammette una soluzione definita in I_δ.

Dimostrazione Dimostriamo che la successione (y_ν) delle poligonali di Eulero associate al problema di Cauchy (2.10), definita in (2.7), ammette una sottosuccessione convergente a una soluzione del problema stesso. Senza ledere in generalità proveremo questo risultato nell'intervallo $[t_0, t_0 + \delta]$.

Più precisamente dimostriamo che l'insieme $\{y_\nu : \ \nu \ge 1\}$ è relativamente sequenzialmente compatto in $\big(C([t_0, t_0+\delta], \mathbb{R}^n), ||\cdot||_\infty\big)$. A tal fine verifichiamo che è equilimitato ed equiuniformemente continuo.

Equilimitatezza: dimostriamo che per ogni $\nu \ge 1$ e $t \in [t_0, t_0 + \delta]$ si ha $y_\nu(t) \in B[y_0, R]$. Verifichiamo anzitutto che $||y_\nu(t) - y_0|| \le M(t - t_0)$ per ogni $t \in [t_0, t_0 + \delta]$: procediamo per induzione finita sugli intervalli $J_k = [t_k, t_{k+1}]$ per $k = 0, \dots, \nu - 1$. In $J_0 = [t_0, t_1]$ si ha

$$\big\|y_\nu(t) - y_0\big\| = \big\|(t - t_0)f(t_0, y_0)\big\| \le (t - t_0)M.$$

Supposto, per ipotesi induttiva, che $||y_\nu(t) - y_0|| \le M(t - t_0)$ (dunque anche $\le R$) in J_{k-1}, per $t \in J_k$ si ha

$$\begin{aligned} \big\|y_\nu(t) - y_0\big\| &= \big\|y_\nu(t_k) + (t - t_k)f(t_k, y_\nu(t_k)) - y_0\big\| \\ &\le \big\|y_\nu(t_k) - y_0\big\| + (t - t_k)\big\|f(t_k, y_\nu(t_k))\big\| \\ &\le M(t_k - t_0) + (t - t_k)M = M(t - t_0). \end{aligned}$$

Per il principio di induzione si ha $||y_\nu(t) - y_0|| \le M(t - t_0) \le M\delta \le R$ per ogni $t \in [t_0, t_0 + \delta]$ perciò l'insieme $\{y_\nu : \ \nu \ge 1\}$ è equilimitato.

Equiuniforme continuità: più precisamente verifichiamo che l'insieme è equilipschitziano. Poiché y_ν è una funzione continua, C^1 a tratti tranne che in un numero finito di punti, vale la formula fondamentale del calcolo; in particolare (2.8) si può scrivere nella forma

$$y_\nu(t) = y_0 + \int_{t_0}^{t} y'_\nu(s)\, ds,$$

dove si osserva che y'_ν è una funzione costante a tratti tale che per $t \in]t_k, t_{k+1}[$ si ha $y'_\nu(t) = f(t_k, y_\nu(t_k))$. Per quanto visto si ha $||y'_\nu(t)|| = ||f(t_k, y_\nu(t_k))|| \leq M$ per ogni t, perciò se $t, r \in [t_0, t_0 + \delta]$ e $\nu \geq 1$ si ha

$$\big\|y_\nu(t) - y_\nu(r)\big\| \leq \left| \int_r^t ||y'_\nu(s)||\, ds \right| \leq M|t - r|,$$

da cui l'equilipschitzianità (e l'equiuniforme continuità) dell'insieme $\{y_\nu : \nu \geq 1\}$ nello spazio $C([t_0, t_0 + \delta], \mathbb{R}^n)$. Per il Teorema di Ascoli-Arzelà A.18 $\{y_\nu : \ \nu \geq 1\}$ è relativamente sequenzialmente compatto in $C([t_0, t_0+\delta], \mathbb{R}^n)$, perciò la successione $\{y_\nu\}_{\nu\geq 1}$ ammette una sottosuccessione uniformemente convergente a una funzione continua y in $[t_0, t_0 + \delta]$. Per facilità di notazione (e con la dovuta attenzione, si veda a riguardo l'Osservazione 2.21) continuiamo a denotare questa sottosuccessione con $\{y_\nu\}_{\nu\geq 1}$. Verifichiamo che y è soluzione del problema di Cauchy (2.10) in $[t_0, t_0 + \delta]$. Per ogni $t \in [t_0, t_0 + \delta]$ si ha

$$\begin{aligned}
\|y_\nu(t) - Ty_\nu(t)\| &= \left\| \Big(y_0 + \int_{t_0}^{t} y'_\nu(s)\, ds\Big) - \Big(y_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, y_\nu(s))\, ds\Big) \right\| \\
&\leq \int_{t_0}^{t_0+\delta} \big\|y'_\nu(s) - f(s, y_\nu(s))\big\|\, ds \\
&= \sum_{i=0}^{\nu-1} \int_{t_i}^{t_{i+1}} \big\|y'_\nu(s) - f(s, y_\nu(s))\big\|\, ds \\
&= \sum_{i=0}^{\nu-1} \int_{t_i}^{t_{i+1}} \big\|f(t_i, y_\nu(t_i)) - f(s, y_\nu(s))\big\|\, ds.
\end{aligned}$$

Poiché f è continua in $I_\alpha \times B[y_0, R]$ è ivi uniformemente continua, perciò fissato $\varepsilon > 0$ esiste $\delta_\varepsilon > 0$ tale che se $t, s \in I_\alpha$, $x, z \in B[y_0, R]$ soddisfano $|t - s| < \delta_\varepsilon$, $||x - z|| < \delta_\varepsilon$ allora $||f(t, x) - f(s, z)|| < \varepsilon$. In particolare, se $\delta/\nu = \Delta t < \bar{\delta}_\varepsilon := \min\{\delta_\varepsilon, \delta_\varepsilon/M\}$ cioè se $\nu > \nu_\varepsilon := \delta/\bar{\delta}_\varepsilon$, allora per ogni $i = 0, \ldots, \nu - 1$ e ogni $s \in [t_i, t_{i+1}]$ si ha

$$|t_i - s| \leq \Delta t < \delta_\varepsilon, \qquad \big\|y_\nu(t_i) - y_\nu(s)\big\| \leq M|t_i - s| \leq M\Delta t < \delta_\varepsilon,$$

perciò $\big\|f(t_i, y_\nu(t_i)) - f(s, y_\nu(s))\big\| < \varepsilon$. Dalla relazione sopra segue allora che

$$\|y_\nu(t) - Ty_\nu(t)\| \leq \sum_{i=0}^{\nu-1} \int_{t_i}^{t_{i+1}} \varepsilon \, ds = (t_\nu - t_0)\varepsilon = \delta\varepsilon,$$

per ogni $\nu > \nu_\varepsilon$ e ogni $t \in [t_0, t_0 + \delta]$, quindi $y_\nu(t) - Ty_\nu(t) \to 0$ se $\nu \to +\infty$, uniformemente in $[t_0, t_0 + \delta]$.

In maniera analoga e sempre per l'uniforme continuità di f, si verifica che se $y_\nu(t) \to y(t)$ per $\nu \to +\infty$ uniformemente in $[t_0, t_0 + \delta]$ allora si ha anche $f(t, y_\nu(t)) \to f(t, y(t))$ per $\nu \to +\infty$ uniformemente in $[t_0, t_0 + \delta]$, dunque (ricordiamo che se g_ν converge uniformemente a g in $[a, b]$, l'integrale di g_ν converge all'integrale di g)

$$\int_{t_0}^{t} f(s, y_\nu(s)) \, ds \to \int_{t_0}^{t} f(s, y(s)) \, ds \quad \text{se } \nu \to +\infty$$

per ogni $t \in [t_0, t_0 + \delta]$. Passando infine al limite per $\nu \to +\infty$ si ottiene che $y_\nu(t) - Ty_\nu(t) \to y(t) - Ty(t)$, ma dovendo anche essere $y_\nu(t) - Ty_\nu(t) \to 0$ si ottiene $y(t) - Ty(t) = 0$ cioè

$$y(t) = y_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, y(s)) \, ds,$$

per ogni $t \in [t_0, t_0 + \delta]$, quindi y è soluzione del problema di Cauchy (2.10) in $[t_0, t_0 + \delta]$. Analogamente si ragiona nell'intervallo $[t_0 - \delta, t_0]$. □

Osservazione 2.20 A priori, è possibile che differenti sottosuccessioni di (y_ν) convergano a distinte soluzioni di (2.10).

Osservazione 2.21 È facile verificare che la successione (y_k) delle iterate di Picard (2.5) costituisce in effetti un insieme equilimitato ed equilipschitziano in $C(I_\delta, \mathbb{R}^n)$ (lo si dimostri per esercizio). È dunque possibile applicare il Teorema di Ascoli-Arzelà ed estrarre una sottosuccessione di (y_k) convergente in $C(I_\delta, \mathbb{R}^n)$; sembrerebbe quindi possibile sostituire, all'interno della dimostrazione del Teorema di Peano, la successione delle poligonali di Eulero con quella delle iterate di Picard. Ci si potrebbe chiedere perché non sia stato fatto; in realtà l'utilizzo delle iterate di Picard non permette di arrivare alla tesi del teorema. Perché?

Tutto dipende dal fatto che le iterate di Picard, contrariamente alle poligonali di Eulero, sono definite per ricorrenza $y_k = Ty_{k-1}$, ovvero ciascuna funzione è definita in termini della precedente. Applicando il Teorema di Ascoli-Arzelà si ottiene una sottosuccessione (y_{k_m}) convergente a una

qualche funzione y; cercando ora di passare al limite per $m \to +\infty$ nell'equazione $y_{k_m}(t) = Ty_{k_m-1}(t)$, si ha che il primo membro converge a $y(t)$ mentre del secondo membro non si ha alcun controllo perché nulla si sa, a priori, del comportamento della successione (y_{k_m-1}). Volendo esemplificare, supponiamo che la sottosuccessione convergente a una funzione limite y individuata dal Teorema di Ascoli-Arzelà sia quella relativa agli indici pari, ovvero $y_{k_m} = y_{2m}$. Allora si ha $y_{2m} = Ty_{2m-1}$ e non si può passare al limite a secondo membro perché non si conosce il comportamento della sottosuccessione relativa agli indici dispari; quest'ultima potrebbe anche non convergere, oppure convergere ma a un limite diverso. Si noti infatti che

$$y_{2m} = Ty_{2m-1} = T(Ty_{2m-2}) = T^{[2]}y_{2(m-1)}$$

e passando al limite per $m \to +\infty$ si ottiene $y = T^{[2]}y$, cioè il punto limite y è punto fisso non dell'operatore T ma dell'operatore iterato $T^{[2]}$. Se $T^{[2]}$ è una contrazione, per unicità si ricava facilmente che il punto fisso di $T^{[2]}$ è anche punto fisso di T, ma se $T^{[2]}$ non è contrazione T e $T^{[2]}$ potrebbe avere punti fissi differenti. Quando ciò accade si avrà che il punto limite y non è punto fisso di T, ovvero *non* è soluzione del problema di Cauchy.

In definitiva, non ci si deve aspettare che i punti limite della successione $\{y_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ delle iterate di Picard siano punti fissi di T cioè soluzioni del problema di Cauchy in oggetto. Come esempio nel quale si presenta questa situazione si consideri il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = 2\sqrt{\big|t^2 - |y|\big|} \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

dove $f(t,y) = 2\sqrt{|t^2 - |y||}$ è funzione continua in $\mathbb{R}^2$ ma non localmente lipschitziana, in particolare non lo è in un intorno dei punti $(t, \pm t^2)$.

Considerando la successione delle iterate di Picard $(y_k)_{k\in\mathbb{N}}$ definite da

$$\begin{cases} y_0(t) \equiv 0 \\ y_{k+1}(t) = \displaystyle\int_0^t 2\sqrt{\big|s^2 - |y_k(s)|\big|}\, ds, \end{cases}$$

con facili calcoli si ottiene

$$y_1(t) = \int_0^t 2\sqrt{s^2}\, ds = \int_0^t 2|s|\, ds = \operatorname{sgn}(t)t^2,$$
$$y_2(t) = \int_0^t 2\sqrt{|s^2 - |s^2||}\, ds = 0 = y_0(t),$$

dunque facilmente $y_{2n}(t) = 0$, $y_{2n+1}(t) = \operatorname{sgn}(t)t^2$, $n \in \mathbb{N}$. È chiaro che i punti limite della successione sono dati solamente dalle funzioni $y_0(t)$ e $y_1(t)$ nessuna delle quali è soluzione dell'equazione differenziale in considerazione. Una soluzione è per esempio data da $y(t) = \frac{\sqrt{5}-1}{2}\operatorname{sgn}(t)t^2$.

In definitiva, l'applicazione di Ascoli-Arzelà alla successione delle iterate di Picard non fornisce in generale una soluzione del problema dato. Per questo nella dimostrazione del Teorema di Peano si sono dovute considerare altre successioni approssimanti, nel nostro caso le poligonali di Eulero.

Terminiamo questa sezione osservando che l'ampiezza dell'intervallo di esistenza della soluzione può essere presa uniforme se il dato iniziale varia in un compatto. Questo risultato verrà principalmente utilizzato nel Capitolo 5 per studiare la dipendenza delle soluzioni dai dati iniziali.

Teorema 2.22 (di Peano, sui compatti) *Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ aperto e sia $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$ continua. Fissato $K \subset \Omega$ esiste $\varepsilon = \varepsilon_K > 0$, dipendente solo da K, tale che per ogni $(t_0, y_0) \in K$ ogni soluzione massimale $y(t)$ del problema di Cauchy*

$$\begin{cases} y' = f(t, y) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

è definita almeno sull'intervallo $[t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon]$.

Dimostrazione Fissato un compatto $K \subset \Omega$, si possono trovare $\alpha, R > 0$ tali che

$$C_{\alpha,R}(K) := \bigcup_{(t,y)\in K} C_{\alpha,R}(t, y) \tag{2.11}$$

sia un compatto contenuto in Ω (verificarlo per esercizio). Posto $M_K = \max\{\|f(s, z)\| : (s, z) \in C_{\alpha,R}(K)\}$ sia infine $\varepsilon_K := \min\{\alpha, R/M_K\}$. Preso un qualsiasi $(t_0, y_0) \in K$, per costruzione si ha $C_{\alpha,R}(t_0, y_0) \subseteq C_{\alpha,R}(K) \subset \Omega$, da cui $M := \max\{\|f(s, z)\| : (s, z) \in C_{\alpha,R}(t_0, y_0)\} \leq M_K$ e anche $\varepsilon := \min\{\alpha, R/M\} \geq \varepsilon_K$. Il Teorema di Peano e il Lemma 3.26 garantiscono che ogni soluzione massimale del problema di Cauchy $y' = f(t, y)$, $y(t_0) = y_0$ sia definita almeno in $I_\varepsilon(t_0)$ e a maggior ragione in $I_{\varepsilon_K}(t_0)$.

Approfondimenti

Altre dimostrazioni del Teorema di Cauchy-Lipschitz

In questa sezione vedremo alcune varianti di dimostrazione del Teorema di Cauchy-Lipschitz. Nella prima si vuole provare direttamente la convergenza

uniforme delle iterate di Picard $y_k(t)$.[3] Infatti, si osservi che si può scrivere

$$y_{k+1}(t) = y_0 + \sum_{i=0}^{k} \big(y_{i+1}(t) - y_i(t)\big), \tag{2.12}$$

quindi la convergenza uniforme delle iterate è ricondotta alla convergenza uniforme della serie a secondo membro. Dette R, M, α, δ le solite costanti introdotte dal Teorema di Cauchy-Lipschitz, sia L la costante di Lipschitz di f nel compatto $C_{\alpha,R}$. Dimostriamo per induzione che

$$\|y_{k+1}(t) - y_k(t)\| \leq \frac{ML^k}{(k+1)!}|t - t_0|^{k+1},$$

per ogni $k \in \mathbb{N}$ e ogni $t \in I_\delta$. Per $k = 0$ si è già verificato in precedenza che

$$\|y_1(t) - y_0(t)\| = \|y_1(t) - y_0\| \leq M|t - t_0|.$$

Supposta ora vera la tesi per $k-1$, proviamola per k. Avendo già verificato che se $\delta \leq \varepsilon_0$ tutte le iterate di Picard hanno valori in $B[y_0, R]$, si ha

$$\begin{aligned}
\|y_{k+1}(t) - y_k(t)\| &= \|Ty_k(t) - Ty_{k-1}(t)\| \\
&\leq \left| \int_{t_0}^{t} \|f(s, y_k(s)) - f(s, y_{k-1}(s))\| \, ds \right| \\
&\leq \left| \int_{t_0}^{t} L\|y_k(s) - y_{k-1}(s)\| \, ds \right| \leq \left| \int_{t_0}^{t} L\frac{ML^{k-1}}{k!}|s - t_0|^k \, ds \right| \\
&= \frac{ML^k}{k!}\left[\frac{|s - t_0|^{k+1}}{k+1}\right]_{t_0}^{t} = \frac{ML^k}{(k+1)!}|t - t_0|^{k+1},
\end{aligned}$$

e per induzione segue la tesi. Da questa disuguaglianza discende che

$$\sum_{i=0}^{\infty} \|y_{i+1} - y_i\|_\infty \leq \sum_{i=0}^{\infty} \frac{ML^i\delta^{i+1}}{(i+1)!} = \frac{M}{L}(\mathrm{e}^{L\delta} - 1) < +\infty.$$

Per confronto la serie in (2.12) converge normalmente dunque uniformemente in I_δ, e in definitiva la successione delle iterate converge uniformemente a una funzione $\overline{y}(t)$, che sappiamo essere necessariamente una soluzione del problema di Cauchy in oggetto. Verifichiamo ora l'unicità. Fissiamo una *qualsiasi* soluzione del problema di Cauchy definita in I_δ, diciamola $y^*(t)$. Osservando che $y^* = Ty^*$, come in precedenza si dimostra che

$$\|y_k(t) - y^*(t)\| \leq \frac{ML^k}{(k+1)!}|t - t_0|^{k+1},$$

[3] In questa forma il Teorema di Cauchy-Lipschitz è detto Teorema di Lindelöf-Picard.

per ogni $t \in I_\delta$ e $k \in \mathbb{N}$. Passando al limite per $k \to +\infty$ si ottiene facilmente $\|\overline{y}(t) - y^*(t)\| = 0$, da cui l'unicità. Si osservi che in questo caso si è potuto dimostrare l'unicità senza imporre l'ulteriore condizione $\delta L < 1$ sull'ampiezza dell'intervallo di definizione.

Un altro metodo per ottenere l'unicità senza imporre $\delta L < 1$, è quello di utilizzare una *norma pesata alla Bielecki*. Nelle usuali notazioni introdotte, se $y \in C(I_\delta, \mathbb{R}^n)$ si pone

$$\|y\|_* := \max_{t \in I_\delta} \left[\mathrm{e}^{-2L|t-t_0|} \|y(t)\| \right] \tag{2.13}$$

(al posto di $2L$ si può mettere un qualsiasi $K > L$). Si verifica facilmente che $\|\cdot\|_*$ è una norma su $C(I_\delta, \mathbb{R}^n)$, equivalente alla norma del sup, essendo

$$\mathrm{e}^{-2L\delta} \|y\|_\infty \le \|y\|_* \le \|y\|_\infty.$$

Dunque $\big(C(I_\delta, \mathbb{R}^n), \|\cdot\|_*\big)$ è uno spazio normato completo. Si osservi che la palla $\mathcal{B}_R$ nella norma $\|\cdot\|_\infty$ non è più una palla nella norma $\|\cdot\|_*$, ma continua a essere un insieme chiuso, quindi uno spazio metrico completo. Inoltre, se $y_1, y_2 \in \mathcal{B}_R$ si ha

$$\begin{aligned}
\|Ty_1(t) - Ty_2(t)\| &\le \left| \int_{t_0}^t \|f(s, y_1(s)) - f(s, y_2(s))\| \, ds \right| \\
&\le \left| \int_{t_0}^t L \|y_1(s) - y_2(s)\| \, ds \right| \le L \left| \int_{t_0}^t \mathrm{e}^{2L|s-t_0|} \|y_1 - y_2\|_* \, ds \right| \\
&= L \|y_1 - y_2\|_* \left[\frac{\mathrm{e}^{2L|s-t_0|}}{2L} \right]_{t_0}^t \le \frac{1}{2} \mathrm{e}^{2L|t-t_0|} \|y_1 - y_2\|_*,
\end{aligned}$$

da cui segue

$$\mathrm{e}^{-2L|t-t_0|} \|Ty_1(t) - Ty_2(t)\| \le \frac{1}{2} \|y_1 - y_2\|_*,$$

e passando al sup sui $t \in I_\delta$ si ottiene infine

$$\|Ty_1 - Ty_2\|_* \le \frac{1}{2} \|y_1 - y_2\|_*,$$

dunque $T : \mathcal{B}_R \to \mathcal{B}_R$ è una 1/2-contrazione nella norma $\|\cdot\|_*$. Per il principio delle contrazioni T ha punto fisso in $\mathcal{B}_R$.

Altre dimostrazioni del Teorema di Peano

In questa sezione diamo (alcune) ulteriori strategie di dimostrazione del Teorema di Peano. Per ciascuna forniremo solamente una linea dimostrativa, lasciando eventualmente allo studente il compito di completare i dettagli, magari aiutandosi con la consultazione di libri dedicati alle equazioni differenziali ordinarie. Si tenga presente, infatti, che alcuni passaggi nelle dimostrazioni non sono del tutto ovvi e che certi altri necessitano di un'analisi piuttosto articolata.

1) (variante della dimostrazione proposta) Fissati M e δ come nell'enunciato e fissato $\nu \in \mathbb{N}$, $\nu \geq 1$, sia

$$I_{\nu,k} := \Big[t_0 + (k-1)\frac{\delta}{\nu}, t_0 + k\frac{\delta}{\nu}\Big],$$

con $k = 0, \dots, \nu$. Definiamo una soluzione approssimata $y_\nu(t)$ in maniera induttiva su ogni $I_{\nu,k}$. Sia $y_\nu(t) = y_0$ per $t \in I_{\nu,0}$. Supposto di avere definito y_ν in $I_{\nu,k}$, la definiamo nel successivo intervallo $I_{\nu,k+1}$ ponendo

$$y_\nu(t) = y_0 + \int_{t_0}^{t} f\Big(s, y_\nu\big(s - \frac{\delta}{\nu}\big)\Big)\, ds,$$

per $t \in I_{\nu,k+1}$. Si può dimostrare che (y_ν) è una successione equilimitata ed equicontinua dunque, per il Teorema di Ascoli-Arzelà, ammette una sottosuccessione uniformemente convergente in $[t_0, t_0+\delta]$ a una funzione continua y. Passando al limite nella definizione di y_ν si verifica infine che y è soluzione del problema di Cauchy (2.10).

2) (metodi di punto fisso) Si è già ripetutamente osservato che (2.10) è equivalente al problema

$$y = Ty$$

dove T è l'operatore è definito in (2.5); inoltre sappiamo anche che se $\delta \leq \varepsilon_0$, allora $T : \mathcal{B} \to \mathcal{B}$ dove $\mathcal{B}$ è la palla di centro $y_0(t) \equiv y_0$ e raggio R nello spazio di Banach $\big(C(I_\delta, \mathbb{R}), ||\cdot||_\infty\big)$. Siamo dunque ricondotti a cercare un punto fisso di T in $\mathcal{B}$. A tal fine risulta utile il Teorema del punto fisso di Schauder, generalizzazione del Teorema di Brouwer. Entrambi sono argomento di corsi avanzati di Analisi Funzionale per cui ne ometteremo la dimostrazione.

Teorema 2.23 (di Brouwer) *Sia $\mathcal{B} \subset \mathbb{R}^n$ una palla chiusa. Se $f : \mathcal{B} \to \mathcal{B}$ è continua allora f ammette punto fisso in $\mathcal{B}$.*

Il teorema rimane valido se al posto di $\mathcal{B}$ si prende un insieme $\mathcal{C}$ omeomorfo a una palla chiusa. Il Teorema di Schauder generalizza il Teorema di Brouwer al caso degli spazi normati infinito dimensionali; in questo caso la sola ipotesi di continuità della funzione f non è sufficiente a garantire l'esistenza di un punto fisso. Essenzialmente ciò dipende dal fatto che le palle chiuse in una spazio normato infinito dimensionale *non* sono compatte. Per ovviare al problema si chiederà alla funzione f un'ulteriore proprietà di compattezza.

Definizione 2.24 *Siano* $(X, ||\cdot||_X)$, $(Y, ||\cdot||_Y)$ *spazi normati. Una funzione* $f : X \to Y$ *si dice* compatta *se trasforma insiemi limitati di* X *in insiemi relativamente compatti di* Y*. La funzione* f *si dice* completamente continua *se è continua e compatta.*

Esercizio 2.25 Dimostrare che se $Y = \mathbb{R}^n$ allora f è completamente continua se e solo se f è continua e trasforma insiemi limitati in insiemi limitati. Da ciò discenderà che se X ha dimensione finita il Teorema di Schauder si riduce a quello di Brouwer.

Teorema 2.26 (di Schauder) *Sia* $\mathcal{B}$ *una palla chiusa in una spazio normato* $(X, ||\cdot||_X)$*. Se* $f : \mathcal{B} \to \mathcal{B}$ *è completamente continua allora* f *ammette punto fisso in* $\mathcal{B}$*. (In generale è sufficiente che* $\mathcal{B}$ *sia un insieme chiuso, limitato e convesso.)*

Applichiamo il Teorema di Schauder all'operatore di Volterra. Verifichiamo che T è (uniformemente) continua. Poiché f è uniformemente continua in $I_\alpha \times B[y_0, R]$, per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\delta_\varepsilon > 0$ tale che se $s \in I_\alpha$, $x, z \in B[y_0, R]$ soddisfano $||x - z|| < \delta_\varepsilon$ allora $||f(s, x) - f(s, z)|| < \varepsilon$. Prese due funzioni y_1, y_2 appartenenti alla palla $\mathcal{B}$ di centro y_0 e raggio R in $C(I_\delta, \mathbb{R})$ tali che $||y_1 - y_2||_\infty < \delta_\varepsilon$, per ogni $t \in I_\delta$ si ha dunque

$$\big\|Ty_1(t) - Ty_2(t)\big\| \le \left| \int_{t_0}^{t} \big\|f(s, y_1(s)) - f(s, y_2(s))\big\| \, ds \right| \le |t - t_0|\varepsilon \le \alpha\varepsilon,$$

quindi $||Ty_1 - Ty_2||_\infty \le \alpha\varepsilon$, da cui la (uniforme) continuità di T. Verifichiamo che T è compatta; a tal fine è sufficiente dimostrare che l'immagine della palla $\mathcal{B}$ tramite T è un insieme relativamente compatto in $\big(C(I_\delta, \mathbb{R}), ||\cdot||_\infty\big)$ (infatti ogni sottoinsieme di un insieme relativamente compatto è relativamente compatto). Essendo $T(\mathcal{B}) \subseteq \mathcal{B}$ l'insieme $T(\mathcal{B})$ è sicuramente limitato. Verifichiamo che è equicontinuo. Presa una funzione $y \in \mathcal{B}$, per ogni $t_1, t_2 \in I_\delta$ si ha

$$\big\|Ty(t_2) - Ty(t_1)\big\| \le \left| \int_{t_1}^{t_2} \big\|f(s, y(s))\big\| \, ds \right| \le M|t_2 - t_1|,$$

dove M è definito come nell'enunciato del Teorema di Peano. Dunque l'insieme $T(\mathcal{B}) = \big\{Ty(\cdot) : y \in \mathcal{B}\big\}$ è anche equilipschitziano, quindi equiuniformemente continuo. Per il Teorema di Ascoli-Arzelà è allora relativamente compatto in $\big(C(I_\delta, \mathbb{R}), ||\cdot||_\infty\big)$ dunque, per il Teorema di Schauder, T ha almeno un punto fisso in $\mathcal{B}$ che, come sappiamo, è soluzione di (2.10) in I_δ.

3) (approssimazione lipschitziana del campo vettoriale) Dato il problema (2.10) si approssima, uniformemente in $I_\alpha \times B[y_0, R]$, il campo vettoriale f con una successione di campi vettoriali f_m localmente lipschitziani nella seconda variabile (per esempio di classe C^1). Considerato

$$\begin{cases} y' = f_m(t, y) \\ y(t_0) = y_0, \end{cases} \tag{2.14}$$

per il Teorema di Cauchy, per ogni $m \in \mathbb{N}$ il problema (2.14) ammette una (unica) soluzione locale y_m definita in un intorno I_{δ_m} di t_0. Si può dimostrare che se m è sufficientemente grande le soluzioni y_m possono essere definite in un intervallo comune I_δ e che convergono uniformemente in I_δ a una funzione continua y. Passando al limite per $m \to +\infty$ nella formulazione di (2.14) mediante la relativa equazione di Volterra, si ottiene infine che y è soluzione di (2.1) in I_δ.

Estensione del concetto di soluzione

Nella dimostrazione dei Teoremi di Cauchy e di Peano con $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$ continua, si è utilizzata la seguente equivalenza,

$$\text{(I)} \quad \boxed{\begin{array}{c} y \in C^1(I_\delta) \text{ è soluzione di} \\ \begin{cases} y' = f(t, y) \\ y(t_0) = y_0, \end{cases} \end{array}} \iff \text{(II)} \quad \boxed{\begin{array}{c} y \in C(I_\delta) \text{ è soluzione di} \\ y(t) = y_0 + \displaystyle\int_{t_0}^{t} f(s, y(s))\, ds, \end{array}}$$

che permette di riformulare il problema dell'esistenza di una soluzione per un'equazione differenziale nel problema dell'esistenza di un punto fisso per un'equazione integrale di Volterra. L'importanza di questa seconda formulazione sta anche nel fatto che richiede meno regolarità per le soluzioni ($y \in C(I_\delta)$) rispetto alla prima ($y \in C^1(I_\delta)$). Non solo: per avere senso, la prima formulazione, detta "forte" o "classica", necessita almeno di una funzione derivabile, mentre la seconda formulazione richiede solamente l'integrabilità della funzione $t \mapsto f(t, y(t))$. Nel caso in cui si volessero indebolire le ipotesi di continuità su f, la formulazione classica perderebbe

significato mentre (II) sarebbe ancora applicabile; in pratica si può considerare (II) come la definizione generale di soluzione del problema di Cauchy. Volendo accennare a una possibile estensione della teoria, per esempio è possibile utilizzare (II) nel caso in cui f è continua rispetto a y ma non necessariamente rispetto a t, più precisamente si può richiedere che

1. per "quasi ogni" fissato t, la funzione $y \mapsto f(t, y)$ è continua,
2. per ogni fissato y, la funzione $t \mapsto f(t, y)$ è "misurabile",

più alcune altre condizioni tecniche, che evitiamo di riportare. Per comprendere correttamente le locuzioni "quasi ogni" e "funzione misurabile" c'è bisogno di strumenti come la teoria della misura e l'integrale di Lebesgue, argomenti di corsi più avanzati dell'Analisi Matematica. Sotto tale ipotesi, si verifica che per ogni funzione continua $y(t)$ la funzione $t \mapsto f(t, y(t))$ è integrabile (secondo Lebesgue), e argomenti di punto fisso permettono di dimostrare l'esistenza di una funzione continua $y(t)$ tale che

$$y(t) = y_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, y(s))\, ds \text{ per quasi ogni } t \in I_\delta,$$

detta "soluzione alla Carathéodory" del problema di Cauchy. Si può dimostrare che $y(t)$ è anche "assolutamente continua", derivabile in quasi ogni punto e tale che l'equazione $y'(t) = f(t, y(t))$ sia verificata in senso classico per quasi ogni $t \in I_\delta$. Se inoltre la funzione $y \mapsto f(t, y)$ è localmente lipschitziana continua a sussistere anche l'unicità locale.

È anche possibile sviluppare una teoria nel caso in cui f non sia continua neanche rispetto a y, ma le cose si complicano notevolmente...

Capitolo 3

Unicità e prolungabilità

Unicità locale e globale

Il Teorema di Cauchy-Lipschitz 2.7 individua alcune condizioni sufficienti ma non necessarie per l'esistenza e l'unicità locale delle soluzioni dei problemi di Cauchy. Per esempio, è noto che c'è unicità nel caso di equazioni a variabili separabili del tipo $y' = h(t)g(y)$, con h, g continue, non necessariamente localmente lipschitziane, tali che $g(y) \neq 0$ per ogni y. Nell'Esempio 2.10 si è inoltre visto che il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = y \\ y(0) = 1, \end{cases}$$

ammette l'unica soluzione locale $y(t) = \mathrm{e}^t$ su ogni intervallo $[-\delta, \delta]$ con $\delta < 1$. Ma è banale verificare che tale funzione è definita ed è soluzione in tutto $\mathbb{R}$. È l'unica soluzione sulla retta reale? Vedremo che la risposta è sì, ma la questione non è proprio banale come si evincerà dal seguente esempio. In generale ci interesseremo del problema della cosiddetta "unicità in grande" o "globale" cioè dell'unicità della soluzione su intervalli di definizione possibilmente più ampi di quelli considerati dal Teorema di Cauchy-Lipschitz.

Esempio 3.1 Consideriamo il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = 2\sqrt{|y|} \\ y(0) = -1. \end{cases}$$

Il campo vettoriale (autonomo) $f(t, y) = 2\sqrt{|y|}$ è definito e continuo su tutto $\mathbb{R}^2$ ma non è localmente lipschitziano in un intorno dei punti $(t_0, 0)$, al variare

di $t_0 \in \mathbb{R}$. Il dato iniziale $(t_0, y_0) = (0, -1)$ non è di questo tipo, ed essendo f di classe C^1 in un suo intorno, per il Teorema di Cauchy-Lipschitz il problema di Cauchy in considerazione ammette un'unica soluzione locale. Più precisamente, nelle ipotesi del teorema α può essere preso a piacere mentre R deve essere preso in maniera tale che $B[y_0, R] = B[-1, R]$ sia contenuta in una regione su cui f è di classe C^1; dovrà dunque essere $0 \notin B[-1, R]$ da cui $R < 1$. Di conseguenza $M = \max\{2\sqrt{|z|} : |z+1| \leq R\} = 2\sqrt{R+1}$. Il Teorema di Cauchy-Lipschitz garantisce esistenza e unicità locale della soluzione in I_δ con $\delta \leq \varepsilon_0 = \min\{\alpha, R/M\} = \min\{\alpha, R/(2\sqrt{R+1})\} = R/(2\sqrt{R+1})$, non appena α è sufficientemente grande. Si osservi che essendo $0 < R < 1$ tale numero è inferiore a $\sqrt{2}/4$. In definitiva il massimo intervallo su cui il teorema garantisce l'esistenza è $[-\delta, \delta]$ con $\delta < \sqrt{2}/4$.

Utilizzando il metodo di separazione delle variabili è possibile calcolare esplicitamente tale soluzione. Poiché $y(0) = -1$, per continuità $y(t) < 0$ in un intorno di $t_0 = 0$; finché y non si annulla si può applicare il metodo di separazione delle variabili, per il quale

$$\int_{y_0}^{y(t)} \frac{1}{2\sqrt{-z}}\, dz = \int_{t_0}^{t} ds \quad \Longrightarrow \quad \Big[-\sqrt{-z}\Big]_{-1}^{y(t)} = t \quad \Longrightarrow \quad y(t) = -(t-1)^2.$$

Tale funzione si annulla per $t = 1$, dunque il metodo fornisce la soluzione $y(t) = -(t-1)^2$ definita nell'intervallo $]-\infty, 1]$. Inoltre, ogni soluzione deve necessariamente coincidere con quest'ultima, quindi c'è unicità della soluzione in $]-\infty, 1]$, ovvero in un intervallo comunque più ampio di quello previsto dal Teorema di Cauchy-Lipschitz.

Per $t = 1$ si ha $y(1) = 0$ e non è possibile estendere ulteriormente il metodo di separazione delle variabili. Si noti che $(t_1, y(t_1)) = (1, 0)$ è un punto in cui il campo vettoriale cessa di essere localmente lipschitziano; da tale punto si biforcano infinite soluzioni per $t > 1$. In particolare, le funzioni

$$y_c(t) = \begin{cases} -(t-1)^2 & \text{se } t \leq 1 \\ 0 & \text{se } 1 < t < 1 + c \\ (t-c)^2 & \text{se } t \geq 1 + c, \end{cases}$$

al variare di $c > 0$, sono tutte soluzioni del problema di Cauchy in oggetto. Questo esempio dimostra che può esserci unicità locale ma non globale.

La perdita dell'unicità globale nell'esempio precedente è dovuta al fatto che, pur essendoci unicità locale in un intorno di t_0, in $t_1 > t_0$ la traiettoria della soluzione passa per un punto in cui si perdono la locale lipschitzianità del campo vettoriale e l'unicità delle soluzioni ivi passanti. In definitiva l'unicità

globale di un singolo problema di Cauchy dipende in realtà dall'unicità locale di *tutti* i problemi di Cauchy; essenzialmente andremo a dimostrare che

$$\boxed{\text{unicità locale per tutti i problemi di Cauchy} \implies \text{unicità globale}}$$

Teorema 3.2 (di unicità globale) *Data un'equazione $y' = f(t, y)$, con $f : \Omega \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ continua, tale che abbia unicità locale per tutti i relativi problemi di Cauchy (per esempio se f è localmente lipschitziana), allora ammette unicità globale per i medesimi problemi. Più precisamente, se $y_i : I_i \to \mathbb{R}^n$, $i = 1, 2$, sono soluzioni del problema di Cauchy*

$$\begin{cases} y' = f(t, y) \\ y(t_0) = y_0, \end{cases}$$

allora $y_1 = y_2$ in $I_1 \cap I_2$.

Dimostrazione Anzitutto si osservi che I_1, I_2 sono intervalli contenenti t_0 quindi $I_1 \cap I_2$ è un intervallo non vuoto contenente t_0. Definiamo

$$J := \{t \in I_1 \cap I_2 : \ y_1(t) = y_2(t)\}.$$

Per ipotesi $t_0 \in J \neq \varnothing$. Dalla continuità di y_1, y_2 segue che J è chiuso in $I_1 \cap I_2$. Verifichiamo che è anche aperto; infatti, se $\tau \in J$ si ha $y_1(\tau) = y_2(\tau)$. Per l'esistenza e unicità locale esiste un'unica soluzione del problema di Cauchy $y' = f(t, y)$, $y(\tau) = y_1(\tau)$ definita in un opportuno intervallo chiuso I_τ di centro τ. Poiché y_1 e y_2 sono entrambe soluzioni di tale problema si avrà $y_1 \equiv y_2$ in $I_\tau \cap (I_1 \cap I_2)$ Dunque esiste tutto un intorno aperto di τ (nella topologia relativa) contenuto in $I_1 \cap I_2$, perciò J è anche aperto. In definitiva J è un aperto, chiuso e non vuoto contenuto in $I_1 \cap I_2$. Dalla connessione di $I_1 \cap I_2$ segue $J = I_1 \cap I_2$ cioè la tesi. □

Conseguenze sulle traiettorie e sulle orbite

Supponendo che una data equazione differenziale $y' = f(t, y)$ abbia unicità di soluzioni per tutti i problemi di Cauchy associati, cosa si può dire delle traiettorie e delle orbite? Vediamo che

$$\boxed{\text{unicità} \implies \text{la traiettorie non si intersecano}}$$

nel senso che due traiettorie o sono disgiunte oppure coincidono (localmente). Infatti, siano $y : I_y \to \mathbb{R}^n$ e $z : I_z \to \mathbb{R}^n$ due soluzioni dell'equazione; se

le due traiettorie hanno punti in comune, ovvero esiste almeno un punto $(\bar{t}, \bar{y}) \in \mathcal{T}_y \cap \mathcal{T}_z$ allora entrambe le funzioni sono soluzioni del problema di Cauchy con dati iniziali $y(\bar{t}) = \bar{y}$. Per il Teorema 3.2 y e z devono allora coincidere su tutto $I_y \cap I_z$. Le traiettorie non possono quindi intersecarsi trasversalmente (si veda la Figura 3.1).

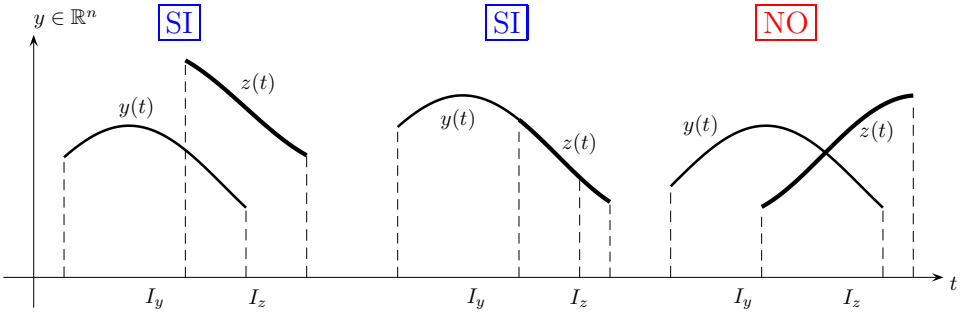


Figura 3.1: Le traiettorie non si intersecano

Bisogna stare attenti che invece

$$\boxed{\text{unicità} \implies \text{le orbite possono comunque intersecarsi}}$$

come si intuisce facilmente osservando la Figura 3.2.

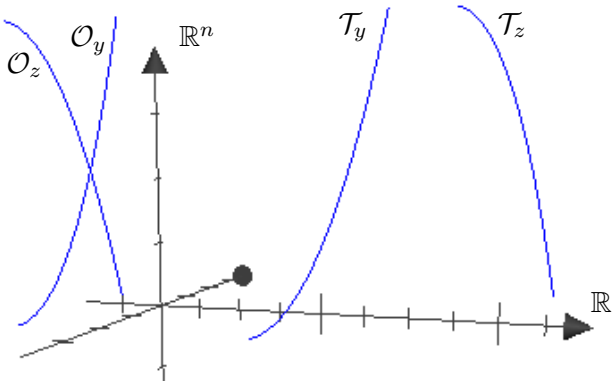


Figura 3.2: Le orbite possono intersecarsi

Può dunque accadere che $\mathcal{O}_y \cap \mathcal{O}_z$ consti di un unico punto $\bar{y}$ (come in figura) per cui $y(t_1) = z(t_2) = \bar{y}$ per qualche t_1, t_2 ma allora dovrà essere $t_1 \neq t_2$ perché altrimenti anche le traiettorie si intersecherebbero trasversalmente,

il che è assurdo. Se però l'equazione è autonoma, cioè $y' = f(y)$, neanche le orbite possono intersecarsi trasversalmente, cioè

$$\boxed{\text{unicità + equazione autonoma} \implies \text{le orbite non si intersecano}}$$

Infatti, se come prima $y : I_y \to \mathbb{R}^n$ e $z : I_z \to \mathbb{R}^n$ sono due soluzioni dell'equazione tali che $y(t_1) = z(t_2)$, per l'Osservazione 1.6 anche la funzione $x(t) := y(t - t^*)$, con $t^* = t_2 - t_1$, è soluzione in $I_x = I_y + t^*$. Ma allora

$$x(t_2) = y(t_2 - (t_2 - t_1)) = y(t_1) = z(t_2),$$

quindi $(t_2, z(t_2)) \in \mathcal{T}_x \cap \mathcal{T}_z$ e per l'unicità $x = z$ in $I_x \cap I_z$, ovvero $y(t - t^*) = z(t)$ per ogni $t \in (I_y + t^*) \cap I_z$. Ne consegue che le due soluzioni sono una la traslata temporale dell'altra e, limitatamente all'intervallo $(I_y + t^*) \cap I_z$, le orbite di y e z coincidono e non si possono avere intersezioni trasversali.

Esercizio 3.3 Provare che la situazione in Figura 3.2 può effettivamente accadere, per esempio verificando che per il seguente sistema planare

$$\begin{cases} x' = 1 \\ y' = 2t, \end{cases}$$

l'intersezione di due orbite distinte consta sempre di un unico punto.

Esercizio 3.4 Data l'equazione differenziale $y' = f(y)$ con $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ localmente lipschitziana, dimostrare che ogni soluzione è strettamente monotona oppure è un equilibrio. È ancora vero se f è solamente continua?

Il fenomeno di Peano

Cosa succede quando si perde l'unicità locale? Quante soluzioni può avere in questo caso un singolo problema di Cauchy? Come si dispongono geometricamente le soluzioni nello spazio delle traiettorie?

Risponderemo con precisione a queste domande nel caso $n = 1$ di una singola equazione differenziale scalare, dando alcuni cenni al caso $n \geq 2$. Considereremo i tempi $t \geq t_0$; un discorso analogo varrà per $t \leq t_0$. In generale, dato il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = f(t, y) \\ y(t_0) = y_0, \end{cases} \tag{3.1}$$

con f continua, si può dimostrare che esistono due particolari soluzioni dette *integrale superiore* e *integrale inferiore* e che denoteremo, rispettivamente,

con $\overline{y}(t)$ e $\underline{y}(t)$, tali che per ogni altra soluzione $y(t)$ e per ogni tempo t appartenente a un comune intervallo di definizione si ha

$$\underline{y}(t) \leq y(t) \leq \overline{y}(t).$$

Ovviamente, nel caso in cui c'è unicità delle soluzioni si avrà $\underline{y}(t) = \overline{y}(t)$ per ogni t. Per dimostrare l'esistenza di queste due soluzioni è necessario utilizzare dei metodi leggermente più raffinati delle poligonali di Eulero che permettono di costruire opportune soluzioni approssimate di una qualsiasi fissata soluzione; per approfondire l'argomento si veda per esempio [8].

In aggiunta, il quadro geometrico delle soluzioni è ben delineato: si ha il cosiddetto *fenomeno di Peano* (spesso chiamato anche *pennello di Peano*). Si può infatti dimostrare che per ogni $t^* > t_0$ e ogni y^* tale che $\underline{y}(t^*) \leq y^* \leq \overline{y}(t^*)$ esiste almeno una soluzione $y(t)$ di (3.1) tale che $y(t^*) = y^*$. Da ciò discende che l'*insieme dei punti raggiungibili* con soluzioni di (3.1), dato da

$$\mathcal{R} := \big\{(t, y(t)) : \ y : I_y \to \mathbb{R}^n \text{ soluzione di (3.1)}, \, t \in I_y\big\},$$

individua nel piano delle traiettorie una sorta di "pennello" delimitato dall'alto e dal basso dalle traiettorie di $\overline{y}$ e $\underline{y}$ (si veda la Figura 3.3). L'*insieme dei punti raggiungibili all'istante* t^*, cioè

$$\mathcal{R}(t^*) := \mathcal{R} \cap \{t = t^*\},$$

è invece un segmento congiungente i punti $(t^*, \overline{y}(t^*))$ e $(t^*, \underline{y}(t^*))$.

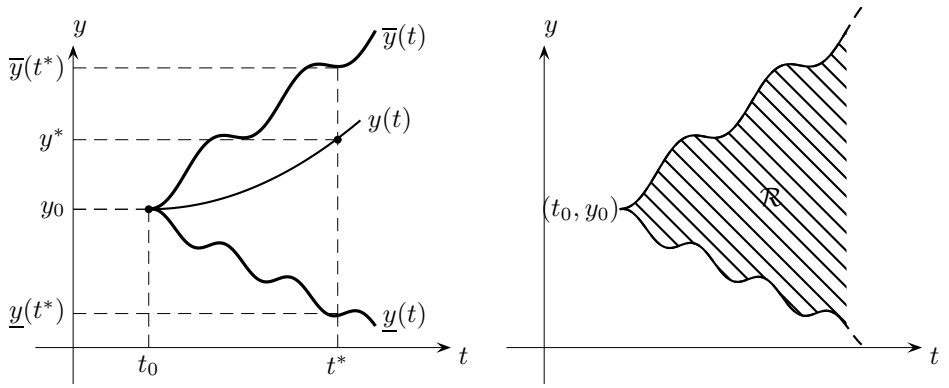


Figura 3.3: Pennello di Peano

Nel caso $n \geq 2$ non si ha a disposizione una relazione d'ordine in $\mathbb{R}^n$, per cui il quadro geometrico può essere più complicato. Vale però la seguente generalizzazione ai sistemi di n equazioni.

Teorema 3.5 (di Kneser) *Data l'equazione differenziale $y' = f(t, y)$ con $f : \Omega \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ continua e fissato $(t_0, y_0) \in \Omega$, sia δ come nelle ipotesi del Teorema di Cauchy-Lipschitz 2.7. Allora per ogni $t^* \in I_\delta$ l'insieme*

$$\mathcal{R}(t^*) := \big\{(t^*, y(t^*)) : \ y : I_\delta \to \mathbb{R}^n \text{ è soluzione di } (3.1)\big\},$$

ovvero l'insieme dei punti raggiungibili all'istante t^* mediante soluzioni di (3.1)*, è un continuo, cioè un insieme compatto e connesso.*

Se $n \geq 2$, tale insieme potrebbe non essere semplicemente connesso, come illustrato dal seguente esempio.

Esempio 3.6 Si consideri il sistema bidimensionale

$$\begin{cases} y_1' = y_1 - \dfrac{y_2\sqrt{|y_2|}}{\sqrt[4]{y_1^2 + y_2^2}} \\ y_2' = y_2 + \dfrac{y_1\sqrt{|y_2|}}{\sqrt[4]{y_1^2 + y_2^2}} \\ y_1(0) = 1, \ y_2(0) = 0. \end{cases} \tag{3.2}$$

In generale per un sistema planare autonomo della forma

$$\begin{cases} x' = a(x, y) \\ y' = b(x, y), \end{cases}$$

operando il cambio di coordinate in variabili polari $(x, y) = (\rho\cos\theta, \rho\operatorname{sen}\theta)$ e inversamente $(\rho, \theta) = (\sqrt{x^2 + y^2}, \operatorname{arctg}(y/x))$ si ottiene

$$\begin{aligned} \rho' &= \frac{1}{2\sqrt{x^2 + y^2}}(2xx' + 2yy') = \frac{x'\rho\cos\theta + y'\rho\operatorname{sen}\theta}{\rho} \\ &= x'\cos\theta + y'\operatorname{sen}\theta = a(x, y)\cos\theta + b(x, y)\operatorname{sen}\theta \\ &= a(\rho\cos\theta, \rho\operatorname{sen}\theta)\cos\theta + b(\rho\cos\theta, \rho\operatorname{sen}\theta)\operatorname{sen}\theta, \end{aligned} \tag{3.3}$$

$$\begin{aligned} \theta' &= \frac{1}{1 + (y/x)^2} \cdot \frac{y'x - yx'}{x^2} = \frac{y'\rho\cos\theta - x'\rho\operatorname{sen}\theta}{\rho^2} \\ &= \frac{y'\cos\theta - x'\operatorname{sen}\theta}{\rho} = \frac{b(x, y)\cos\theta - a(x, y)\operatorname{sen}\theta}{\rho} \\ &= \frac{b(\rho\cos\theta, \rho\operatorname{sen}\theta)\cos\theta - a(\rho\cos\theta, \rho\operatorname{sen}\theta)\operatorname{sen}\theta}{\rho}. \end{aligned} \tag{3.4}$$

In questo caso, con $(x, y) = (y_1, y_2)$, per tutte le soluzioni per cui ρ non è mai nullo si ottiene facilmente

$$\begin{cases} \rho' = \rho \\ \theta' = \sqrt{|\operatorname{sen}\theta|} \\ \rho(0) = 1,\ \theta(0) = 0, \end{cases} \tag{3.5}$$

sistema di due equazioni disaccoppiate. La prima equazione ha soluzione generale $\rho(t) = \rho_0 \mathrm{e}^t$. La seconda equazione ha il campo vettoriale continuo ma non localmente lipschitziano in un intorno dei punti in cui $\operatorname{sen}\theta$ si annulla cioè $(t_0, k\pi)$ con $k \in \mathbb{Z}$. Il dato iniziale è di questo tipo dunque ci si aspetta di non avere unicità delle soluzioni. In particolare, le funzioni $\theta_k(t) = k\pi$ sono tutte soluzioni (sono equilibri). Dall'equilibrio $\theta_0 = 0$ si biforcano altre infinite soluzioni; per separazione delle variabili, per tutti i $t > 0$ per i quali $0 < \theta(t) < \pi$ si ottiene

$$\int_0^{\theta(t)} \frac{1}{\sqrt{\operatorname{sen}\varphi}}\, d\varphi = \int_0^t ds,$$

dove il primo integrale si deve interpretare come integrale improprio in $\varphi = 0$ (si dimostri che tale integrale converge). Detta $H(\varphi)$ la primitiva tale che $H(0) = 0$ (si potrebbe calcolarla in funzione di opportuni integrali ellittici), si ottiene l'equazione $H(\theta(t)) = t$. Anche l'integrale improprio (in $\varphi = \pi$)

$$\int_0^{\pi} \frac{1}{\sqrt{\operatorname{sen}\varphi}}\, d\varphi$$

è convergente (lo si dimostri per esercizio); sia τ il suo valore che corrisponde al tempo che impiega la soluzione considerata a connettere l'equilibrio in 0 con quello in π. Numericamente si trova $\tau \approx 5.2439$. Nell'intervallo $[0, \tau]$ la funzione H è crescente e continua, dunque la si può invertire ottenendo la soluzione $\theta(t) = H^{-1}(t)$. Al tempo $t = \tau$ la soluzione del sistema (3.5) si trova in $(\rho(\tau), \theta(\tau)) = (\mathrm{e}^\tau, \pi)$ che è ancora un punto in cui l'equazione $\theta' = \sqrt{|\operatorname{sen}\theta|}$ perde l'unicità. Per $t > \tau$ la soluzione può dunque essere prolungata con l'equilibrio $\theta_1(t) = \pi$ oppure si utilizza ancora la separazione delle variabili ottenendo, grazie alla relazione $\operatorname{sen}(\psi - \pi) = -\operatorname{sen}\psi$,

$$\int_\pi^{\theta(t)} \frac{1}{\sqrt{-\operatorname{sen}\psi}}\, d\psi = \int_\tau^t ds \quad \Longrightarrow \quad \int_0^{\theta(t)-\pi} \frac{1}{\sqrt{\operatorname{sen}\varphi}}\, d\varphi = t - \tau.$$

Nell'intervallo di tempi $[\tau, 2\tau]$ si ottiene quindi la soluzione data in forma implicita da $H(\theta(t) - \pi) = t - \tau$, oppure in forma esplicita da $\theta(t) = \pi +$

$H^{-1}(t-\tau)$. Al tempo $t = 2\tau$ la soluzione del sistema (3.5) si trova quindi in $(\rho(2\tau), \theta(2\tau)) = (\mathrm{e}^{2\tau}, 2\pi)$ ovvero la fase θ ha compiuto un giro completo. Più precisamente, limitatamente all'intervallo $[0, 2\tau]$ la funzione $\underline{\theta}(t) = 0$ è l'integrale inferiore del problema di Cauchy $\theta' = \sqrt{|\operatorname{sen}\theta|}$, $\theta(0) = 0$, mentre la funzione

$$\overline{\theta}(t) := \begin{cases} H^{-1}(t) & \text{se } t \in [0, \tau] \\ \pi + H^{-1}(t-\tau) & \text{se } t \in]\tau, 2\tau], \end{cases}$$

è l'integrale superiore. Si osservi che le soluzioni $(\rho(t), \underline{\theta}(t))$ e $(\rho(t), \overline{\theta}(t))$ del sistema (3.5) al tempo 2τ si trovano, rispettivamente, in $(\mathrm{e}^{2\tau}, 0)$ e in $(\mathrm{e}^{2\tau}, 2\pi)$, punti che coincidono nelle coordinate (y_1, y_2). Prendiamo dunque $t^* = 2\tau$; per il fenomeno di Peano l'insieme dei valori $\theta(t^*)$ punti raggiunti al tempo t^* da tutte le soluzioni del problema di Cauchy $\theta' = \sqrt{|\operatorname{sen}\theta|}$, $\theta(0) = 0$ è dato dall'intervallo $[0, 2\pi]$, perciò l'insieme dei punti raggiunti dalle soluzioni di (3.5) al tempo t^* è dato da $\{\mathrm{e}^{t^*}\} \times [0, 2\pi]$ che corrisponde nelle coordinate (y_1, y_2) a una circonferenza di centro l'origine e raggio e^{t^*} nel piano $t = t^*$. Si osservi che tale insieme non è semplicemente connesso.

Per completezza, si può verificare che tutte e sole le soluzioni di (3.5) in $[0, t^*]$ sono date da $(\rho(t), \theta_{s,r}(t))$ dove $\rho(t) = \mathrm{e}^t$ e $\theta_{s,r}$ è data da

$$\theta_{s,r}(t) := \begin{cases} 0 & \text{se } t \in [0, s] \\ H^{-1}(t-s) & \text{se } t \in [s, s+\tau] \\ \pi & \text{se } t \in [s+\tau, r+s+\tau] \\ \pi + H^{-1}(t-(r+s+\tau)) & \text{se } t \in]r+s+\tau, 2\tau]. \end{cases}$$

ristretta all'intervallo $[0, t^*] = [0, 2\tau]$, al variare dei parametri $r, s \geq 0$ tali che $0 \leq s \leq \tau$ e $0 \leq r \leq \tau - s$, oppure $\tau < s \leq 2\tau$ nel qual caso la scrittura sopra si semplifica leggermente, mancando delle ultime due righe.

Esercizio 3.7 Trovare l'integrale superiore e l'integrale inferiore relativi ai due problemi di Cauchy

$$\begin{cases} y' = 2\sqrt{|y|} \\ y(0) = 1, \end{cases} \qquad \begin{cases} y' = 2\sqrt{|y|} \\ y(0) = 0, \end{cases}$$

per $t > 0$ e $t < 0$. Dimostrare correttamente le proprie affermazioni. Descrivere i relativi pennelli di Peano.

Esercizio 3.8 Studiare l'esistenza e l'unicità delle soluzioni dei problemi di Cauchy relativi alle equazioni differenziali $y' = \sqrt{1-y^2}$, $y' = t\sqrt{1-y^2}$ e $y' = \sqrt{|1-y^2|}$. Si determinino esplicitamente tutte le possibili soluzioni.

Esercizio 3.9 Dato il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y_1' = y_1\sqrt{1-\dfrac{1}{y_1^2+y_2^2}} - \dfrac{y_2\sqrt{|y_2|}}{\sqrt[4]{y_1^2+y_2^2}} \\ y_2' = y_2\sqrt{1-\dfrac{1}{y_1^2+y_2^2}} + \dfrac{y_1\sqrt{|y_2|}}{\sqrt[4]{y_1^2+y_2^2}} \\ y_1(0)=1,\ y_2(0)=0, \end{cases}$$

studiare l'esistenza e unicità locale delle soluzioni. Descrivere l'insieme delle soluzioni e dei punti raggiungibili all'istante t^* con t^* sufficientemente grande.

Prolungamenti - Soluzioni massimali

Grazie al Teorema di Peano (o di Cauchy-Lipschitz) il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = f(t,y) \\ y(t_0) = y_0, \end{cases} \tag{3.6}$$

con f continua, ammette una soluzione locale $y_0(t)$ definita in un opportuno intervallo $I_0 := I_{\delta_0}(t_0) = [t_0-\delta_0, t_0+\delta_0]$. A sua volta il punto $(t_1, y_1) = (t_0+\delta_0, y_0(t_0+\delta_0))$ appartiene ancora al dominio di definizione Ω di f, perciò è possibile considerare il problema di Cauchy con dati $y(t_1) = y_1$ che, sempre per Peano, ammette una soluzione locale $y_1(t)$ definita in un intervallo $I_1 := I_{\delta_1}(t_1)$. Si osservi che anche y_0 è soluzione di tale problema in un intorno sinistro di t_1, ma se non c'è unicità delle soluzioni non è detto che y_0 e y_1 coincidano nell'intersezione dei loro domini $I_0 \cap I_1$. Comunque, è possibile definire una nuova soluzione di (3.6) in $I_0 \cup I_1$ "incollando" quelle due già trovate; più precisamente si può definire

$$y_{0,1}(t) := \begin{cases} y_0(t) & \text{se } t \in [t_0-\delta_0, t_0+\delta_0] \\ y_1(t) & \text{se } t \in]t_0+\delta_0, t_0+\delta_0+\delta_1] =]t_1, t_1+\delta_1], \end{cases}$$

rappresentata in Figura 3.4. Tale funzione è banalmente derivabile in tutti i punti diversi da t_1, ed è ivi soluzione dell'equazione differenziale, perché coincide localmente attorno a ogni punto diverso da t_1 con y_0 o con y_1 che sono soluzioni. Soddisfa inoltre le condizioni iniziali $y_{0,1}(t_0) = y_0$. Per costruzione la funzione $y_{0,1}$ è continua nel punto t_1 ma, essendo un incollamento di due funzioni, potrebbe non essere derivabile. In realtà, essendo

un incollamento di due *soluzioni* della medesima equazione differenziale, è automaticamente anche derivabile in t_1, e di conseguenza soluzione in tutto $I_0 \cup I_1$. Infatti

$$\begin{aligned}\lim_{t\to t_1-} y'_{0,1}(t) &= \lim_{t\to t_1-} y'_0(t) = y'_0(t_1) = f(t_1, y_0(t_1)) \\ &= f(t_1, y_1(t_1)) = y'_1(t_1) = \lim_{t\to t_1+} y'_1(t) = \lim_{t\to t_1+} y'_{0,1}(t),\end{aligned}$$

quindi y_0 e y_1 hanno un contatto del primo ordine in t_1, dunque $y_{0,1}$ è ivi derivabile e soddisfa chiaramente $y'_{0,1}(t_1) = f(t_1, y_{0,1}(t_1))$. La medesima costruzione si può fare partendo dal punto $t_0 - \delta_0$ fino ad arrivare a un qualche punto $t_0 - \delta_0 - \delta'_1$.

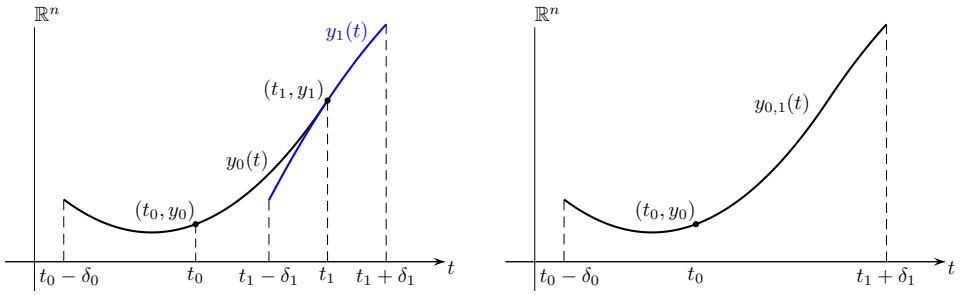


Figura 3.4: Prolungamento di una soluzione

In definitiva, siamo riusciti a prolungare la soluzione y_0 a un intervallo di definizione maggiore di quello iniziale I_0. A questo punto la medesima costruzione può proseguire per induzione, ottenendo un prolungamento di $y_{0,1}$, dunque di y_0, a un intervallo $[t_2, t_2 + \delta_2] = [t_1 + \delta_1, t_1 + \delta_1 + \delta_2]$, e così via. In questo maniera sembrerebbe possibile estendere y_0 su tutto $[t_0, +\infty[$ (e analogamente su $]-\infty, t_0]$); in realtà, se per esempio il dominio Ω di f è limitato, poiché tutti i punti (t_k, y_k) così ottenuti stanno in Ω, si avrà $\sup_k t_k < +\infty$ e non si potrà estendere y_0 a tutto $[t_0, +\infty[$. Ma anche nel caso in cui Ω fosse tutto $\mathbb{R}^{n+1}$, tale costruzione porterebbe comunque a definire un prolungamento di $y_0(t)$ definito in $[t_0, t_0 + \sum_{k=0}^{\infty} \delta_k[$ e nel caso in cui la serie convergesse, tale intervallo sarebbe limitato. Le soluzioni $y_k(t)$ che in successione prolungano $y_0(t)$ saranno infatti definite su intervalli con, possibilmente, differenti ampiezze δ_k; nulla vieta che la successione δ_k tenda a 0 per $k \to +\infty$ e che la serie di termine generale δ_k converga (anzi, ciò dovrà per forza accadere nel caso in cui Ω è limitato).

Nel caso (per semplicità) in cui $\Omega =]a, b[\times A$ con $A \subseteq \mathbb{R}^n$ vedremo che

- con questa costruzione non è detto che si riesca a ricoprire tutto $]a, b[$;

- (nelle ipotesi del Teorema di Peano) non esiste nemmeno un unico modo per farlo.

Si affronterà questa problematica introducendo il concetto di prolungamento di una soluzione.

Definizione 3.10 *Data $y : I \to \mathbb{R}^n$ soluzione di un'equazione differenziale $y' = f(t, y)$, si dice* prolungamento di y *una funzione $y^* : I^* \to \mathbb{R}^n$ che sia ancora soluzione, con $I \subsetneq I^*$ e tale che $y^*|_I \equiv y$.*

Definizione 3.11 *Una soluzione $y : I \to \mathbb{R}^n$ di un'equazione differenziale $y' = f(t, y)$ si dice* soluzione massimale *se non ammette prolungamenti. Il suo intervallo di definizione I viene allora detto* intervallo massimale di esistenza di y.

Si osservi subito la seguente proprietà dell'intervallo massimale d'esistenza.

Proposizione 3.12 *L'intervallo massimale d'esistenza I di una soluzione massimale è aperto.*

Dimostrazione Se per assurdo I fosse chiuso a destra (analogamente a sinistra) cioè $I =]a, b]$, per quanto visto nell'introduzione alla presente sezione sarebbe possibile trovare un prolungamento della soluzione y in un intervallo $[b, b + \delta]$ per qualche δ, contro la massimalità di y. □

L'intervallo massimale d'esistenza si denota generalmente con $]\alpha, \beta[$ oppure con $]\alpha, \omega[$. Diamo ora due teoremi di esistenza di soluzioni massimali nel caso in cui l'equazione abbia, oppure non abbia, unicità delle soluzioni dei relativi problemi di Cauchy.

Teorema 3.13 (di esistenza di soluzioni massimali (I)) *Data una equazione $y' = f(t, y)$, con $f : \Omega \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ continua, tale che abbia unicità locale per tutti i relativi problemi di Cauchy (per esempio se f è localmente lipschitziana), allora ogni problema di Cauchy ammette un'unica soluzione massimale. Inoltre, ogni soluzione dell'equazione può essere prolungata in maniera unica a una soluzione massimale.*

Dimostrazione Fissato un punto $(t_0, y_0) \in \Omega$ si consideri l'insieme di tutte le possibili soluzioni del relativo problema di Cauchy

$$\mathcal{S} := \big\{ y : I_y \to \mathbb{R}^n |\ y \text{ è soluzione tale che } y(t_0) = y_0 \big\}.$$

Sia $I^* = \cup_{y\in\mathcal{S}} I_y$ (è un intervallo contenente t_0) e si definisca $y^*(t) = y(t)$ se $t \in I_y$. Bisogna verificare che questa è una buona definizione, cioè che il valore di $y^*(t)$ non dipende dalla scelta dell'intervallo I_y a cui t appartiene. Sia dunque $t \in I_{y_1} \cap I_{y_2}$ con y_1, y_2 soluzioni del problema di Cauchy. Grazie all'unicità, per il Teorema 3.2 si ha $y_1 \equiv y_2$ in $I_{y_1} \cap I_{y_2}$, in particolare $y_1(t) = y_2(t)$, dunque quella data è una buona definizione e y^* è una soluzione del problema di Cauchy in considerazione. Se ora $\tilde{y} : \tilde{I} \to \mathbb{R}^n$ è una soluzione che prolunga y^* allora $\tilde{y} \in \mathcal{S}$, perciò per costruzione $\tilde{I} \subseteq I^*$, ovvero y^* non ammette prolungamenti ed è quindi soluzione massimale.

Data infine una qualsiasi soluzione $\tilde{y}$ in $\tilde{I}$, fissato $t_0 \in \tilde{I}$ sia y^* l'unica soluzione massimale del problema di Cauchy con dati $(t_0, \tilde{y}(t_0))$. Allora y^* è l'unico prolungamento massimale di $\tilde{y}$. □

Teorema 3.14 (di esistenza di soluzioni massimali (II)) *Data una equazione $y' = f(t, y)$, con $f : \Omega \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ continua, allora ogni soluzione dell'equazione può essere prolungata (non necessariamente in maniera unica) a una soluzione massimale.*

Dimostrazione La dimostrazione del teorema precedente non si adatta al presente caso perché, a causa della mancanza di unicità, quella di y^* non è più una buona definizione. Fissata una soluzione $\tilde{y} : \tilde{I} \to \mathbb{R}^n$, si dimostrerà il teorema utilizzando il Lemma di Zorn, introducendo nell'insieme dei possibili prolungamenti

$$\mathcal{S} := \left\{(y, I_y) |\ y : I_y \to \mathbb{R}^n \text{ è soluzione, } \tilde{I} \subseteq I_y,\ y|_{\tilde{I}} \equiv \tilde{y}\right\}$$

un ordine parziale definito come segue. Dati $(y, I_y), (z, I_z) \in \mathcal{S}$ si pone

$$(y, I_y) \prec (z, I_z) \qquad \Longleftrightarrow \qquad I_y \subseteq I_z \text{ e } z|_{I_y} \equiv y.$$

Si verifica facilmente che $(\mathcal{S}, \prec)$ è un insieme parzialmente ordinato. Dimostriamo che è induttivo, cioè che ogni sottoinsieme totalmente ordinato ammette maggiorante in $\mathcal{S}$. Dato allora $\mathcal{T} \subset \mathcal{S}$ totalmente ordinato, sia $J = \cup_{(y,I_y)\in\mathcal{T}} I_y$ e si definisca $z : J \to \mathbb{R}^n$ tale che $z(t) = y(t)$ se $t \in I_y$. Anche in questo caso bisogna verifica che si tratta di una buona definizione. Sia dunque $t \in I_{y_1} \cap I_{y_2}$ con $(y_1, I_{y_1}), (y_2, I_{y_2}) \in \mathcal{T}$; poiché $\mathcal{T}$ è totalmente ordinato i due elementi (y_1, I_{y_1}) e (y_2, I_{y_2}) sono confrontabili. Senza perdere in generalità sia $(y_1, I_{y_1}) \prec (y_2, I_{y_2})$; si ha dunque $I_{y_1} \cap I_{y_2} = I_{y_1}$ e $y_2 = y_1$ in I_{y_1}, in particolare $y_2(t) = y_1(t)$. In definitiva z è ben definita, è soluzione dell'equazione differenziale e prolungamento di $\tilde{I}$ perché lo sono tutte le y, dunque $(z, I_z) \in \mathcal{S}$ e per costruzione è un maggiorante di $\mathcal{T}$. L'insieme $(\mathcal{S}, \prec)$ è allora induttivo e per il Lemma di Zorn esiste un elemento (y^*, I^*)

massimale. Tale elemento è una soluzione massimale dell'equazione (e prolungamento di $\tilde{y}$). Infatti, se per assurdo esistesse un suo prolungamento $w : W \to \mathbb{R}^n$ con $I^* \subsetneq W$ e $w|_{I^*} \equiv y^*$ allora sarebbe $(y^*, I^*) \precneqq (w, W)$ contro la massimalità di (y^*, I^*) rispetto alla relazione d'ordine. $\square$

Del teorema esiste una dimostrazione che non fa uso del Lemma di Zorn.

Osservazione 3.15 Nel caso in cui si perde l'unicità delle soluzioni dei problemi di Cauchy, una soluzione può essere effettivamente prolungata a soluzioni massimali differenti. È interessante osservare che tali soluzioni massimali potrebbero avere anche intervalli massimali differenti. Per esempio, si consideri il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = \max\left\{\sqrt{|y|}, y^2\right\} \\ y(0) = 0. \end{cases}$$

Il campo vettoriale autonomo $f(y) = \max\left\{\sqrt{|y|}, y^2\right\}$ è continuo, essendo massimo tra due funzioni continue; più precisamente

$$f(y) = \begin{cases} \sqrt{|y|} & \text{se } |y| \leq 1 \\ y^2 & \text{se } |y| > 1. \end{cases}$$

In particolare si osserva che localmente per $y(t)$ vicino a zero le soluzioni si comportano come quelle dell'equazione $y' = \sqrt{|y|}$ dunque non sono uniche, mentre per $|y(t)| > 1$ le soluzioni si comportano come quelle dell'equazione $y' = y^2$ che non sono globalmente definite.

La soluzione identicamente nulla $\tilde{y}(t) = 0$ definita nell'intervallo $I = [-\delta, \delta]$ si può prolungare a una soluzione massimale in infiniti modi. Per esempio può essere prolungata alla soluzione (massimale) $y_0(t)$ identicamente nulla su tutto $\mathbb{R}$, il cui intervallo massimale di definizione è quindi $\mathbb{R}$. Oppure, per ogni $c \geq \delta$ può essere prolungata alla soluzione $y_c(t)$ definita da

$$y_c(t) = \begin{cases} 0 & \text{se } t \leq c \\ \frac{(t-c)^2}{4} & \text{se } c < t \leq c+2 \\ \frac{1}{c+3-t} & \text{se } c+2 < t \leq c+3. \end{cases}$$

Poiché $\lim_{t \to (c+3)^-} y_c(t) = +\infty$ non è possibile prolungare ulteriormente questa funzione; y_c è dunque soluzione massimale in $]-\infty, c+3[$. Si noti che tutte queste soluzioni, al contrario di y_0, non sono globalmente definite e che il loro intervallo massimale d'esistenza dipende dal parametro c.

Fuga dai compatti

Cosa succede se una soluzione massimale non è globalmente definita, cioè non può essere definita sul più grande intervallo compatibilmente con l'insieme Ω di definizione di f? Vedremo che essenzialmente la traiettoria della soluzione deve, in qualche modo da precisare meglio, tendere al bordo dell'aperto di definizione. Questo risultato sarà conseguenza del più generale Teorema della fuga dai compatti, che afferma che le soluzioni massimali escono definitivamente da ogni compatto di Ω. Tale teorema deriverà facilmente dal seguente risultato.

Teorema 3.16 (della chiusura del grafico)[1] *Sia $y^* : I^* \to \mathbb{R}^n$ soluzione massimale dell'equazione $y' = f(t, y)$ con $f : \Omega \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ continua. Allora il suo grafico è chiuso nella topologia relativa di Ω, cioè per ogni successione $(t_j, y(t_j))$ convergente a un punto $(\bar{t}, \bar{y})$ appartenente a Ω, si ha $\bar{t} \in I^*$ e $y^*(\bar{t}) = \bar{y}$, ovvero il punto $(\bar{t}, \bar{y})$ appartiene al grafico di y^*.*

Dimostrazione Osserviamo che una volta dimostrato che $\bar{t} \in I^*$, cioè che y^* è definita in $\bar{t}$, per continuità segue subito $\bar{y} = \lim_{j\to\infty} y^*(t_j) = y^*(\bar{t})$. Inoltre, dimostreremo la tesi limitatamente al caso in cui l'equazione differenziale $y' = f(t, y)$ ammette unicità delle soluzioni dei problemi di Cauchy associati; per la dimostrazione nel caso generale si vedano gli approfondimenti alla fine al capitolo.

Poiché $(\bar{t}, \bar{y}) \in \Omega$ e Ω è aperto, è possibile costruire un cilindro di sicurezza di centro $(\bar{t}, \bar{y})$ e contenuto in Ω. Siano dunque $\delta, R > 0$ tali che $C_{\delta,R}(\bar{t}, \bar{y}) := [\bar{t} - \delta, \bar{t} + \delta] \times B[\bar{y}, R] \subset \Omega$ per cui $C_{\delta,R}(\bar{t}, \bar{y})$ sia cilindro di sicurezza; sappiamo che ciò accade se $\delta \le R/M$ dove $M := \max\big\{\|f(s, z)\| : (s, z) \in C_{\delta,R}(\bar{t}, \bar{y})\big\}$. Essendo $(t_j, y(t_j)) \to (\bar{t}, \bar{y})$, definitivamente si avrà $(t_j, y(t_j)) \in C_{\delta/2,R/2}(\bar{t}, \bar{y})$ per $j \ge j_0$; d'ora in avanti si fissi uno di tali $(t_j, y_j) := (t_j, y(t_j))$. In particolare si avrà $(\bar{t}, \bar{y}) \in C_{\delta/2,R/2}(t_j, y_j)$, dove $C_{\delta/2,R/2}(t_j, y_j) = [t_j - \delta/2, t_j + \delta/2] \times B[y_j, R/2]$. Verifichiamo che è un cilindro di sicurezza. Posto $M_1 := \max\big\{\|f(s, z)\| : \ (s, z) \in C_{\delta/2,R/2}(t_j, y_j)\big\}$, essendo $C_{\delta/2,R/2}(t_j, y_j) \subset C_{\delta,R}(\bar{t}, \bar{y})$ si ha $M_1 \le M$ dunque

$$M_1\delta \le M\delta \le R \quad \Longrightarrow \quad \delta/2 \le \frac{R/2}{M_1}.$$

[1] Da non confondere con il Teorema del grafico chiuso, classico risultato dell'Analisi Funzionale.

Il cilindro $C_{\delta/2,R/2}(t_j, y_j)$ è allora di sicurezza e per il Teorema di Peano esiste una soluzione $y_j(t)$ del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = f(t, y) \\ y(t_j) = y_j, \end{cases}$$

definita in $[t_j - \delta/2, t_j + \delta/2]$. Essendo $\bar{t} \in [t_j - \delta/2, t_j + \delta/2]$ la soluzione $y_j(t)$ è definita in $\bar{t}$. Osservando che anche la soluzione y^* è soluzione massimale del medesimo problema di Cauchy, per l'unicità $y^*(t)$ coincide con $y_j(t)$ in $[t_j - \delta/2, t_j + \delta/2]$, in particolare y^* è definita in $\bar{t}$, da cui la tesi. □

Teorema 3.17 (della fuga dai compatti) *Sia $y :]\alpha, \beta[\to \mathbb{R}^n$ soluzione massimale di $y' = f(t, y)$ con $f : \Omega \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ continua. Allora la sua traiettoria esce definitivamente da ogni compatto di Ω per $t \to \alpha^+$ oppure $t \to \beta^-$, ovvero per ogni compatto $K \subset \Omega$ esistono $a_k, b_k \in]\alpha, \beta[$ tali che*

$$(t, y(t)) \notin K \quad \textit{per ogni } \alpha < t < a_k \textit{ e ogni } b_k < t < \beta.$$

Dimostrazione Ragioniamo per $t \to \beta^-$; analogamente si può fare per $t \to \alpha^+$. Per assurdo è possibile trovare un compatto K in Ω e una successione di tempi $t_j \to \beta^-$ tali che $(t_j, y(t_j)) \in K$. Per la compattezza di K, eventualmente passando a sottosuccessioni, si ha che $(t_j, y(t_j))$ converge a un punto $(\beta, \bar{y})$ che appartiene a $K \subset \Omega$ perché K è chiuso. Per il Teorema 3.16 β appartiene all'intervallo di definizione di y, assurdo perché y è massimale e il suo intervallo massimale è aperto. □

Alcune conseguenze della fuga dai compatti

In questa sottosezione verranno riportate alcune semplici considerazioni sul comportamento delle traiettorie o delle orbite delle soluzioni massimali che derivano direttamente dal Teorema della fuga dai compatti. Ci limiteremo a studiare cosa succede in futuro ma risultati del tutto analoghi valgono anche in passato. Essenzialmente la traiettoria di una soluzione massimale $y :]\alpha, \beta[\to \mathbb{R}^n$ tende a "uscire" dal bordo di Ω per $t \to \beta^-$ (e per $t \to \alpha^+$), dove il termine "bordo" deve essere pensato in senso esteso comprendendo l'infinito (in norma) nel caso in cui Ω è illimitato. Si noti che è sempre possibile costruire una "successione di compatti che invade Ω", ovvero una successione (K_j) di compatti in Ω, crescente per inclusione, tale che $K_j \subset \overset{\circ}{K}_{j+1}$ e $\bigcup_{j \in \mathbb{N}} K_j = \Omega$. Per esempio (verificarlo per esercizio), preso $y_0 \in \Omega$ basta considerare $K_j = \{y \in \Omega : \ \operatorname{dist}(y, \partial\Omega) \geq 1/j\} \cap B[y_0, j]$. Una soluzione massimale dovrà uscire da *tutti* questi compatti, perciò la sua traiettoria

dovrà avvicinarsi al bordo di Ω oppure tendere in qualche modo all'infinito (questo caso ovviamente può accadere solo se Ω è illimitato); per individuare l'effettivo comportamento bisogna tenere sempre in considerazione la geometria dell'aperto di definizione Ω.

Caso generale: l'aperto di definizione è generico, $\boxed{\Omega \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n}$.

La traiettoria $(t, y(t))$ può "uscire" da Ω in vari modi; essenzialmente, o esplode in norma, oppure tende ad avvicinarsi a $\partial\Omega$, magari convergendo a un punto della frontiera, oppure verifica un mix di entrambi (si veda l'Esempio (3.23)); comunque la traiettoria tende, in senso lato, al bordo di Ω. In aggiunta, dovendo uscire dai compatti di Ω, la traiettoria $(t, y(t))$ non può avere punti di accumulazione interni a Ω per $t \to \beta^-$; per studiare questi ultimi, si supponga che $t_j \to \beta^-$ e si consideri il comportamento della relativa successione di punti del grafico $(t_j, y(t_j))$. Ci sono dunque due alternative:

i) la successione $(t_j, y(t_j))$ è non limitata, quindi, eventualmente passando a sottosuccessioni, $\|(t_j, y(t_j))\| \to \infty$; ciò può accadere solo se Ω è non limitato; oppure

ii) la successione $(t_j, y(t_j))$ è limitata, e volendo studiare i punti di accumulazione si può supporre (nuovamente passando a sottosuccessione) che anche $y(t_j)$ abbia limite. Sarà dunque $(t_j, y(t_j)) \to (\beta, y_\beta) \in \overline{\Omega}$. Non può essere $(\beta, y_\beta) \in \Omega$ perché altrimenti, per il Teorema della fuga dai compatti, si avrebbe che β apparterrebbe al dominio di definizione di y, assurdo. Quindi $(\beta, y_\beta) \in \partial\Omega$, cioè ogni punto di accumulazione al finito della traiettoria sta sul bordo di Ω. Rientra in questa eventualità il caso in cui $\beta < \infty$ e tutta l'orbita $y(t)$ ha limite finito per $t \to \beta^-$.

In definitiva i punti di accumulazione, come anche il limite (quando esiste), della traiettoria di y per $t \to \beta^-$ o sono infiniti, oppure appartengono alla frontiera di Ω. Si possono già fare delle distinzioni a seconda del tempo di esistenza della soluzione.

Sottocaso $\boxed{\beta = +\infty}$**.** Ciò può ovviamente accadere solo se Ω è illimitato. La soluzione è dunque definita per sempre in futuro e ci si trova nel caso i) sopra elencato, in particolare la traiettoria esce da ogni compatto nella direzione dell'asse dei tempi, e il Teorema della fuga dai compatti non ci permette di avere altre informazioni sul comportamento della componente $y(t)$ per $t \to \beta = +\infty$: quest'ultima può esplodere in norma, tendere a un

limite finito oppure non ammettere limite come, per esempio, ma non solo, in presenza di un'orbita periodica. Considerate infatti le tre equazioni/sistemi

$$y' = y, \qquad w' = -w, \qquad \begin{cases} y_1' = y_2 \\ y_2' = -y_1, \end{cases}$$

hanno tutte soluzioni globalmente definite in futuro (e passato), per esempio, rispettivamente $y(t) = \mathrm{e}^t$, $w(t) = \mathrm{e}^{-t}$, $(y_1(t), y_2(t)) = (\operatorname{sen} t, \cos t)$, la prima che tende a $+\infty$, la seconda che tende a 0, la terza che non ha limite per $t \to +\infty$ (soluzione periodica). Si possono verificare casi più complessi, nei quali si osservano contemporaneamente i vari comportamenti; per esempio,

$$y' = \frac{y}{t} + t\cos t$$

ammette in $]0, +\infty[$ la soluzione $y(t) = t(1 + \operatorname{sen} t)$ tale che per $t_j = 3\pi/2 + 2\pi j$ si ha $y(t_j) = 0$, mentre per $\tilde{t}_j = \pi/2 + 2\pi j$ si ha $y(\tilde{t}_j) = 2\tilde{t}_j \to +\infty$. In realtà, poiché l'immagine di $y(t)$ è $[0, +\infty[$ per ogni c in tale intervallo, esiste una successione (t_j^c) tale che $y(t_j^c) \to c$ per $j \to +\infty$. Anche la funzione $\bar{y}(t) = t \operatorname{sen} t$ è soluzione dell'equazione: in questo caso l'immagine è tutto $\mathbb{R}$.

Sottocaso $\boxed{\beta < +\infty}$**.** I due punti precedenti si specializzano in:

i) $\|y(t_j)\| \to \infty$. Esistono valori dell'orbita che in norma tendono all'infinito; nel caso $n = 1$ ci si riduce ai due casi $y(t_j) \to \pm\infty$;

ii) $y(t_j) \to y_\beta \in \mathbb{R}^n$. Si ha dunque $(t_j, y(t_j)) \to (\beta, y_\beta) \in \partial\Omega$.

Caso del "rettangolo" (detto anche della "striscia"): l'aperto di definizione è un insieme prodotto, possibilmente non limitato, del tipo $\boxed{\Omega = J \times A}$ dove $J =]a, b[$ con $-\infty \le a < b \le +\infty$ e $A \subset \mathbb{R}^n$ è aperto. Per molti sistemi di equazioni differenziali il dominio di definizione è di questo tipo; per quelli che non rientrano in questa categoria è sempre possibile restringere il dominio a un sottodominio di questa forma, ottenendo in questo modo delle informazioni sulle soluzioni, localizzate a questo particolare sottodominio.

Valgono chiaramente tutte le osservazioni fatte nel caso generale, ma in certi punti si può essere più precisi, perché la particolare geometria dell'aperto permette di avere maggiori informazioni sulle *orbite*.

Sottocaso $\boxed{\beta = b}$**.** La soluzione, compatibilmente col dominio Ω, è globalmente definita in futuro (si veda la Figura 3.5). Per quanto concerne i punti di accumulazione di $(t, y(t))$ valgono le medesime considerazioni del caso generale: o $y(t)$ tende in norma all'infinito per $t \to \beta^-$, oppure, se finito, il limite deve appartenere alla frontiera di Ω, in particolare appartiene all'insieme $\{\beta\} \times \overline{A}$ ma il Teorema 3.17 non ci permette di distinguere tra le eventualità.

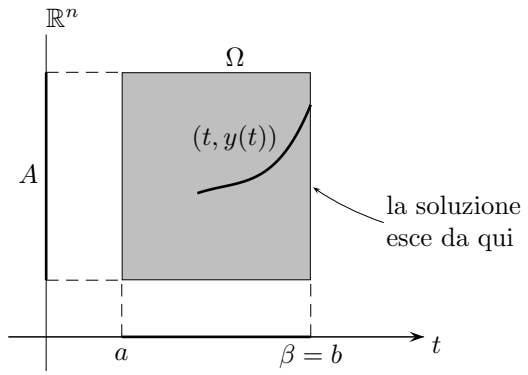


Figura 3.5: La fuga dai compatti: caso $\beta = b$

Sottocaso $\boxed{\beta < b}$**.** La soluzione non è globalmente definita in futuro. Dimostriamo che allora l'*orbita* esce definitivamente da tutti i compatti di A. A tal fine basta applicare i Teorema 3.17 a opportuni compatti di Ω, specificatamente, fissato $t_0 \in]\alpha, \beta[$, ai compatti della forma $[t_0, \beta] \times H$ con H compatto di A. Per $t \to \beta^-$ la traiettoria $(t, y(t))$ deve uscire da questi compatti ma poiché t non esce mai da $[t_0, \beta]$ allora $y(t)$ deve uscire da H. Dall'arbitrarietà di H segue che l'orbita $y(t)$ esce definitivamente per $t \to \beta^-$ da tutti i compatti di A (si veda la Figura 3.6). Per quanto riguarda i punti di accumulazione dell'orbita, procedendo come sopra si ottiene, eventualmente passando a sottosuccessioni, che vale la seguente alternativa per $y(t_j)$ con $t_j \to \beta^-$:

i) $\|y(t_j)\| \to \infty$ **(**$y(t_j) \to \pm\infty$ nel caso $n = 1$**).** Può accadere solo se A è illimitato; oppure

ii) $y(t_j) \to y_\beta \in \mathbb{R}^n$**.** Necessariamente $y_\beta \in \partial A$, cioè tutti i punti di accumulazione dell'orbita per $t \to \beta$ stanno sulla frontiera.

Come conseguenza si ha che se, come si dice, $y(t)$ "visita" frequentemente un compatto allora è globalmente definita. Infatti se esistono

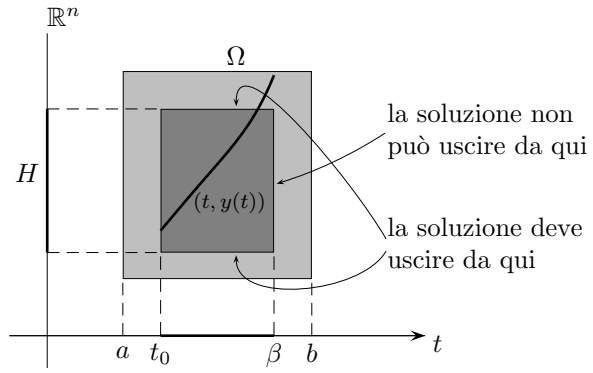


Figura 3.6: La fuga dai compatti: caso $\beta < b$

un compatto H di A e una successione $t_j \to \beta^-$ tale che $y(t_j) \in H$, per compattezza ed eventualmente passando a una sottosuccessione, $y(t_j)$ converge a un qualche y_β di $H \subset A$, il che contrasta con ii). Non può quindi essere $\beta < b$, dunque $\beta = b$.

Si osservi che nel caso di equazioni autonome $y' = f(y)$ il campo vettoriale f, come funzione delle variabili (t, y), è definito nel rettangolo $\mathbb{R} \times A$ con $A \subseteq \mathbb{R}^n$ aperto. Dire che la soluzione è globalmente definita in futuro (in passato) equivale allora a dire che $\beta = +\infty$ ($\alpha = -\infty$).

Caso della "striscia infinita": è un sottocaso del caso del rettangolo (striscia), in cui l'aperto di definizione è del tipo $\boxed{\Omega = J \times \mathbb{R}^n}$.

Nel caso in cui $\beta < b$ l'orbita della soluzione deve uscire da tutti i compatti di $A = \mathbb{R}^n$, in particolare da tutte le palle $B[0, R]$, ovvero per ogni $R > 0$ esiste t_R tale che per $t \in]t_R, \beta[$ si ha $y(t) \notin B[0, R]$ ovvero $\|y(t)\| > R$, cioè $\lim_{t \to \beta^-} \|y(t)\| = +\infty$. Vista l'importanza e il frequente utilizzo, riscriviamo questo risultato sotto forma di teorema.

Teorema 3.18 (dell'esplosione in norma) *Sia $y :]\alpha, \beta[\to \mathbb{R}^n$ soluzione massimale di $y' = f(t, y)$ con $f :]a, b[\times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ continua. Se y non è globalmente definita in futuro (cioè $\beta < b$) allora*

$$\lim_{t \to \beta^-} \|y(t)\| = +\infty,$$

cioè y esplode in norma in tempo finito (si parla anche di "blowup" della norma). Un analogo risultato vale in passato per $t \to \alpha^+$.

Dimostrazione Fatta sopra. □

Vediamo adesso alcuni esempi di blowup per soluzioni non globalmente definite in futuro.

Esempio 3.19 Data l'equazione autonoma $y' = y^2$ con campo vettoriale definito su tutto $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ e preso $y_0 > 0$, per separazione delle variabili la soluzione del relativo problema di Cauchy con $y(0) = y_0$ è data da $y(t) = \frac{y_0}{1-y_0 t}$ definita al massimo su $]-\infty, 1/y_0[$. Per il Teorema 3.18 dobbiamo allora aspettarci l'esplosione in norma per $t \to \beta^-$ e infatti $\lim_{t\to(1/y_0)^-} y(t) = +\infty$.

Esempio 3.20 Preso $(x_0, y_0) \neq (0,0)$, si consideri il problema di Cauchy

$$\begin{cases} x' = x\sqrt{x^2+y^2} - y \\ y' = y\sqrt{x^2+y^2} + x \\ x(t_0) = x_0,\ y(t_0) = y_0. \end{cases}$$

Il campo vettoriale autonomo $f(x,y) = (x\sqrt{x^2+y^2} - y, y\sqrt{x^2+y^2} + x)$ è definito e continuo in $\mathbb{R}^2$ e sicuramente di classe C^1 in $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. È poi possibile verificare che ciascuna componente è differenziabile con continuità anche nell'origine per cui $f \in C^1(\mathbb{R}^2)$. Si osservi che per l'applicazione del Teorema di Cauchy-Lipschitz è sufficiente dimostrare la locale lipschitzianità di f, e questa è evidente (senza studiarne la differenziabilità!) perché la mappa $(x,y) \mapsto \sqrt{x^2+y^2}$ pur non essendo differenziabile nell'origine è globalmente 1-lipschitziana; infatti non è altro che la norma euclidea del vettore (x,y). Poiché le componenti di f sono prodotti/somme di funzioni localmente lipschitziane, f è localmente lipschitziana, in particolare in $(0,0)$, l'unico punto che potrebbe dare problemi per la lipschitzianità. In ogni caso si può applicare il Teorema di Cauchy-Lipschitz; si hanno dunque esistenza e unicità locale per le soluzioni di tutti i problemi di Cauchy. Osservato che il problema di Cauchy con dati iniziali $(x_0, y_0) = (0,0)$ ha come (unica) soluzione la funzione identicamente nulla ($(0,0)$ è un equilibrio del sistema), per l'unicità (il campo vettoriale è autonomo quindi le orbite non si intersecano) ogni altra soluzione $(x(t), y(t))$ sarà sempre diversa da $(0,0)$ per ogni t di definizione. Vista anche la forma particolare del sistema, è allora possibile provare a utilizzare le coordinate polari. Posto $\rho = \sqrt{x^2+y^2}$ e $\theta = \operatorname{arctg}(y/x)$, le equazioni del sistema si riscrivono come $x' = \rho x - y$, $y' = \rho y + x$ che insieme a (3.3)-(3.4) forniscono

$$\rho' = \frac{xx' + yy'}{\rho} = \frac{x(\rho x - y) + y(\rho y + x)}{\rho} = x^2 + y^2 = \rho^2,$$
$$\theta' = \frac{xy' - yx'}{\rho^2} = \frac{x(\rho y + x) - y(\rho x - y)}{\rho^2} = \frac{x^2+y^2}{\rho^2} = 1,$$

ottenendo quindi il problema di Cauchy

$$\begin{cases} \rho' = \rho^2 \\ \theta' = 1 \\ \rho(t_0) = \rho_0,\ \theta(t_0) = \theta_0. \end{cases} \tag{3.7}$$

dove $\rho_0 = \sqrt{x_0^2 + y_0^2}$, $\theta_0 = \operatorname{arctg}(y_0/x_0)$ (dove si suppone, per semplicità $x_0 \neq 0$). Il sistema è disaccoppiabile nei due problemi di Cauchy

$$\begin{cases} \rho' = \rho^2 \\ \rho(t_0) = \rho_0, \end{cases} \qquad \begin{cases} \theta' = 1 \\ \theta(t_0) = \theta_0, \end{cases}$$

le cui soluzioni sono date da $\rho(t) = \dfrac{\rho_0}{1 - \rho_0(t - t_0)}$, $\theta(t) = (t - t_0) + \theta_0$. Si osservi che ρ esplode in tempo finito; inoltre, eliminando la variabile t tra le due equazioni si ottiene che $\rho(t), \theta(t)$ soddisfano le equazioni

$$\rho = \frac{\rho_0}{1 - \rho_0(\theta - \theta_0)} \quad \text{ovvero} \quad \theta - \theta_0 = \frac{1}{\rho} - \frac{1}{\rho_0},$$

che esprimono ρ in funzione di θ e viceversa. Si noti che tale equazione rappresenta un'iperbole nel piano $\rho - \theta$; in particolare, quando $\rho \to +\infty$ segue che $\theta \to \theta_0 + 1/\rho_0$, dunque quando ρ esplode la fase tende al valore fissato $\theta_0 + 1/\rho_0$. Dalle relazioni precedenti segue inoltre che la funzione $F(\rho, \theta) = \theta + 1/\rho$ è costante lungo le soluzioni, dunque è un *integrale primo* del sistema (3.7) (si veda il Capitolo 7).

Essendo $x(t) = \rho(t)\cos\theta(t)$, $y(t) = \rho(t)\operatorname{sen}\theta(t)$, si ottiene

$$\begin{cases} x(t) = \dfrac{\rho_0 \cos(t - t_0 + \theta_0)}{1 - \rho_0(t - t_0)} = \dfrac{\rho_0 \cos\theta_0 \cos(t - t_0) - \rho_0 \operatorname{sen}\theta_0 \operatorname{sen}(t - t_0)}{1 - \rho_0(t - t_0)} \\ y(t) = \dfrac{\rho_0 \operatorname{sen}(t - t_0 + \theta_0)}{1 - \rho_0(t - t_0)} = \dfrac{\rho_0 \operatorname{sen}\theta_0 \cos(t - t_0) + \rho_0 \cos\theta_0 \operatorname{sen}(t - t_0)}{1 - \rho_0(t - t_0)}, \end{cases}$$

e in conclusione

$$\begin{cases} x(t) = \dfrac{x_0 \cos(t - t_0) - y_0 \operatorname{sen}(t - t_0)}{1 - \sqrt{x_0^2 + y_0^2}(t - t_0)} \\ y(t) = \dfrac{y_0 \cos(t - t_0) + x_0 \operatorname{sen}(t - t_0)}{1 - \sqrt{x_0^2 + y_0^2}(t - t_0)}. \end{cases}$$

La soluzione così trovata è definita in $]\alpha, \beta[:=]-\infty, t_0 + 1/\sqrt{x_0^2 + y_0^2}]$ e

$$\lim_{t \to \beta^-} \big\|(x(t), y(t))\big\| = \lim_{t \to \beta^-} \frac{\rho_0}{1 - \rho_0(t - t_0)} = +\infty,$$

dunque c'è esplosione in norma, e in questo caso l'orbita tende all'infinito nella stessa direzione della retta di equazione $y = mx$ dove $m = \mathrm{tg}(\theta_0 + 1/\rho_0)$.

Una piccola variante di questo esempio permette di ottenere una soluzione che tende all'infinito in tempo finito "spiraleggiando"; basta fare in modo che all'esplodere di ρ anche la fase θ tenda a esplodere. Un esempio è dato dal seguente sistema (triangolare) in coordinate polari:

$$\begin{cases} \rho' = \rho^2 \\ \theta' = \rho \\ \rho(0) = \rho_0,\ \theta(0) = \theta_0, \end{cases} \tag{3.8}$$

dove, senza ledere in generalità, si è preso $t_0 = 0$; la cui soluzione $\rho(t)$ è sempre data da $\rho(t) = \rho_0/(1 - \rho_0 t)$ mentre

$$\theta(t) = \theta_0 + \int_0^t \rho(s)\, ds = \theta_0 + \int_0^t \frac{\rho_0}{1 - \rho_0 s}\, ds = \theta_0 - \ln(1 - \rho_0 t).$$

Si osservi che da (3.8) segue $\rho' - \rho\theta' = 0$, e moltiplicando per il fattore integrante $\mathrm{e}^{-\theta}$, si deduce $(\rho \mathrm{e}^{-\theta})' = (\rho' - \rho\theta')\mathrm{e}^{-\theta} = 0$, perciò la funzione $F(\rho, \theta) = \rho \mathrm{e}^{-\theta}$ è costante lungo le soluzioni, dunque è un integrale primo del sistema (3.8) (si veda sempre il Capitolo 7). Al medesimo risultato si può pervenire eliminando la variabile t nelle equazioni trovate per $\rho(t)$ e $\theta(t)$). In definitiva si ha $\rho = \rho_0 \mathrm{e}^{\theta - \theta_0}$, equazione che rappresenta una *spirale logaritmica* in coordinate polari.

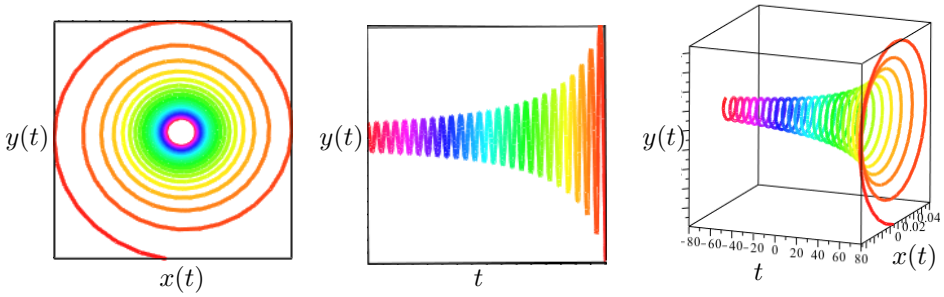


Figura 3.7: Esplosione in norma delle soluzioni in tempo finito: andamento dell'orbita, della coordinata $y(t)$, della traiettoria

Il sistema (3.8) in coordinate cartesiane diventa

$$\begin{cases} x' = (x - y)\sqrt{x^2 + y^2} \\ y' = (x + y)\sqrt{x^2 + y^2} \\ x(0) = x_0,\ y(0) = y_0, \end{cases}$$

la cui soluzione è data da

$$\begin{cases} x(t) = \dfrac{\rho_0 \cos(\theta_0 - \ln(1-\rho_0 t))}{1-\rho_0 t} \\ y(t) = \dfrac{\rho_0 \operatorname{sen}(\theta_0 - \ln(1-\rho_0 t))}{1-\rho_0 t}, \end{cases}$$

dove $\rho_0 = \sqrt{x_0^2 + y_0^2}$, $\theta_0 = \operatorname{arctg}(y_0/x_0)$ (sempre supposto, per semplicità $x_0 \neq 0$, $y_0 \geq 0$). Per quanto visto mediante le coordinate polari, la soluzione tende all'infinito in tempo *finito* spiraleggiando, si veda la Figura 3.7.

Esempio 3.21 Proseguendo, si consideri il problema

$$\begin{cases} y' = -\dfrac{t}{y} \\ y(t_0) = y_0 > 0. \end{cases}$$

Il campo vettoriale $f(t,y) = -t/y$ è definito e di classe C^1 in $\Omega = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Essendo connessa, l'orbita della soluzione sarà contenuta nella componente connessa contenente il dato iniziale. Poiché $y_0 > 0$, ci si può dunque restringere a considerare f solamente nella striscia $\Omega^+ = J \times A := \mathbb{R} \times]0, +\infty[$. Utilizzando il metodo di separazione delle variabili si ricava la soluzione $y(t) = \sqrt{t_0^2 + y_0^2 - t^2}$ definita in $]\alpha, \beta[:=]-\sqrt{t_0^2+y_0^2}, \sqrt{t_0^2+y_0^2}[$ (si osservi che y è anche definita agli estremi ma non è ivi soluzione poiché la funzione si annulla). Tale soluzione non è globalmente definita né in futuro né in passato. Poiché A non è limitato si potrebbe (erroneamente!) concludere che la soluzione esploda in norma. Ciò sarebbe automatico se fosse $A = \mathbb{R}$ ma nel presente caso $A =]0, +\infty[$. Per il teorema della fuga dai compatti, l'orbita "tende al bordo di A", quindi a priori potrebbe tendere a $+\infty$ oppure tendere a 0. Questa seconda eventualità è effettivamente ciò che accade, infatti

$$\lim_{t \to \alpha^+} y(t) = \lim_{t \to \beta^-} y(t) = 0.$$

Esempio 3.22 Può accadere che l'orbita di una soluzione massimale si avvicini contemporaneamente a tutti i punti della frontiera di A; si consideri per esempio il sistema in coordinate polari

$$\begin{cases} \rho' = (\rho - 1)\ln(1-\rho) \\ \theta' = 1, \end{cases}$$

con campo vettoriale definito per $0 \leq \rho < 1$, la cui soluzione con dati $\rho(0) = \rho_0$, $\theta(0) = \theta_0$ è data da $\rho = 1 - \exp(\mathrm{e}^t \ln(1-\rho_0)) = 1 - (1-\rho_0)^{\exp(t)}$,

$\theta(t) = t + \theta_0$ e rappresenta una spirale globalmente definita per $t \in \mathbb{R}$ tale che i punti limite dell'orbita per $t \to +\infty$ coincidono con la circonferenza di raggio unitario, che è proprio la frontiera dell'aperto di definizione. In coordinate cartesiane il sistema diventa

$$\begin{cases} x' = x\frac{\sqrt{x^2+y^2}-1}{\sqrt{x^2+y^2}}\ln(1-\sqrt{x^2+y^2}) - y \\ y' = y\frac{\sqrt{x^2+y^2}-1}{\sqrt{x^2+y^2}}\ln(1-\sqrt{x^2+y^2}) + x. \end{cases}$$

Esempio 3.23 Come già osservato in precedenza nel Caso del rettangolo, l'orbita di una soluzione massimale può (per successioni $t_j \to +\infty$) tendere all'infinito in norma o convergere a un punto della frontiera di A. Entrambi i casi possono sussistere contemporaneamente, anzi è possibile che tutti i punti della frontiera di A siano di accumulazione per l'orbita. Costruiamo un esempio di un sistema con un'orbita spiraliforme che da un lato si avvicina sempre più a una retta e dall'altro tende a esplodere in norma. L'idea della costruzione è la seguente: si considera una classica soluzione a spirale che tende in norma all'infinito, per esempio una soluzione non banale del sistema

$$\begin{cases} x' = x - y \\ y' = x + y, \end{cases} \quad \text{ovvero, in coordinate polari,} \quad \begin{cases} \rho' = \rho \\ \theta' = 1, \end{cases}$$

del tipo $\rho(t) = \rho_0 \mathrm{e}^t$, $\theta(t) = t + \theta_0$. Si scelga per facilità $\theta_0 = 0$ e $\rho_0 = 1$, ottenendo la soluzione $(\bar{x}(t), \bar{y}(t)) = (\mathrm{e}^t \cos t, \mathrm{e}^t \operatorname{sen} t)$, rappresentata in Figura 3.8. A questo punto si fa un cambio di coordinate $z = h(x)$ che

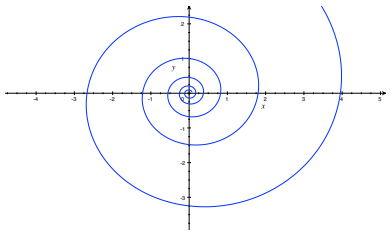


Figura 3.8: L'orbita di $(\bar{x}(t), \bar{y}(t))$

mappa l'asse delle x nella semiretta $]-\infty, 1[$ e di conseguenza $(x, y) \mapsto (z, y)$ mappa $\mathbb{R}^2$ nel semipiano $\{z < 1\}$. Il sistema riscritto nelle incognite (z, y) avrà la proprietà desiderata. La scelta di h è arbitraria; per esempio si può prendere $z = 1 - \mathrm{e}^{-x}$ con inversa data da $x = -\ln(1 - z)$, per cui

$z' = \mathrm{e}^{-x}x' = (1-z)(x-y) = (1-z)(-\ln(1-z)-y)$ e $y' = x+y = y-\ln(1-z)$ ottenendo il sistema

$$\begin{cases} z' = (z-1)(\ln(1-z)+y) \\ y' = y - \ln(1-z), \end{cases}$$

con campo vettoriale definito in $]-\infty, 1[\times\mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}^2$. La soluzione corrispondente a $(\bar{x}(t), \bar{y}(t))$ è $(\bar{z}(t), \bar{y}(t)) = (1-\exp(-\mathrm{e}^t\cos t), \mathrm{e}^t \operatorname{sen} t)$, con orbita rappresentata in Figura 3.9. Si noti che l'orbita tende ad avvicinarsi per $t \to +\infty$ a *ogni* punto della retta $z = 1$ e *contemporaneamente* ad allargarsi in ogni direzione in tutto il semipiano.

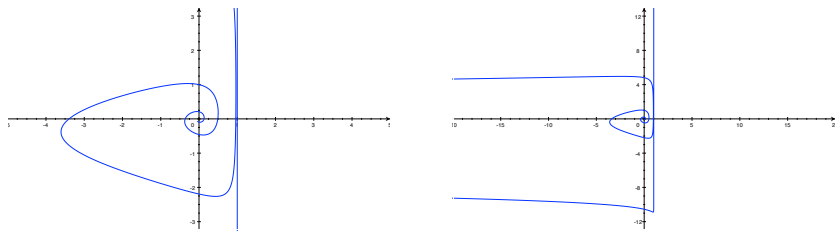


Figura 3.9: L'orbita di $(\bar{z}(t), \bar{y}(t))$ in due immagini a differente scala

A causa della scelta della funzione esponenziale, mediante il cambiamento di variabile $z = h(x)$ l'orbita di $(\bar{x}(t), \bar{y}(t))$ viene molto stirata lungo il semiasse negativo delle z. Per ottenere un esempio graficamente migliore conviene scegliere un cambio di coordinate che è approssimativamente l'identità per $x < 0$ e che mappa l'intervallo $[0, +\infty[$ in $[0, 1[$. Per esempio, definendo $x = k(w) = w-1+1/(1-w)$ per $w < 1$, e prendendo $w = k^{-1}(x)$ ovvero $w = 1 + (x - \sqrt{x^2+4})/2$. Procedendo in maniera analoga a quanto fatto sopra si ottiene il sistema

$$\begin{cases} w' = \dfrac{1-w}{1+(1-w)^2}[1-(1-w)^2 - y(1-w)] \\ y' = y + \dfrac{1-(1-w)^2}{1-w}, \end{cases}$$

e la soluzione $(\bar{w}(t), \bar{y}(t))$ corrispondente a $(\bar{x}(t), \bar{y}(t))$ in questo caso è qualitativamente rappresentata in Figura 3.10.

Esercizio 3.24 Scrivere esplicitamente un sistema le cui orbite abbiano un comportamento simile a quelle illustrate nell'Esempio 3.23 ma che non siano globalmente definite in futuro.

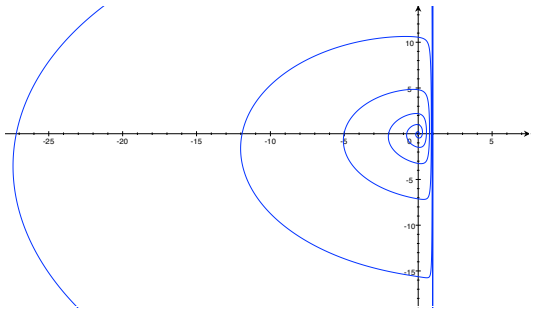


Figura 3.10: L'orbita di $(\bar{w}(t), \bar{y}(t))$

Esercizio 3.25 Scrivere esplicitamente due sistemi le cui orbite abbiano un comportamento simile a quelle illustrate in a) "spiral in a strip", oppure, rispettivamente, in b) "spiral in a box" della Figura 3.11.

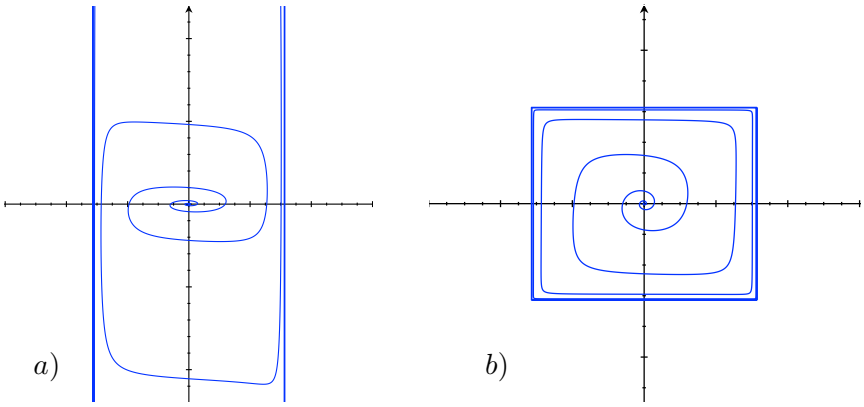


Figura 3.11: Spirali "inscatolate"

Approfondimenti

Dimostrazione del Teorema della chiusura del grafico: caso generale.

Nel caso in cui viene a mancare l'unicità delle soluzioni per i problemi di Cauchy, la dimostrazione del Teorema 3.16 deve essere modificata. Infatti, il passaggio finale nella dimostrazione che permetteva di concludere che $y^*(t)$ coincide con $y_j(t)$ non è più vero proprio per la perdita dell'unicità. Per arrivare alla tesi del teorema, in questo caso servirà il seguente lemma che

in un certo senso generalizza il Lemma 2.8, dimostrando non solo che le soluzioni che sono definite su tutta la base I_δ di un cilindro di sicurezza $I_\delta \times B[y_0, R]$ hanno valori in $B[y_0, R]$, ma anche che tutte le soluzioni che passano per il centro del cilindro (t_0, y_0) sono definite, o prolungabili, (almeno) su tutto I_δ (e di conseguenza hanno ivi valori in $B[y_0, R]$).

Lemma 3.26 *Data $f : \Omega \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ continua in Ω aperto e fissato (t_0, y_0), sia $C_{\delta,R} = I_\delta \times B[y_0, R]$ un cilindro di sicurezza di centro (t_0, y_0) e contenuto in Ω. Allora ogni soluzione massimale del problema di Cauchy*

$$\begin{cases} y' = f(t, y) \\ y(t_0) = y_0, \end{cases} \tag{3.9}$$

è definita almeno in $I_\delta = [t_0 - \delta, t_0 + \delta]$.

Dimostrazione Sia $y :]\alpha, \beta[\to \mathbb{R}^n$ soluzione massimale del problema e supponiamo per assurdo che $\beta \leq t_0 + \delta$. Dimostriamo che allora y può essere estesa per continuità a una soluzione in $]\alpha, \beta]$, assurdo per la massimalità. Più precisamente dimostriamo che vale il criterio di Cauchy per l'esistenza del limite finito per $t \to \beta^-$. Anzitutto, essendo $\beta \leq t_0 + \delta$ si può applicare il Lemma 2.8 per cui $y(t) \in B[y_0, R]$ per ogni $t \in [t_0, \beta[$. Sia $M := \max\big\{\|f(s, z)\| : \ (s, z) \in C_{\delta,R}\big\}$. Per ogni $t_1, t_2 \in [t_0, \beta[$ si ha allora

$$\|y(t_2) - y(t_1)\| \leq \left| \int_{t_1}^{t_2} \|f(s, y(s))\| \, ds \right| \leq M|t_2 - t_1| \leq \varepsilon,$$

non appena $\beta - t_1, \beta - t_2 < \varepsilon/M$. Per il criterio di Cauchy A.22 esiste finito il $\lim_{t \to \beta^-} y(t)$, sia y_β. Prolunghiamo dunque $y(t)$ a β ponendo $y(\beta) = y_\beta$; si ottiene così una funzione continua, addirittura lipschitziana, in $]\alpha, \beta]$. Infatti, passando al limite per $t_2 \to \beta^-$ nella disuguaglianza sopra si ottiene

$$\|y(\beta) - y(t_1)\| \leq M|\beta - t_1| \quad \text{per ogni } t_1 < \beta,$$

perciò y è lipschitziana in (un intorno di) β. Il punto (β, y_β) appartiene a $C_{\delta,R} \subset \Omega$, dunque per continuità di f si ha che

$$\lim_{t \to \beta^-} y'(t) = \lim_{t \to \beta^-} f(t, y(t)) = f(\beta, y(\beta)).$$

Per il Teorema del limite della derivata A.23 applicato a ciascuna componente, $y(t)$ è derivabile in β e si ha $y'(\beta) = f(\beta, y(\beta))$. In conclusione $y(t)$ può essere estesa a una soluzione in $]\alpha, \beta]$, assurdo per la massimalità. In maniera analoga si dimostra che non può essere $\alpha \geq t_0 - \delta$. □

Per concludere la dimostrazione del Teorema 3.16 basta allora osservare che $y^*(t)$ passa per il centro del cilindro di sicurezza $C_{\delta/2,R/2}(t_j, y_j)$ dunque è definita su tutto $[t_j - \delta/2, t_j + \delta/2]$ in particolare in $\bar{t}$, da cui la tesi.

Capitolo 4

Alcuni criteri di esistenza globale

In questo capitolo saranno presentati alcuni criteri per garantire l'esistenza globale delle soluzioni massimali, molti dei quali direttamente o indirettamente conseguenze del Teorema della fuga dai compatti. In particolare verso la fine del capitolo verranno enunciati e dimostrati i classici Teoremi di esistenza globale sotto le ipotesi di lipschitzianità oppure di sublinearità del campo vettoriale f. In tutto il capitolo, se non diversamente specificato, si considererà sempre il caso di un'equazione differenziale

$$y' = f(t, y),$$

dove $f : J \times A \to \mathbb{R}^n$ è definita e continua nel rettangolo $J \times A$, con $J =]a, b[$, $-\infty \leq a < b \leq +\infty$, e $A \subseteq \mathbb{R}^n$ aperto. Inoltre, $y(t)$ denoterà una soluzione massimale dell'equazione, oppure un'estensione massimale di una data soluzione.

Criteri di compattezza e limitatezza

Il primo risultato è una conseguenza diretta del Teorema della fuga dai compatti, e può essere riassunto come segue:

$$\boxed{\text{compattezza} \implies \text{esistenza globale in futuro/passato}}$$

Teorema 4.1 *Sia $y :]\alpha, \beta[\to \mathbb{R}^n$ una soluzione massimale di $y' = f(t, y)$, $f : J \times A \to \mathbb{R}^n$ continua, $J =]a, b[$. Se l'orbita della soluzione è definitivamente contenuta in futuro (rispet., in passato) in un compatto di A allora y*

è globalmente definita in futuro (rispet., in passato). Più precisamente, se esiste $K \subset A$ ed esiste $t_k \in]\alpha, \beta[$ tale che $y(t) \in K$ per ogni $t \in]\alpha, \beta[$, $t > t_k$ (rispet., $t < t_k$) allora $\beta = b$ (rispet., $\alpha = a$).

Dimostrazione Il teorema è una conseguenza diretta dell'analisi svolta alla fine del capitolo precedente; si veda il Caso del rettangolo a p. 53. Poiché l'orbita non esce definitivamente in futuro da ogni compatto allora non può essere $\beta < b$ da cui $\beta = b$. Analogamente si ragiona in passato. □

Osservazione 4.2 Le conclusioni del teorema precedente continuano a valere se, al posto di entrarci, $y(t)$ "visita frequentemente" il compatto in futuro (passato), cioè se esiste una successione $t_j \to \beta^-$ (rispet. $t_j \to \alpha^+$) tale che $y(t_j) \in K$ per ogni j.

Esempio 4.3 Le soluzioni dell'equazione

$$y' = h(t) \operatorname{sen} y,$$

dove $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è una funzione continua, sono globalmente definite (in futuro e passato). Infatti, si osservi anzitutto che ci sono esistenza e unicità delle soluzioni del problema di Cauchy perché $f(t, y) = h(t) \operatorname{sen} y$, pur non essendo necessariamente di classe C^1 (h è solamente continua), ha derivata parziale prima rispetto a y continua, dunque è localmente (anzi, globalmente) lipschitziana. Fissato il dato iniziale $y(t_0) = y_0$, se $y_0 = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, si ha $f(t, y_0) = 0$ per ogni $t \in \mathbb{R}$, dunque la funzione $y_k(t) = k\pi$ è soluzione costante (equilibrio). Per unicità è la sola soluzione tale che $y(t_0) = k\pi$. Se y_0 non è multiplo intero di π, sarà contenuto in qualche intervallo $k\pi < y_0 < (k+1)\pi$ per qualche $k \in \mathbb{Z}$. Detta $y(t)$ la relativa soluzione, poiché per unicità le traiettorie non si intersecano, non potrà mai essere $y(t) = k\pi$ e neppure $y(t) = (k+1)\pi$, dunque per continuità si avrà $k\pi < y(t) < (k+1)\pi$ per ogni t di definizione. Avendo l'orbita contenuta (in futuro e passato) nel compatto $[k\pi, (k+1)\pi]$, per il Teorema 4.1 $y(t)$ è globalmente definita.

Esempio 4.4 Si consideri il sistema planare omogeneo

$$\begin{cases} x' = x^5 \operatorname{sen}(x^2 + y^2) - y \\ y' = y^5 \operatorname{sen}(x^2 + y^2) + x. \end{cases}$$

Poiché il campo vettoriale è di classe C^∞ ci sono esistenza e unicità locale delle soluzioni dei problemi di Cauchy. Si vede che per ogni $k \in \mathbb{N}$, le funzioni $(x_k(t), y_k(t)) := \left(\sqrt{k\pi} \cos t, \sqrt{k\pi} \operatorname{sen} t\right)$ sono soluzioni definite in $\mathbb{R}$ (lo si verifichi per esercizio). Si osservi che $\|(x_k(t), y_k(t))\| = \sqrt{x_k^2(t) + y_k^2(t)} = \sqrt{k\pi}$

e che la relativa orbita è data dalla circonferenza di centro l'origine e raggio $\sqrt{k\pi}$. Presa ora $(x(t), y(t))$ soluzione del problema di Cauchy con dati iniziali $(x(t_0), y(t_0)) = (x_0, y_0)$, si ponga $\rho_0 = \sqrt{x_0^2 + y_0^2}$. Se $\rho_0 = \sqrt{k\pi}$ per qualche k, poiché per unicità le orbite non posso intersecarsi trasversalmente, l'orbita di $(x(t), y(t))$ deve coincidere con quella di $(x_k(t), y_k(t))$ e la traiettoria di $(x(t), y(t))$ è una traslata temporale di quella di $(x_k(t), y_k(t))$. Più precisamente si verifica che $(x(t), y(t)) = \big(\sqrt{k\pi}\cos(t - t_0 + c), \sqrt{k\pi}\,\mathrm{sen}(t - t_0 + c)\big)$ dove c è tale che $\sqrt{k\pi}\cos c = x_0$ e $\sqrt{k\pi}\,\mathrm{sen}\, c = y_0$. Se, invece, ρ_0 non è della forma $\sqrt{k\pi}$, sarà $\sqrt{k\pi} < \rho_0 < \sqrt{(k+1)\pi}$ per qualche $k \in \mathbb{N}$. Sempre poiché le orbite non si intersecano, per continuità si dovrà avere $\sqrt{k\pi} < \sqrt{x^2(t) + y^2(t)} < \sqrt{(k+1)\pi}$ per ogni t di definizione. Avendo l'orbita contenuta nel compatto $K = \{(x, y) : \sqrt{k\pi} \le \|(x, y)\| \le \sqrt{(k+1)\pi}\}$, per il Teorema 4.1 la soluzione è globalmente definita in futuro e passato.

Anche il secondo criterio è una conseguenza del Teorema della fuga dai compatti. Si applica solo al caso in cui $A = \mathbb{R}^n$ e può essere così riassunto:

$$\boxed{\text{limitatezza in futuro/passato} \implies \text{esistenza globale in futuro/passato}}$$

Teorema 4.5 *Sia $y :]\alpha, \beta[\to \mathbb{R}^n$ una soluzione massimale di $y' = f(t, y)$, $f : J \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ continua, $J =]a, b[$. Supponiamo che esista una funzione $g : J \to \mathbb{R}^+$ definita e continua in J tale che $\|y(t)\| \le g(t)$ definitivamente per $t \to \beta^-$ (rispet, $t \to \alpha^+$). Allora y è globalmente definita in futuro (rispet., in passato).*

Dimostrazione Se per assurdo fosse $\beta < b$ allora $\beta \in J$ e per il Teorema 3.18 si avrebbe $\|y(t)\| \to +\infty$ per $t \to \beta^-$. Passando al limite per $t \to \beta^-$ nella disuguaglianza $\|y(t)\| \le g(t)$, per la continuità di g in β si otterrebbe $+\infty \le g(\beta)$, chiaramente un assurdo. □

Come caso applicativo di questo teorema si veda per esempio il punto d) dell'Esercizio 6.15. Si osservi che l'eventuale difficoltà nell'applicazione dei precedenti criteri sta solitamente nel fatto che per dimostrare la validità delle ipotesi molto spesso bisognerebbe già conoscere le soluzioni: le condizioni dei Teoremi 4.1 e 4.5 sono espresse direttamente sulla soluzione $y(t)$. Ma una volta conosciuta la soluzione si sa già se è globalmente definita oppure no! Un modo alternativo per affrontare il problema sarebbe quello di dimostrare delle *stime a priori* ottenute senza conoscere esplicitamente la soluzione. Questi argomenti, di carattere più avanzato, non verranno trattati in queste dispense.

Criterio delle direttrici di Liapunov

Il prossimo criterio che garantisce l'esistenza globale si basa sull'utilizzo delle *funzioni ausiliarie* (dette anche *direttrici di Liapunov*). La forza di questo metodo sta nel fatto che le condizioni vengono poste sul campo vettoriale f e non direttamente sulle soluzioni. Anche questo criterio si applica solamente al caso $A = \mathbb{R}^n$.

Teorema 4.6 *Data $f : J \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ continua, $J =]a, b[$, supponiamo che esistano $g : J \to \mathbb{R}$ continua e $V : \mathbb{R}^n \setminus B[0, R] \to \mathbb{R}$ di classe C^1 tali che*

i) $\lim_{\|y\|\to+\infty} V(y) = +\infty$,

ii) per ogni $t \in J$, $\|y\| \geq R$ si ha

$$\langle \nabla V(y), f(t, y)\rangle \leq g(t).$$

(Solitamente si denota $\dot{V}(t, y) := \langle \nabla V(y), f(t, y)\rangle$ detta anche derivata di V lungo le traiettorie di $y' = f(t, y)$*.)*

Allora ogni soluzione massimale dell'equazione $y' = f(t, y)$ è globalmente definita in futuro.

Dimostrazione Per assurdo si supponga che esista una soluzione massimale $y :]\alpha, \beta[\to \mathbb{R}^n$ non globalmente definita in futuro, cioè tale che $\beta < b$. Allora $\beta \in J$ e per il Teorema 3.18 si avrebbe $\|y(t)\| \to +\infty$ per $t \to \beta^-$. In particolare esisterebbe $t_1 \in]\alpha, \beta[$ tale che $\|y(t)\| \geq R$ per ogni $t \in [t_1, \beta[$. Resterebbe quindi definita la funzione $z(t) := V(y(t)) : [t_1, \beta[\to \mathbb{R}$ di classe C^1 e tale che per i) sia $\lim_{t\to\beta^-} z(t) = +\infty$; derivandola:

$$z'(t) = DV(y(t))y'(t) = \langle \nabla V(y(t)), y'(t)\rangle = \big\langle \nabla V(y(t)), f(t, y(t))\big\rangle \leq g(t),$$

per ogni $t \in [t_1, \beta[$, e integrando tra t_1 e $t > t_1$ si avrebbe

$$z(t) - z(t_1) = \int_{t_1}^{t} z'(s)\, ds \leq \int_{t_1}^{t} g(s)\, ds =: G(t),$$

dove G è primitiva di g in J. Per la continuità di G in $\beta \in J$, passando al limite per $t \to \beta^-$ si otterrebbe infine $+\infty \leq G(\beta)$, il che è un assurdo. Dunque $\beta = b$, cioè ogni soluzione massimale è globalmente definita in futuro. □

Si tenga presente che il teorema non fornisce direttamente anche l'esistenza globale in passato.

Esercizio 4.7 Modificare le ipotesi del teorema precedente al fine di ottenere un criterio di esistenza globale in passato.

Vedremo ora alcuni corollari introduttivi ai teoremi principali di questo capitolo.

Corollario 4.8 *Data $f : J \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ continua, $J =]a, b[$, supponiamo che esistano $g : J \to \mathbb{R}$ continua e $W : \mathbb{R}^n \setminus B[0, R] \to \mathbb{R}$ di classe C^1 tali che*

i) $\lim_{\|y\| \to +\infty} W(y) = +\infty$,

ii) per ogni $t \in J$, $\|y\| \geq R$ si ha

$$\langle \nabla W(y), f(t, y) \rangle \leq g(t) W(y).$$

Allora ogni soluzione massimale dell'equazione $y' = f(t, y)$ è globalmente definita in futuro.

Dimostrazione Aumentando eventualmente R, per i) si può supporre che W sia sempre positiva; posto $V(y) = \ln W(y)$ verifichiamo che V, g verificano le ipotesi del teorema precedente. Infatti, si ha $V(y) \to +\infty$ per $\|y\| \to +\infty$, e per ii)

$$\begin{aligned} \dot{V}(t, y) &= \langle \nabla V(y), f(t, y) \rangle = \Big\langle \frac{1}{W(y)} \nabla W(y), f(t, y) \Big\rangle \\ &= \frac{1}{W(y)} \langle \nabla W(y), f(t, y) \rangle \leq g(t), \end{aligned}$$

per ogni $t \in J$, $\|y\| \geq R$. Per il Teorema 4.6 ogni soluzione massimale è globalmente definita in futuro. □

Il Teorema 4.6 o il Corollario 4.8 permettono un certo grado di libertà nella scelta delle funzioni V, W e g. Nei casi pratici spesso W è dato dalla norma o, per comodità, da $W(y) = \|y\|^2 + 1$. Essendo $\nabla W(y) = 2y$ e dunque $\dot{W}(t, y) = \langle 2y, f(t, y) \rangle$, per applicare il Corollario 4.8 è quindi sufficiente trovare una funzione continua g tale che

$$\langle f(t, y), y \rangle \leq \frac{g(t)}{2} \big(\|y\|^2 + 1 \big), \tag{4.1}$$

per ogni $t \in J$ e y di norma sufficientemente grande. Più precisamente si può dimostrare il seguente risultato.

Corollario 4.9 *Se esistono $A, B, C : J \to \mathbb{R}$ continue tali che*

$$\langle f(t,y), y\rangle \le A(t)\|y\|^2 + B(t)\|y\| + C(t),$$

per ogni $t \in J$ e ogni $y \in \mathbb{R}^n$ (in realtà basta per ogni $\|y\| \ge R$ per qualche R) allora ogni soluzione massimale dell'equazione $y' = f(t,y)$ è globalmente definita in futuro.

Dimostrazione È sufficiente dimostrare che vale (4.1) per qualche g. A tal fine basta dimostrare che esiste g continua e $R > 0$ tali che

$$A(t)\|y\|^2 + B(t)\|y\| + C(t) \le \frac{g(t)}{2}\big(\|y\|^2 + 1\big),$$

per ogni $t \in J$ e $\|y\| > R$. Questa equazione equivale a

$$\big(g(t) - 2A(t)\big)\|y\|^2 - 2B(t)\|y\| + g(t) - 2C(t) \ge 0$$

che è sempre vera per gli y di norma grande se $g(t) - 2A(t) \ge 0$ per ogni $t \in J$ e $\Delta/4 = B^2(t) - (g(t) - 2A(t))(g(t) - 2C(t)) \le 0$. Queste due disequazioni sono verificate se per esempio $g(t) \ge 2A(t) + |B(t)|$ e $g(t) \ge 2C(t) + |B(t)|$. Basta allora prendere $g(t) := 2\max\big\{A(t), C(t)\big\} + |B(t)|$. □

Cosa si può dire per quanto riguarda l'esistenza globale in passato? Basta osservare che per le equazioni differenziali ordinarie la freccia temporale è invertibile; più precisamente, data una soluzione $y :]\alpha, \beta[\to \mathbb{R}^n$ dell'equazione $y' = f(t,y)$, ponendo $z(t) := y(-t)$ si ha che

$$z'(t) = -y'(-t) = -f(-t, y(-t)) = -f(-t, z(t)).$$

Ne consegue che $y :]\alpha, \beta[\to \mathbb{R}^n$ è soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = f(t,y) \\ y(t_0) = y_0, \end{cases}$$

se e solo se $z :]-\beta, -\alpha[\to \mathbb{R}^n$ data da $z(t) = y(-t)$ è soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} z' = -f(-t,z) \\ z(-t_0) = y_0. \end{cases}$$

Si osservi che il "passato" di y corrisponde al "futuro" di z e viceversa. In particolare y è globalmente definita in passato se e solo se z è globalmente definita in futuro. Per ottenere dei criteri di esistenza globale in passato per y basta allora applicare i criteri finora esposti a z, ovvero all'equazione differenziale il cui campo vettoriale è $-f(-t,y)$.

Corollario 4.10 *Se esistono $A, B, C : J \to \mathbb{R}$ continue tali che*

$$\langle f(t,y), y\rangle \geq A(t)\|y\|^2 + B(t)\|y\| + C(t),$$

per ogni $t \in J$ e ogni $y \in \mathbb{R}^n$ (in realtà basta per ogni $\|y\| \geq R$ per qualche R) allora ogni soluzione massimale dell'equazione $y' = f(t,y)$ è globalmente definita in passato.

Dimostrazione Per ipotesi si ha

$$\langle -f(-t,y), y\rangle \leq -A(-t)\|y\|^2 - B(-t)\|y\| - C(-t),$$

e per il Corollario 4.9 le soluzioni massimali dell'equazione differenziale $z' = -f(-t,z)$ sono globalmente definite in futuro quindi, per l'osservazione sopra, quelle dell'equazione $y' = f(t,y)$ sono globalmente definite in passato. □

Corollario 4.11 *Se esistono $A, B, C : J \to \mathbb{R}$ continue e positive tali che*

$$\big|\langle f(t,y), y\rangle\big| \leq A(t)\|y\|^2 + B(t)\|y\| + C(t),$$

per ogni $t \in J$ e ogni $y \in \mathbb{R}^n$ (in realtà basta per ogni $\|y\| \geq R$ per qualche R) allora ogni soluzione massimale dell'equazione $y' = f(t,y)$ è globalmente definita in futuro e passato.

Dimostrazione Segue banalmente dai Corollari 4.9 e 4.10. □

Teoremi di esistenza globale

Come corollari dei risultati della sezione precedente si ottengono anche i classici criteri di sublinearità e globale lipschitzianità che andremo a enunciare e dimostrare. Il primo criterio si ricorda brevemente come:

$$\boxed{\text{crescita sublineare di } f \implies \text{esistenza globale}}$$

Teorema 4.12 (di esistenza globale (I)) *Data $f : J \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ continua, $J =]a,b[$, se esistono $\ell, m : J \to \mathbb{R}^+$ continue tali che*

$$\|f(t,y)\| \leq \ell(t)\|y\| + m(t)$$

per ogni $t \in J$ e ogni $y \in \mathbb{R}^n$ (in realtà è sufficiente per ogni $\|y\| \geq R$ per qualche R) allora ogni soluzione massimale dell'equazione $y' = f(t,y)$ è globalmente definita in futuro e passato.

Dimostrazione Per la disuguaglianza di Schwarz si ottiene subito

$$\big|\langle f(t,y),y\rangle\big| \le \|f(t,y)\|\,\|y\| \le \ell(t)\|y\|^2 + m(t)\|y\|,$$

e la tesi segue dal Corollario 4.10. □

In particolare il risultato si può applicare se il campo vettoriale è globalmente limitato, cioè esiste M tale che $\|f(t,y)\| \le M$ per ogni t e y. Per esempio le soluzioni dell'equazione differenziale $y' = \operatorname{sen} y^2$ sono tutte globalmente definite in $\mathbb{R}$ (compararle con quelle dell'equazione $y' = y^2$). Altro caso: l'equazione $y' = h(t)\operatorname{sen} y$ dell'Esempio 4.3 ha campo vettoriale f tale che $|f(t,y)| \le |h(t)|$ e per il Teorema 4.12 ha soluzioni globalmente definite. Si noti come si può pervenire al medesimo risultato applicando criteri diversi (tra l'altro si può applicare anche il prossimo teorema).

Infine, enunciamo e dimostriamo il criterio di lipschitzianità globale che afferma che:

$$\boxed{\text{lipschtizianità globale di } f \implies \text{esistenza e unicità globale}}$$

Teorema 4.13 (di esistenza globale (II)) *Data $f : J \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ continua, $J =]a,b[$, se esiste $L : J \to \mathbb{R}^+$ continua tale che*

$$\|f(t,y_1) - f(t,y_2)\| \le L(t)\|y_1 - y_2\|$$

per ogni $t \in J$ e ogni $y_1, y_2 \in \mathbb{R}^n$ (in particolare se f è globalmente lipschitziana di costante $L > 0$) allora c'è esistenza e unicità globale per le soluzioni massimali dei problemi di Cauchy per l'equazione $y' = f(t,y)$.

Dimostrazione L'unicità segue dal Teorema di Cauchy-Lipschitz. Si ha inoltre

$$\|f(t,y)\| \le \|f(t,y) - f(t,0)\| + \|f(t,0)\| \le L(t)\|y\| + \|f(t,0)\|,$$

e la tesi segue dal Teorema 4.12 con $\ell(t) = L(t)$ e $m(t) = \|f(t,0)\|$ funzioni continue e positive. □

In particolare, dalla dimostrazione segue che la lipschitzianità globale implica la sublinearità, dunque il primo risultato è più generale del secondo. Non è vero il viceversa, come si vede dal seguente esempio

Esempio 4.14 L'equazione $y' = y\operatorname{sen}(ty^2)$ ha il campo vettoriale $f(t,y) = y\operatorname{sen}(ty^2)$ non globalmente lipschitziano; infatti, per $t \ne 0$ si ha

$$\frac{\partial f}{\partial y}(t,y) = \operatorname{sen}(ty^2) + 2ty^2\cos(ty^2) \qquad \Longrightarrow \qquad \sup_{y\in\mathbb{R}}\left|\frac{\partial f}{\partial y}(t,y)\right| = +\infty.$$

Non si può dunque applicare il Teorema 4.13. Invece, poiché $|f(t,y)| \leq |y|$ si può applicare il Teorema 4.12 e concludere che le soluzioni (massimali) sono tutte globalmente definite in $\mathbb{R}$.

Esempio 4.15 L'equazione $y' = t\,\mathrm{sen}(ty)$ ha il campo vettoriale $f(t,y) = t\,\mathrm{sen}(ty)$ tale che $\partial_y f(t,y) = t^2\cos(ty)$. Si ha dunque $|\partial_y f(t,y)| \leq t^2$ e si può applicare il Teorema 4.13 con $L(t) = t^2$ per ottenere l'esistenza globale delle soluzioni.

I risultati appena descritti si possono applicare facilmente ai sistemi lineari a coefficienti continui.

Corollario 4.16 *Ogni sistema lineare $n \times n$ a coefficienti continui*

$$y' = A(t)y + b(t),$$

dove $A : J \to \mathcal{M}(n) \cong \mathbb{R}^{n^2}$ e $b : J \to \mathbb{R}^n$ sono continue, ammette esistenza e unicità globale delle soluzioni dei relativi problemi di Cauchy.

Dimostrazione Si può applicare il teorema precedente perché il campo vettoriale verifica la seguente disuguaglianza

$$\|f(t,y_1) - f(t,y_2)\| = \|A(t)(y_1 - y_2)\| \leq \|A(t)\|\,\|y_1 - y_2\|$$

(dove si è utilizzata la norma degli operatori, si veda (A.3) in Appendice).□

Teorema 4.17 (di esistenza globale (III)) *Sia data $f : J \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ continua, $J =]a,b[$. Se per ogni intervallo compatto $K \subseteq J$ esistono costanti $\ell_K, m_K \geq 0$ tali che*

$$\|f(t,y)\| \leq \ell_K\|y\| + m_K,$$

per ogni $t \in K$ e ogni $y \in \mathbb{R}^n$ (in realtà è sufficiente per ogni $\|y\| \geq R$ per qualche R) allora ogni soluzione massimale dell'equazione $y' = f(t,y)$ è globalmente definita in futuro e passato.

Dimostrazione Sia (K_j) una successione di intervalli compatti tali che $K_j \subset \overset{\circ}{K}_{j+1} \subset J$ e $\cup_{j\in\mathbb{N}} K_j = J$. Se $y = y(t)$ è una soluzione massimale, applicando il Teorema 4.12 alla restrizione dell'equazione all'insieme $K_j \times A$, si ottiene che $y(t)$ è globalmente definita in K_j. Per l'arbitrarietà di $j \in \mathbb{N}$ segue che y è definita su tutto J. □

Esempi ed esercizi

Esercizio 4.18 Data l'equazione

$$y' = \frac{1}{y^2 + t^2},$$

a) studiare l'esistenza e l'unicità locale. Valgono le ipotesi dei teoremi di esistenza globale?

b) verificare che se $y(t)$ è soluzione dell'equazione in $]\alpha, \beta[$ allora anche $z(t) := -y(-t)$ è soluzione in $]-\beta, -\alpha[$. Esistono soluzioni dispari?

c) dimostrare che le soluzioni massimali dei problemi di Cauchy con $y(t_0) = y_0$ e $t_0 > 0$ sono definite in $]0, +\infty[$ e dedurre da ciò che le soluzioni massimali dei problemi di Cauchy con $y(t_0) = y_0$ e $t_0 < 0$ sono definite in $]-\infty, 0[$;

d) dimostrare che le soluzioni massimali dei problemi di Cauchy con $y(0) = y_0$ e $y_0 \neq 0$ sono globalmente definite in $\mathbb{R}$.

Soluzione. a) il campo vettoriale $f(t, y) = \frac{1}{y^2+t^2}$ è definito e di classe C^∞ in $\Omega := \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$, dunque c'è esistenza e unicità locale di tutte le soluzioni con dati iniziali in Ω. Poiché il dominio non è una striscia della forma $J \times \mathbb{R}$, non è possibile applicare i teoremi di esistenza globale. Si noti comunque che, essendo $\lim_{(t,y)\to(0,0)} f(t, y) = +\infty$, f non può essere sublineare e nemmeno globalmente lipschitziana su tutto il dominio, pervenendo quindi alla medesima conclusione.

b) Supposto che $y(t)$ sia soluzione, si ha

$$z'(t) = y'(-t) = \frac{1}{y^2(-t) + (-t)^2} = \frac{1}{z^2(t) + t^2} = f(t, z(t)),$$

quindi $z(t)$ è soluzione dell'equazione differenziale. Non possono esistere soluzioni dispari. Infatti, per definizione il dominio di una soluzione è un intervallo; affinché $y(t)$ sia dispari, deve necessariamente essere $y(0) = 0$, assurdo perché il punto $(0, 0)$ non appartiene al dominio Ω.

c) Sia $y(t)$ soluzione massimale con $y(t_0) = y_0$, $t_0 > 0$. Si ha banalmente

$$|f(t, y)| \leq \frac{1}{t^2},$$

per ogni $(t, y) \in]0, +\infty[\times\mathbb{R}$. Applicando il Teorema 4.12 alla restrizione di f all'aperto $J \times \mathbb{R} =]0, +\infty[\times\mathbb{R}$, con $\ell(t) = 0$, $m(t) = 1/t^2$, si ottiene che

tutte le soluzioni massimali con $t_0 > 0$ sono definite (almeno) in $]0, +\infty[$. Alternativamente si può utilizzare anche il Teorema 4.17; anzitutto si osserva non si può applicarlo su tutto $]0, +\infty[\times\mathbb{R}$ perché f è ivi non limitata. Fissato K intervallo compatto contenente t_0 e tale che $K \subset]0, +\infty[$. Sia $t_K = \min K > 0$. Per ogni $(t, y) \in K \times \mathbb{R}$ si ha $|f(t, y)| \leq 1/t_K^2$. Si può quindi applicare il Teorema 4.17 con $J =]0, +\infty[$, $\ell_K = 0$, $m_K = 1/t_K^2$ per cui $y(t)$ è globalmente definita in $J =]0, +\infty[$. Se ora $y(t)$ è soluzione massimale con $y(t_0) = y_0$, $t_0 < 0$, per il punto b) la funzione $z(t) = -y(-t)$ è ancora soluzione tale che $z(-t_0) = -y_0$. Per quanto appena visto $z(t)$ è definita (almeno) in $]0, +\infty[$ dunque $y(t)$ è definita (almeno) in $] - \infty, 0[$.

d) Sia $\bar{y}(t)$ soluzione massimale con $\bar{y}(0) = y_0$, $y_0 \neq 0$. Per il Teorema di Cauchy-Lipschitz $y(t)$ è definita almeno in un intervallo del tipo $[-\delta, \delta]$. Ma $\bar{y}(t)$ è anche soluzione dei problemi di Cauchy con dati $y(\delta) = \bar{y}(\delta)$ e dati $y(-\delta) = \bar{y}(-\delta)$. Per il punto precedente, le soluzioni dei due problemi di Cauchy sono definite, rispettivamente, in $]0, +\infty[$ e $] - \infty, 0[$ e in definitiva $\bar{y}$ è definita in $\mathbb{R}$. L'analisi dell'equazione verrà ripresa nell'Esempio 6.13.

Esercizio 4.19 Data l'equazione differenziale

$$y' = \frac{(y + 2t - 1)^2 - 3}{y + 2t + 1}$$

nell'aperto $\Omega := \left\{(t, y) \in \mathbb{R}^2 : \, y + 2t + 1 > 0\right\}$

a) verificare che si hanno esistenza e unicità locale per le soluzioni dei problemi di Cauchy associati, ma che non valgono le ipotesi dei teoremi di esistenza globale;

b) trovare $c \in \mathbb{R}$ affinché la funzione $\bar{y}(t) = ct$ sia soluzione;

c) estendendo opportunamente il criterio di sublinearità o di globale lipschitzianità dimostrare che le soluzioni dei problemi di Cauchy con dati iniziali $y(t_0) = y_0 > \bar{y}(t_0)$ sono globalmente definite.

Soluzione. a) Il campo vettoriale $f(t, y) = \frac{(y+2t-1)^2-3}{y+2t+1}$ è definito e di classe C^∞ in Ω, dunque localmente lipschitziano, perciò per il Teorema di Cauchy-Lipschitz si hanno esistenza e unicità locale per i problemi di Cauchy associati. Non è possibile applicare i teoremi di esistenza globale perché Ω non è (e non è estendibile a un dominio) della forma $J \times \mathbb{R}$. Si noti che in ogni caso si ha

$$\lim_{(t,y)\to(t_0,-2t_0-1)} f(t, y) = +\infty,$$

perciò f non può essere sublineare né globalmente lipschitziano nel dominio.

b) Essendo $\bar{y}'(t) = c$, la funzione $\bar{y}$ è soluzione se e solo se per ogni t vale

$$c = \frac{(ct + 2t - 1)^2 - 3}{ct + 2t + 1} \qquad \Longleftrightarrow \qquad (c+2)\big((c+2)t^2 - (c+2)t - 1\big) = 0,$$

il che è vero se e solo s $c = -2$ dunque $\bar{y}(t) = -2t$.

c) I criteri di sublinearità/globale lipschitzianità per l'esistenza globale sono stati dimostrati solamente per equazioni del tipo $y' = f(t, y)$ con campo vettoriale $f : J \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ definito su insiemi della forma $J \times \mathbb{R}^n$ con J intervallo, caso nel quale non ricade l'equazione in considerazione. Ripercorrendo le varie dimostrazioni dei teoremi e corollari che portano al criterio di sublinearità, si nota che la proprietà fondamentale che l'equazione deve possedere è l'esplosione in norma delle soluzioni non globalmente definite; più precisamente si basa sul fatto che se una soluzione massimale $y :]\alpha, \beta[\to \mathbb{R}^n$ non è globalmente definita in futuro allora $|y(t)| \to +\infty$ per $t \to \beta^-$ (analogamente in passato, per $t \to \alpha^+$). Perciò in tali teoremi è possibile sostituire l'ipotesi sulla forma del dominio di definizione con l'ipotesi di esplosione in norma per le soluzioni non globalmente definite. Tale proprietà è in effetti verificata per le soluzioni massimali dei problemi di Cauchy dell'equazione in oggetto, con dati iniziali in $\Omega_0 := \big\{(t, y) \in \mathbb{R}^2 : \, y > \bar{y}(t)\big\} = \big\{(t, y) \in \mathbb{R}^2 : \, y + 2t > 0\big\}$. Essenzialmente ciò accade grazie all'unicità delle soluzioni e al fatto che la funzione $\bar{y}$ è una soluzione; di conseguenza le soluzioni massimali con dati in Ω_0 non possono uscire dal bordo di Ω_0 individuato proprio da $y = \bar{y}(t)$, cioè $y + 2t = 0$, e dunque, se non globalmente definite, devono esplodere in norma. Per verificarlo, supponiamo che $y = y(t)$ sia una soluzione massimale con dati iniziali $y(t_0) = y_0$, $(t_0, y_0) \in \Omega_0$, non globalmente definita in futuro. Sia dunque $]\alpha, \beta[$ con $\beta < +\infty$ l'intervallo massimale d'esistenza. Utilizziamo il Teorema della fuga dai compatti scegliendo il compatto $K_M := \big\{(t, y) : \, t_0 \le t \le \beta, \; -2t \le y \le M\big\}$ al variare di $M \ge y_0$. Per $t \to \beta^-$ la soluzione deve uscire definitivamente da K_M, ma non può farlo dal lato $t = \beta$ perché non è definita in β e non può nemmeno farlo dal basso perché altrimenti intersecherebbe l'orbita di $\bar{y}$. Di conseguenza non può che esistere t_M tale che $y(t) > M$ per ogni $t_M < t < \beta$. Dall'arbitrarietà di M si ha dunque $\lim_{t \to \beta^-} y(t) = +\infty$. Analogamente si dimostra che se $\alpha > -\infty$ allora $\lim_{t \to \alpha^+} y(t) = +\infty$. A questo punto, una volta provato che f è sublineare in Ω_0 (si veda sotto), si possono applicare le estensioni (sopra suggerite) del teoremi di esistenza globale, da cui discenderà che tutte le soluzioni massimali dell'equazione con dati in Ω_0 sono globalmente definite.

Alternativamente, per dimostrare che le soluzioni massimali con dati iniziali in Ω_0 sono globalmente definite, si poteva utilizzare il seguente truc-

co, che consiste nell'estendere opportunamente il campo vettoriale a uno sublineare e definito in $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$. Definiamo $\tilde{f}:\mathbb{R}\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ nel seguente modo

$$\tilde{f}(t,y) := \begin{cases} f(t,y) & \text{se } y+2t\geq 0 \\ -2 & \text{se } y+2t<0. \end{cases}$$

Osservando che $f(t,-2t)=-2$ per ogni t, segue che $\tilde{f}$ è continua su tutto $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$. È inoltre sublineare; infatti se $y+2t\leq 0$ si ha banalmente $|\tilde{f}(t,y)|=2$, mentre se $y+2t>0$ (cioè $(t,y)\in\Omega_0$) si ha

$$\begin{aligned} |\tilde{f}(t,y)| = |f(t,y)| &\leq \frac{(y+2t-1)^2+3}{y+2t+1} = y+2t-3+\frac{7}{y+2t+1} \\ &\leq |y|+|2t|+4, \end{aligned}$$

dunque in definitiva $|\tilde{f}(t,y)|\leq |y|+|2t|+4$ per ogni $(t,y)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}$. È anche globalmente lipschitziana: lo è in $y+2t<0$ essendo costante. Sia ora $y+2t\geq 0$. Osserviamo che $\tilde{f}(t,y)=f(t,y)=g(y+2t)$ dove $g:[0,+\infty[\to\mathbb{R}$ è definita da $g(z)=\frac{(z-1)^2-3}{z+1}=z-3+\frac{1}{z+1}$. Essendo $g'(z)=1-\frac{1}{(z+1)^2}$ si ha

$$\left|\partial_y\tilde{f}(t,y)\right| = \left|g'(y+2t)\right| = \left|1-\frac{1}{(y+2t+1)^2}\right| \leq 1 \text{ per } y+2t\geq 0,$$

da cui segue che

$$\left|\tilde{f}(t,y_2)-\tilde{f}(t,y_1)\right| \leq |y_2-y_1|$$

per ogni $(t,y_1),(t,y_2)$ con $y_1,y_2\geq -2t$. Di conseguenza $\tilde{f}$ è globalmente lipschitziana rispetto alla variabile y nella chiusura di Ω_0. Da ciò discende anche la globale lipschitzianità, sempre rispetto alla variabile y, su tutto $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$. Infatti se $y_1<-2t<y_2$, essendo $\tilde{f}(t,y_1)=\tilde{f}(t,-2t)=-2$ si ha

$$\left|\tilde{f}(t,y_2)-\tilde{f}(t,y_1)\right| = \left|\tilde{f}(t,y_2)-\tilde{f}(t,-2t)\right| \leq |y_2-(-2t)| \leq |y_2-y_1|,$$

da cui la globale lipschitzianità rispetto alla seconda variabile in $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$. Essendo $\tilde{f}$ definita in $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ si possono applicare i criteri di sublinearità oppure di globale lipschitzianità per cui le soluzioni massimali dell'equazione differenziale $y'=\tilde{f}(t,y)$ sono globalmente definite in $\mathbb{R}$. Si osservi che la funzione $y=\bar{y}(t)$ è soluzione anche di questa equazione. Se ora $(t_0,y_0)\in\Omega_0$, detta $\tilde{y}(t)$ la soluzione del problema di Cauchy relativo a $y'=\tilde{f}(t,y)$ con dati iniziali $y(t_0)=y_0$, per l'unicità delle soluzioni dovrà essere $\tilde{y}(t)\geq\bar{y}(t)$ per ogni t, cioè $(t,\tilde{y}(t))\in\Omega_0$ per ogni t. Su questo insieme si ha $\tilde{f}=f$ dunque $\tilde{y}$ è anche (la) soluzione di $y'=f(t,y)$ con $y(t_0)=y_0$ e risulta pertanto globalmente definita. L'analisi dell'equazione proseguirà nell'Esercizio 8.4.

Esercizio 4.20 Data l'equazione differenziale $y' = \sqrt{|y+t|}$

a) studiare l'esistenza locale e globale delle soluzioni;

b) studiare l'unicità locale; in particolare determinare tutti e soli i dati iniziali (t_0, y_0) per i quali è possibile applicare il Teorema di Cauchy-Lipschitz;

c) dimostrare che il problema di Cauchy con dati iniziali $y(0) = 0$ ammette un'unica soluzione $y(t)$ globalmente definita; trovare una formula chiusa per tale soluzione.

Soluzione. a) Il campo vettoriale $f(t, y) = \sqrt{|y+t|}$ è definito e continuo in tutto $\mathbb{R}^2$ ma è di classe C^∞ solamente in $\mathbb{R}^2 \setminus \{y+t=0\}$. Per il Teorema di Peano ogni problema di Cauchy ammette almeno una soluzione locale. Il campo vettoriale non è globalmente lipschitziano (nemmeno lipschitziano, si veda il punto b)) ma è sublineare, dunque per il Teorema 4.12 ogni soluzione è globalmente definita in $\mathbb{R}$. Infatti, se $|y| \leq 1$ si ha

$$|f(t, y)| \leq \sqrt{|y| + |t|} \leq \sqrt{1 + |t|},$$

mentre, osservando che $\sqrt{a+b} \leq \sqrt{a} + \sqrt{b}$ per ogni $a, b \geq 0$, se $|y| \geq 1$ per cui $\sqrt{|y|} \leq |y|$, si ha

$$|f(t, y)| \leq \sqrt{|y| + |t|} \leq \sqrt{|y|} + \sqrt{|t|} \leq |y| + \sqrt{1 + |t|},$$

e in definitiva, per ogni $y, t \in \mathbb{R}$ vale $|f(t, y)| \leq |y| + \sqrt{1 + |t|}$, cioè f è sublineare rispetto a y (in realtà anche rispetto a t).

b) Si può sicuramente applicare il Teorema di Cauchy-Lipschitz a tutti i problemi di Cauchy con dati (t_0, y_0) tali che $y_0 + t_0 \neq 0$, in un intorno dei quali f è lipschitziana. Se $y_0 + t_0 = 0$ il campo vettoriale non è lipschitziano, dunque il teorema non può essere applicato. Infatti, se $y_0 + t_0 = 0$ si ha

$$\lim_{y \to y_0} \left| \frac{\partial f}{\partial y}(t_0, y) \right| = \lim_{y \to -t_0} \left| \frac{\operatorname{sgn}(y + t_0)}{2\sqrt{|y + t_0|}} \right| = +\infty,$$

dunque la funzione f non può essere lipschitziana in un intorno di (t_0, y_0).

c) Operando la sostituzione $z(t) = y(t) + t$ si ottiene l'equazione equivalente per $z(t)$ della forma $z'(t) = y'(t) + 1 = \sqrt{|y(t) + t|} + 1 = \sqrt{|z|} + 1$ cioè $z' = \sqrt{|z|} + 1$ (si veda anche il metodo di risoluzione delle equazioni della forma (8.10) nel Capitolo 8). Tale equazione ha campo vettoriale $g(z) = \sqrt{|z|} + 1$ autonomo e non localmente lipschitziano. Tuttavia $g(z) > 0$, nota condizione che garantisce che tale equazione, dunque anche quella in

oggetto essendo a questa equivalente, ha unicità delle soluzioni per *tutti* i problemi di Cauchy, in particolare per quello con dati iniziali $z(0) = 0$ (corrispondente alla soluzione $y(t)$ con dati $y(0) = 0$). Inoltre è globalmente definita per il punto a). La formula richiesta si ottiene per separazione delle variabili. Poiché tutte le soluzioni di entrambe le equazioni sono crescenti, essendo $z(0) = 0$ si avrà $z(t) > 0$ per $t > 0$ (e $z(t) < 0$ per $t < 0$); per tali t e utilizzando la sostituzione $w = x^2$ (con $x \geq 0$) per cui $dw = 2x\,dx$, si avrà

$$\int_{z(0)}^{z(t)} \frac{1}{\sqrt{w}+1}\,dw = \int_0^t ds \qquad \Longleftrightarrow \qquad \int_0^{\sqrt{z(t)}} \frac{2x}{x+1}\,dx = t.$$

Essendo

$$\int^v \frac{2x}{x+1}\,dx = 2v - 2\ln(1+v),$$

si ottiene infine

$$2\sqrt{z(t)} - 2\ln\left(1+\sqrt{z(t)}\right) = t.$$

Se $t < 0$, dunque $z(t) < 0$, ponendo $-w = x^2$ si ottiene analogamente

$$2\sqrt{-z(t)} - 2\ln\left(1+\sqrt{-z(t)}\right) = -t.$$

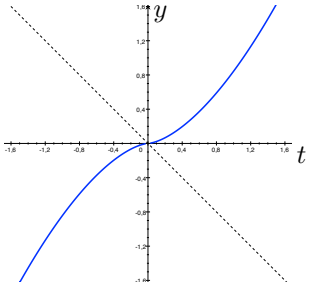


Figura 4.1: Soluzione del problema di Cauchy con $y(0) = 0$

In definitiva, tornando a $y(t)$ si ottiene

$$\left\| \begin{array}{ll} 2\sqrt{y(t)+t} - 2\ln\left(1+\sqrt{y(t)+t}\right) - t = 0 & \text{se } t, y(t) \geq 0 \\ 2\sqrt{-y(t)-t} - 2\ln\left(1+\sqrt{-y(t)-t}\right) + t = 0 & \text{se } t, y(t) < 0, \end{array} \right. \tag{4.2}$$

che fornisce una formula chiusa (implicita) della soluzione cercata, rappresentata in blu in Figura 4.1 L'analisi della soluzione $y(t)$ proseguirà negli Esercizi 6.17 e 12.1.

Esercizio 4.21 Sia $f : J \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ globalmente L-lipschitziana rispetto alle variabili y, con $J = [a, b]$ intervallo compatto. Utilizzare la norma pesata di Bielecki per dimostrare che tutte le soluzioni dell'equazione $y' = f(t, y)$ sono globalmente definite in J. Si può applicare/adattare questa idea se $J =]a, b[$ è limitato ma non è chiuso? E se non è nemmeno limitato?

Esercizio 4.22 Siano $f : J \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ e $L : J \to \mathbb{R}^+$ continue, tali che

$$\|f(t, y_1) - f(t, y_2)\| \leq L(t)\|y_1 - y_2\|,$$

per ogni $t \in J$, $y_1, y_2 \in \mathbb{R}^n$, con $J = [a, b]$ intervallo compatto. Ispirati dall'idea di Bielecki, trovare un'opportuna norma *equivalente* alle norma infinito nella quale l'operatore integrale di Volterra sia una contrazione, e utilizzarla per dimostrare l'esistenza globale delle soluzioni di $y' = f(t, y)$. Fare l'analogo nel caso $J = [a, +\infty[$ (oppure $J =]a, +\infty[$) supponendo che l'integrale improprio $\int_a^{+\infty} L(s)\, ds$ converga (se $J =]a, +\infty[$ è improprio anche in a). Adattare infine questa idea anche al caso in cui tale integrale non converge.

Capitolo 5

Dipendenza dai dati iniziali

Dopo aver studiato il problema dell'esistenza e unicità delle soluzioni dei problemi di Cauchy, il passo successivo è vedere come le traiettorie di queste ultime dipendono dai dati iniziali. Denotando con $y_0(t)$ la soluzione dell'equazione differenziale $y' = f(t, y)$ con dati iniziali $y(t_0) = y_0$, se interpretiamo la traiettoria come l'evoluzione nel tempo del nostro sistema fisico, ci aspettiamo che variando di poco la "posizione iniziale" y_0 (o il tempo iniziale t_0) la traiettoria della corrispondente soluzione sia vicina a quella di $y_0(t)$. Più precisamente, se $y_1(t)$ denota la soluzione della medesi-

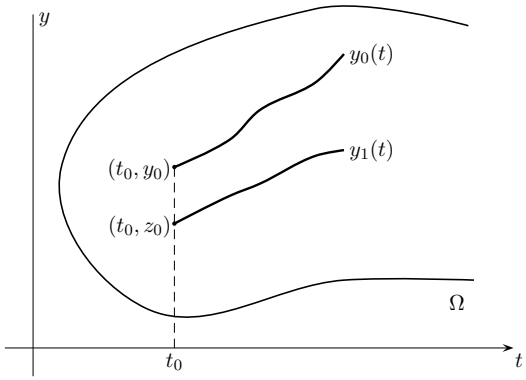


Figura 5.1: Confronto tra soluzioni

ma equazione differenziale e tale che $y_1(t_0) = y_1$ ci aspettiamo che quando y_1 è vicino a y_0 le traiettorie di $y_0(t)$ e $y_1(t)$ siano vicine, e se y_1 tende a y_0 ci aspettiamo che le due traiettorie tendano a sovrapporsi, ovvero ci sia una qualche continuità delle soluzioni dai dati iniziali (a volte chiamata anche "stability"). In questo capitolo studieremo come le soluzioni dipendono da

t_0 e y_0, e vedremo che, sotto le usuali ipotesi per f, la mappa che associa al dato y_0 la soluzione che assume tale dato al tempo t_0 è continua e differenziabile. Analizzeremo infine anche la dipendenza delle soluzioni dal tempo iniziale t_0 e dal campo vettoriale f.

Dipendenza continua dai dati iniziali

In questa sezione dimostreremo la continuità delle soluzioni di un'equazione differenziale rispetto a variazioni del dato iniziale y_0. Chiaramente, se le soluzioni dei problemi di Cauchy non sono uniche a maggior ragione perde anche senso parlare di dipendenza continua dai dati iniziali. Di conseguenza, se non diversamente specificato, d'ora in avanti assumeremo l'unicità delle soluzioni dei problemi di Cauchy relativi all'equazione differenziale in considerazione. Sappiamo che ciò garantisce l'esistenza di un'unica soluzione massimale per ciascuno di tali problemi. Per evidenziare la dipendenza della soluzione dai dati iniziali, nel seguito denoteremo con $y(t; t_0, y_0)$ la soluzione (massimale) del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = f(t, y) \\ y(t_0) = y_0. \end{cases} \tag{5.1}$$

Nel caso in cui si fissi il tempo iniziale t_0, per concentrarci sulla sola dipendenza della soluzione dal valore iniziale y_0 useremo anche la notazione ridotta $y(t; y_0)$. Vediamo ora che se valgono le ipotesi del Teorema di Cauchy-Lipschitz, la dipendenza della soluzione da y_0 (e da t_0) non solo è continua ma addirittura lipschitziana.

Teorema 5.1 (di dipendenza continua dai dati (I)) *Sia $f : \Omega \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ continua e localmente lipschitziana (rispetto alle variabili y). Allora*

i) per ogni $(t_0, y_0), (t_0, z_0) \in \Omega$ esistono $\delta > 0$, $C > 0$ tali che

$$\big\|y(\,\cdot\,; y_0) - y(\,\cdot\,; z_0)\big\|_\infty \leq C\|y_0 - z_0\|, \tag{5.2}$$

dove si è posto $\big\|y(\,\cdot\,; y_0) - y(\,\cdot\,; z_0)\big\|_\infty = \sup_{t \in I_\delta(t_0)} \|y(t; y_0) - y(t; z_0)\|$;

ii) più in generale, fissato un compatto $K \subset \Omega$ esistono $\delta, C > 0$ (dipendenti solo da K e f) tali che per ogni $(t_0, y_0), (t_0, z_0) \in K$ vale (5.2). In altri termini, l'applicazione $y_0 \mapsto y(\,\cdot\,; y_0)$ è localmente lipschitziana come funzione da $\mathbb{R}^n$ in $\big(C(I_\delta, \mathbb{R}^n), \|\cdot\|_\infty\big)$.

Dimostrazione i) Presi $(t_0, y_0), (t_0, z_0) \in \Omega$ denotiamo con I' e I'' gli intervalli di definizione, rispettivamente, di $y(t; y_0)$ e $y(t; z_0)$. Sia K un compatto che contiene le due traiettorie ristrette all'intervallo $I' \cap I''$ (per esempio, se $I' \cap I''$ è chiuso, l'unione delle traiettorie medesime) e sia L la costante di Lipschitz di f in K. Si prenda infine δ tale che $\delta L < 1$. Come nella dimostrazione del Teorema di Cauchy, per $t \in I_\delta(t_0) \cap I' \cap I''$ si ottiene (5.3)

$$\begin{aligned}
\big\|y(t; y_0) - y(t; z_0)\big\| &= \left\| y_0 - z_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, y(s; y_0)) - f(s, y(s; z_0))\, ds \right\| \\
&\le \|y_0 - z_0\| + \left| \int_{t_0}^{t} \big\| f(s, y(s; y_0)) - f(s, y(s; z_0)) \big\|\, ds \right| \\
&\le \|y_0 - z_0\| + L \left| \int_{t_0}^{t} \big\| y(s; y_0) - y(s; z_0) \big\|\, ds \right| \\
&\le \|y_0 - z_0\| + \delta L \big\| y(\,\cdot\,; y_0) - y(\,\cdot\,; z_0) \big\|_\infty .
\end{aligned}$$

Passando all'estremo superiore sui $t \in I_\delta$ e riordinando i termini si ottiene

$$\big\| y(\,\cdot\,; y_0) - y(\,\cdot\,; z_0) \big\|_\infty \le \frac{1}{1 - \delta L} \|y_0 - z_0\|,$$

da cui la tesi con $C = (1 - \delta L)^{-1}$.

ii) Nel punto precedente si è visto come le costanti δ, C dipendono da y_0 e z_0. Verifichiamo che è possibile prenderle uniformi in un compatto contenente (t_0, y_0) e (t_0, z_0) (ciò è necessario per potere far tendere in seguito z_0 a y_0 e ottenere la lipschitzianità). Fissato un compatto K in Ω, sia $C_{\alpha,R}(K) \subset \Omega$ definito come in (2.11) nella dimostrazione del Teorema 2.22 di Peano sui compatti. Per quest'ultimo teorema e per il Lemma 3.26, ogni soluzione massimale con dati iniziali (t_0, y_0) in K è definita almeno in $I_\varepsilon(t_0)$ con $\varepsilon = \min\{\alpha, R/M_K\}$, essendo M_K il massimo della norma di f in $C_{\alpha,R}(K)$; inoltre, per il Lemma 2.8 la traiettoria di $y(t; y_0)$, $t \in I_\varepsilon(t_0)$, è contenuta in $C_{\varepsilon,R}(t_0, y_0) \subset C_{\alpha,R}(K)$ che è dunque un compatto contenente tutte le traiettorie al variare di $(t_0, y_0) \in K$. Sia infine L la costante di Lipschitz di f in $C_{\alpha,R}(K)$ e come prima si prenda δ tale che $\delta \le \varepsilon$ e $\delta L < 1$. Con queste scelte di L, δ le stime (5.3) continuano a valere per ogni $t \in I_\delta(t_0)$, uniformemente per ogni $(t_0, y_0), (t_0, z_0) \in K$, da cui la tesi. □

Del teorema precedente segue che la traiettoria di $y(t; z_0)$ converge uniformemente a quella di $y(t; y_0)$ quando z_0 tende a y_0.

Esercizio 5.2 Generalizzare il teorema precedente al caso in cui anche t_0 può variare; più precisamente, definiti $C_{\alpha,R}(K)$ e M_K come nella dimostra-

zione del Teorema 2.22, si verifichi che esistono $\delta, C > 0$ tali che

$$\big\|y(\,\cdot\,;t_0,y_0) - y(\,\cdot\,;t_1,y_1)\big\|_\infty \le C\big[M_K|t_0-t_1| + \|y_0-y_1\|\big]. \tag{5.4}$$

Esercizio 5.3 Utilizzando la norma di Bielecki (2.13) al posto della norma infinito, verificare che la mappa $y_0 \mapsto y(\,\cdot\,;y_0)$ è 2-lipschitziana da $\mathbb{R}^n$ in $\big(C(I_\varepsilon,\mathbb{R}^n), \|\cdot\|_*\big)$ (si noti anche la presenza di I_ε al posto di I_δ).

Le disuguaglianze (5.2) e (5.4) forniscono una prima stima sulla norma infinito della distanza tra due soluzioni; quest'ultima implica banalmente la disuguaglianza puntuale

$$\big\|y(t;y_0) - y(t;z_0)\big\| \le C\|y_0 - z_0\|,$$

per ogni $t \in I_\delta(t_0)$. Si osservi che quest'ultima non è ottimale in quanto per $t = t_0$ si ottiene $\|y_0 - z_0\| < C\|y_0 - z_0\|$, con $C = (1-\delta L)^{-1} > 1$. Volendo ottenere una stima puntuale più precisa si può utilizzare il Lemma di Gronwall, un classico strumento nell'ambito delle equazioni differenziali, utilissimo per esempio per dimostrare l'unicità delle soluzioni oppure ottenere stime sulle medesime. Fornisce inoltre un primo approccio alle cosiddette disequazioni integrali e, per certi aspetti, è l'equivalente del Teorema del confronto 6.1 che verrà studiato nel Capitolo 6 (quest'ultimo può anche essere utilizzato proprio per dimostrare il lemma stesso).

Lemma 5.4 (di Gronwall) *Sia $v : I \to \mathbb{R}$ continua e non negativa tale che esistano $\alpha, \beta \ge 0$, $t_0 \in I$ per cui*

$$v(t) \le \alpha + \beta \left| \int_{t_0}^t v(s)\,ds \right|. \tag{5.5}$$

Allora

$$v(t) \le \alpha \mathrm{e}^{\beta|t-t_0|}. \tag{5.6}$$

Osservazione 5.5 La differenza fondamentale tra (5.5) e (5.6) sta nel fatto che nella prima la funzione $v(t)$ compare sia a destra che a sinistra della disuguaglianza, nella seconda compare solo a sinistra e quindi (5.6), contrariamente a (5.5) fornisce un'effettiva stima dall'alto di $v(t)$.

Dimostrazione (del Lemma di Gronwall) Verifichiamo la tesi nel caso $t > t_0$, cioè in futuro, nel qual caso si può togliere il valore assoluto sia in (5.5) che in (5.6). Introdotta la funzione

$$u(t) := \alpha + \beta \int_{t_0}^t v(s)\,ds,$$

per ipotesi si ha $v(t) \leq u(t)$ per ogni $t > t_0$. Inoltre

$$\frac{d}{dt}\big(u(t)\mathrm{e}^{-\beta(t-t_0)}\big) = \beta\mathrm{e}^{-\beta(t-t_0)}\Big(v(t) - \Big(\alpha + \beta\int_{t_0}^{t} v(s)\,ds\Big)\Big) \leq 0,$$

ovvero la funzione $w(t) = u(t)\mathrm{e}^{-\beta(t-t_0)}$ è decrescente per $t \geq t_0$, dunque $w(t) \leq w(t_0) = \alpha$ da cui

$$v(t)\mathrm{e}^{-\beta(t-t_0)} \leq u(t)\mathrm{e}^{-\beta(t-t_0)} \leq \alpha,$$

cioè la tesi per $t \geq t_0$.

Alternativamente si può utilizzare il Teorema del confronto 6.4. Anche qui verifichiamo la tesi nel caso $t > t_0$, cioè in futuro. Introdotta la funzione $u(t)$ come sopra, per ipotesi si ha $v(t) \leq u(t)$ per ogni $t > t_0$. È dunque sufficiente dimostrare che la tesi vale per u cioè che $u(t) \leq \alpha\mathrm{e}^{\beta(t-t_0)}$ per $t > t_0$. Per ipotesi u è derivabile e si ha $u'(t) = \beta v(t) \leq \beta u(t)$, per ogni $t > t_0$. In particolare $u(t)$ è sottosoluzione in futuro per la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} z' = \beta z \\ z(t_0) = u(t_0) = \alpha. \end{cases}$$

Essendo tale soluzione data da $z(t) = \alpha\mathrm{e}^{\beta(t-t_0)}$, per il Teorema del confronto 6.4 si ottiene $u(t) \leq z(t)$ per $t > t_0$, da cui la tesi. Per esercizio, si verifichi (utilizzando il Teorema del confronto o facendo un calcolo diretto) che la tesi vale anche in passato, cioè per $t < t_0$. □

Grazie al Lemma di Gronwall è possibile ottenere subito una generalizzazione del Teorema 5.1.

Teorema 5.6 (di dipendenza continua dai dati (II)) *Sia $f : \Omega \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ continua e localmente lipschitziana (rispetto alle variabili y). Dati $(t_0, y_0), (t_0, z_0) \in \Omega$ allora*

$$\big\|y(t; y_0) - y(t; z_0)\big\| \leq \mathrm{e}^{L|t-t_0|}\|y_0 - z_0\|, \tag{5.7}$$

per ogni t in un comune intervallo di definizione $I_\delta(t_0)$, dove L è la costante di Lipschitz di f in un compatto che contiene entrambe le traiettorie. Inoltre è possibile prendere L, δ uniformi per $(t_0, y_0), (t_0, z_0)$ che variano in un compatto di Ω.

Dimostrazione Fissato un compatto K che contiene entrambe le traiettorie, detta L la costante di Lipschitz di f in K e operando come in (5.3),

per ogni $t \in I_\delta$ si ottiene

$$\big\|y(t;y_0) - y(t;z_0)\big\| \le \|y_0 - z_0\| + L\left|\int_{t_0}^{t} \big\|y(s;y_0) - y(s;z_0)\big\|\, ds\right|.$$

Applicando il Lemma di Gronwall alla funzione $v(t) = \big\|y(t;y_0) - y(t;z_0)\big\|$ con $\alpha = \|y_0 - z_0\|$ e $\beta = L$ si ottiene la tesi. La generalizzazione per dati che variano in un compatto di Ω si ottiene analogamente alla dimostrazione del punto ii) del Teorema 5.1. □

Uno dei punti deboli dei Teoremi 5.1 e 5.6 è che permettono di confrontare le soluzioni solamente su un piccolo intorno di t_0, mentre le soluzioni in origine potrebbero essere definite su intervalli possibilmente molto grandi. Si paragonino questi risultati con quelli che saranno ottenuti nei Teoremi 5.12 e 5.13 dove il confronto viene fatto rispetto a una soluzione su un dominio compatto fissato a priori (si veda anche il Teorema 10.3).

Esercizio 5.7 Generalizzare il teorema precedente al caso in cui anche t_0 può variare; più precisamente, definiti $C_{\alpha,R}(K)$ e $M = M_K$ come nella dimostrazione del Teorema 2.22, si verifichi che esistono $\delta, L > 0$ tali che

$$\big\|y(t;t_0,y_0) - y(t;t_1,y_1)\big\| \le \mathrm{e}^{L|t-t_0|}\big[M|t_0 - t_1| + \|y_0 - y_1\|\big]. \tag{5.8}$$

Esercizio 5.8 Utilizzando il Lemma di Gronwall, dimostrare il teorema di unicità delle soluzioni per i problemi di Cauchy associati a $y' = f(t,y)$ nel caso in cui f sia localmente lipschitziana rispetto alle variabili y.

Esercizio 5.9 Sia $f :]a,b[\times\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ globalmente lipschitziana rispetto alle variabili y. Utilizzare il Lemma di Gronwall per dimostrare che tutte le soluzioni dell'equazione $y' = f(t,y)$ sono globalmente definite in $]a,b[$.

Differenziabilità rispetto ai dati iniziali

Analogamente alla continuità, si può anche studiare la differenziabilità della mappa $y_0 \mapsto y(\,\cdot\,;y_0)$. Supponendo di aver già dimostrato la differenziabilità di tale mappa, derivando parzialmente l'equazione $y' = f(t,y)$ rispetto alle variabili y_0, dovrà allora essere

$$D_{y_0}\Big(\frac{d}{dt}y(t;y_0)\Big) = D_{y_0}\big(f(t,y(t;y_0))\big) = D_y f(t,y(t;y_0))D_{y_0}y(t;y_0).$$

Potendo scambiare l'ordine di derivazione si otterrà

$$\frac{d}{dt}\big(D_{y_0}y(t;y_0)\big) = D_y f(t,y(t;y_0))D_{y_0}y(t;y_0),$$

ovvero l'applicazione $D_{y_0} y(\,\cdot\,; y_0) : \mathbb{R} \to L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n) \simeq \mathcal{M}(n)$ è soluzione dell'equazione differenziale lineare in forma matriciale $Y' = D_y f(t, y(t; y_0))Y$. Per quanto concerne il dato iniziale si ha

$$D_{y_0}\big(y(t_0; y_0)\big) = D_{y_0} y_0 = I,$$

dove I è l'identità. In effetti, si può dimostrare il seguente risultato.

Teorema 5.10 (di differenziabilità rispetto ai dati) *Sia $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$, $\Omega \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ aperto, continua e con derivate parziali rispetto a y continue. Allora la mappa $y_0 \mapsto y(t; y_0)$ è differenziabile e l'applicazione $t \mapsto D_{y_0} y(t; y_0)$ da $\mathbb{R}$ in $\mathcal{M}(n)$ coincide con la soluzione al tempo t del problema di Cauchy in forma matriciale*

$$\begin{cases} Y' = D_y f(t, y(t; y_0))Y \\ Y(t_0) = I, \end{cases} \tag{5.9}$$

dove $y(t; y_0)$ è la soluzione di (5.1).

Dimostrazione Omessa (per il caso scalare $n = 1$ si vedano gli approfondimenti in coda al capitolo).

Si osservi che al medesimo risultato formale si poteva arrivare anche partendo della formulazione integrale di (5.1)

$$y(t; y_0) = y_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, y(s; y_0))\, ds.$$

Potendo differenziare rispetto a y_0 sotto il segno di integrale si ottiene

$$\begin{aligned} D_{y_0} y(t; y_0) &= D_{y_0} y_0 + \int_{t_0}^{t} D_{y_0}\big[f(s, y(s; y_0))\big]\, ds \\ &= I + \int_{t_0}^{t} D_y f(s, y(s; y_0)) D_{y_0} y(s; y_0)\, ds. \end{aligned}$$

che è la formulazione integrale di (5.9) per la soluzione $Y(t) = D_{y_0} y(t; y_0)$.

Dipendenza continua rispetto al campo vettoriale

Il Lemma di Gronwall permette anche di dimostrare un risultato di continuità delle soluzioni di un'equazione differenziale rispetto a possibili variazioni del campo vettoriale. Premettiamo il seguente lemma tecnico al risultato più generale dato dal Teorema 5.12.

Lemma 5.11 *Siano $f, g : \Omega \to \mathbb{R}^n$, $\Omega \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ aperto, funzioni continue con f localmente lipschitziana rispetto alla variabile y. Fissati $(t_0, y_0), (s_0, z_0)$ in Ω, sia $y : I \to \mathbb{R}^n$ la soluzione in $I = [t_0 - \delta_0, t_0 + \delta_0]$ del problema di Cauchy*

$$\begin{cases} y' = f(t, y) \\ y(t_0) = y_0, \end{cases}$$

e sia $z : J \to \mathbb{R}^n$ una soluzione in $J = [s_0 - \delta_0', s_0 + \delta_0']$ del problema di Cauchy

$$\begin{cases} z' = g(t, z) \\ z(s_0) = z_0. \end{cases}$$

Allora esistono costanti positive $\varepsilon = \varepsilon(t_0, g)$, $M = M_g(K)$, $L = L_f(K)$, $\rho = \rho(\delta_0, \delta_0')$, dove $K \subset \Omega$ è un compatto che contiene le traiettorie di $y(t)$ e $z(t)$ ristrette a $I \cap J$, tali che se $|t_0 - s_0| \le \varepsilon$ si ha

$$\|y(t) - z(t)\| \le \big[\|y_0 - z_0\| + M|t_0 - s_0| + \rho\|f - g\|_\infty\big] \mathrm{e}^{L|t-t_0|}, \tag{5.10}$$

per ogni $t \in I \cap J$, dove si è posto $\|f - g\|_\infty := \max_{(\tau,x)\in K} \|f(\tau, x) - g(\tau, x)\|$.

Dimostrazione Fissati (t_0, y_0) e la relativa soluzione $y(t)$ in I, se s_0 è sufficientemente vicino a t_0 si avrà $s_0 \in I$ e $t_0 \in J$, in particolare l'intervallo di estremi t_0 e s_0 sarà contenuto in $I \cap J$ che quindi sarà non vuoto. In realtà dobbiamo anche applicare il Teorema di Peano sui compatti per garantire l'esistenza di un intervallo di definizione comune per tutte le corrispondenti soluzioni $z(t)$ al variare di (s_0, z_0) in un intorno compatto di (t_0, z_0). Più precisamente, per esempio si può prendere ε uguale all'ε_K del Teorema 2.22 relativo al compatto $K = I \times \{z_0\}$ e alla funzione g.

Sia K un qualsiasi compatto contenuto in Ω e contenente le traiettorie di $y(t)$ e $z(t)$ ristrette a $I \cap J$ (per esempio si potrebbe prendere K proprio uguale all'unione di queste due traiettorie), si definiscano

$$M = M_g(K) := \max_{(s,z)\in K} \|g(s, z)\|, \quad \rho = \rho(\delta_0, \delta_0') \ge \text{ampiezza di } I \cap J,$$

e sia L la costante di Lipschitz di $f(t, \cdot)$ sul compatto K. Si ha

$$\begin{aligned} y(t) - z(t) &= y_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, y(s))\, ds - \Big(z_0 + \int_{s_0}^{t} g(s, z(s))\, ds\Big) \\ &= y_0 - z_0 + \int_{t_0}^{s_0} g(s, z(s))\, ds + \int_{t_0}^{t} \big(f(s, z(s)) - g(s, z(s))\big)\, ds + \\ &\quad + \int_{t_0}^{t} \big(f(s, y(s)) - f(s, z(s))\big)\, ds, \end{aligned}$$

da cui segue

$$
\begin{aligned}
&\|y(t)-z(t)\| \\
&\quad \le \|y_0-z_0\| + \left|\int_{s_0}^{t_0} \|g(s,z(s))\|\,ds\right| + \left|\int_{t_0}^{t} \big\|f(s,z(s))-g(s,z(s))\big\|\,ds\right| + \\
&\qquad\quad + \left|\int_{t_0}^{t} \big\|f(s,y(s))-f(s,z(s))\big\|\,ds\right| \\
&\quad \le \|y_0-z_0\| + M|t_0-s_0| + \rho\|f-g\|_\infty + L\left|\int_{t_0}^{t} \|y(s)-z(s)\|\,ds\right|.
\end{aligned}
$$

A questo punto si può applicare il Lemma di Gronwall alla funzione $v(t) = \|y(t)-z(t)\| : I \cap J \to \mathbb{R}$, con $\alpha = \|y_0-z_0\| + M|t_0-s_0| + \rho\|f-g\|_\infty$ e $\beta = L$, ottenendo (5.10). □

Dal precedente lemma si deduce che la distanza tra le soluzioni di due problemi di Cauchy cresce al più esponenzialmente rispetto alla loro distanza iniziale misurata in termini della distanza tra i dati iniziali e tra i campi vettoriali. Come applicazione si dimostra il seguente risultato.

Teorema 5.12 (di Kamke, di dipendenza continua dai dati (III)) *Data $f : \Omega \subseteq \mathbb{R}\times\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ funzione continua e localmente lipschitziana rispetto alla variabile y, e dato $(t_0, y_0) \in \Omega$, sia $y(t)$ la soluzione nell'intervallo chiuso e limitato I del problema di Cauchy*

$$
\begin{cases} y' = f(t,y) \\ y(t_0) = y_0. \end{cases} \tag{5.11}
$$

Allora esistono $M, L, \rho > 0$, un compatto di $K \subset \Omega$ contenente la traiettoria di $y(t)$ e un intorno U di (t_0, y_0, f) in $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n\times C(\Omega)$ tali che per ogni $(s_0, z_0, g) \in U$ ogni soluzione $z(t)$ del problema di Cauchy

$$
\begin{cases} z' = g(t,z) \\ z(s_0) = z_0 \end{cases} \tag{5.12}
$$

è definita in I e vale

$$
\|y(t)-z(t)\| \le \big[\|y_0-z_0\| + M|t_0-s_0| + \rho\|f-g\|_\infty\big]\mathrm{e}^{L|t-t_0|}, \tag{5.13}
$$

per ogni $t \in I$, dove si è posto $\|f-g\|_\infty := \max_{(\tau,x)\in K}\|f(\tau,x)-g(\tau,x)\|$. In sostanza, l'applicazione che associa a (t_0, y_0, f) la soluzione di (5.11) è localmente lipschitziana da $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n\times C(\Omega)$ in $(C(I), \|\cdot\|_\infty)$.

In particolare, date $f_k : \Omega \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ *funzioni continue e* $(t_k, y_k) \in \Omega$ *per* $k = 1, 2, \ldots$, *se* $(t_k, y_k) \to (t_0, y_0)$ *e* $f_k \to f$ *per* $k \to +\infty$ *uniformemente sui compatti di* Ω, *detta* $y_k(t)$ *una qualsiasi soluzione del problema di Cauchy*

$$\begin{cases} y' = f_k(t, y) \\ y(t_k) = y_k, \end{cases} \tag{5.14}$$

allora definitivamente per $k \geq \bar{k}$ *la funzione* $y_k(t)$ *può essere definita in* I *e si ha* $y_k(t) \to y(t)$ *per* $k \to +\infty$ *uniformemente in* I.

Dimostrazione La parte complicata del teorema sta nel dimostrare che per dati vicini a (t_0, y_0, f) le soluzioni $z(t)$ possono essere definite in I e, volendo applicare il Lemma 5.11, nel verificare che le costanti M, ρ, L possono essere scelte in maniera uniforme (per esempio ciò accade se le traiettorie di tutte le z sono contenute in un intorno compatto della traiettoria di y). Una volta provata (5.13) la seconda parte del teorema è immediata essendo

$$\|y(t) - y_k(t)\|_\infty \leq \big[\|y_0 - y_k\| + M|t_0 - t_k| + \rho\|f - f_k\|_\infty\big]\mathrm{e}^{L\rho}, \tag{5.15}$$

per $t \in I$, e per $k \to +\infty$ si ottiene la tesi. Per i dettagli tecnici si vedano gli approfondimenti al termine del capitolo. □

Esistono generalizzazioni di questo teorema al caso di campi vettoriali non necessariamente lipschitziani, una delle quali è presentata nel seguito. Ovviamente in questo caso si perde la validità della stima (5.13).

Teorema 5.13 (di Kamke, di dipendenza continua dai dati (IV)) *Siano date* $f, f_k : \Omega \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ *continue,* $k = 1, 2, \ldots$, *e punti* $(t_k, y_k) \in \Omega$ *per* $k \in \mathbb{N}$. *Supponiamo che il problema di Cauchy*

$$\begin{cases} y' = f(t, y) \\ y(t_0) = y_0, \end{cases}$$

abbia un'unica soluzione $y(t)$ *nell'intervallo chiuso e limitato* I. *Se* $(t_k, y_k) \to (t_0, y_0)$ *e* $f_k \to f$ *per* $k \to +\infty$ *uniformemente sui compatti di* Ω, *detta* $y_k(t)$ *una* qualsiasi *soluzione del problema di Cauchy*

$$\begin{cases} y' = f_k(t, y) \\ y(t_k) = y_k, \end{cases}$$

allora, definitivamente per $k \geq \bar{k}$, *la funzione* $y_k(t)$ *può essere definita in* I *e si ha* $y_k(t) \to y(t)$ *per* $k \to +\infty$ *uniformemente su* I.

Dimostrazione Si vedano gli approfondimenti al termine del capitolo.

Approfondimenti

Cenni ai sistemi dinamici

Dato un sistema autonomo di equazioni differenziali

$$y' = f(y)$$

con $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ continua in A aperto, tale che ci sia unicità delle soluzioni per tutti i relativi problemi di Cauchy, è possibile associargli un cosiddetto *sistema dinamico*. Più precisamente, sia $\phi(t, x) := y(t; 0, x)$ dove, come già visto, $y(t; 0, x)$ rappresenta il valore al tempo t della soluzione massimale del problema di Cauchy con dati iniziali $y(0) = x$, e sia $I(x)$ il suo intervallo massimale di esistenza. Al posto di $\phi(t, x)$ si utilizza spesso anche la notazione $\phi_t(x)$. La mappa ϕ viene detta *flusso* associato all'equazione differenziale $y' = f(y)$. Posto $D := \big\{(t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n : \ x \in A,\, t \in I(x)\big\}$, si può dimostrare che

a) D è aperto in $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$;

b) ϕ mappa D in A ed è continua;

c) valgono le seguenti proprietà:

   i) $\phi_0(x) = x$ per ogni $x \in A$;

   ii) per ogni $x \in A$, $t \in I(\phi_s(x))$ se e solo se $t + s \in I(x)$, nel qual caso vale $\phi_t(\phi_s(x)) = \phi_{t+s}(x)$.

Si noti come dalle proprietà sopra elencate segua subito che se ϕ_t è definita nel sottoaperto U di A, allora

- l'insieme $V = \phi_t(U)$ è aperto;
- ϕ_{-t} è definita in U e vale $\phi_{-t}(V) = U$;
- $\phi_{-t}(\phi_t(x)) = x$ per ogni $x \in U$ e $\phi_t(\phi_{-t}(x)) = x$ per ogni $x \in V$;
- dunque $\phi_t : U \to V$ è un omeomorfismo.

Le proprietà i)-ii) derivano direttamente dalla definizione di ϕ, dall'invarianza per traslazioni temporali delle soluzioni di un sistema autonomo e dall'unicità delle stesse, mentre i punti a) e b) discendono dai Teoremi 5.12, nel caso di locale lipschitzianità di f, oppure 5.13 nel caso generale (svolgere

i dettagli per esercizio). Si noti che se f è localmente lipschitziana, da (5.7) segue che

$$\|\phi_t(x) - \phi_t(z)\| \leq \mathrm{e}^{L|t|}\|x - z\|,$$

dunque la mappa ϕ_t (come anche ϕ) è localmente lipschitziana.

In generale si può dare la seguente definizione:

Definizione 5.14 *Un* sistema dinamico continuo *in uno spazio metrico* (X, d) *è una mappa continua* $\pi : \mathbb{R} \times X \to X$ *tale che per ogni* $x \in X$ *e ogni* $t, s \in \mathbb{R}$ *valgono*

i) $\pi(0, x) = x$;

ii) $\pi(t, \pi(s, x)) = \pi(t + s, x)$.

Nel caso in considerazione, il flusso ϕ legato a un'equazione differenziale definisce solamente un sistema dinamico *locale* ovvero definito generalmente solo su un sottoaperto D di $\mathbb{R} \times X = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$; ciò è essenzialmente dovuto al fatto che le soluzioni massimali dell'equazione $y' = f(y)$ possono non essere globalmente definite in $\mathbb{R}$. Ciò non comporta grossi problemi perché vale il

Teorema 5.15 (di Vinograd) *Se* $a : A \to]0, +\infty[$ *è continua, allora le soluzioni di:*

$$\begin{cases} y' = f(y) \\ y(0) = y_0 \end{cases} \tag{5.16}$$

e di

$$\begin{cases} z' = a(z)f(z) \\ z(0) = y_0 \end{cases} \tag{5.17}$$

sono due curve con lo stesso supporto e lo stesso verso.

In particolare, prendendo la funzione $a(z) = \frac{1}{1+\|f(z)\|}$ nel caso $A = \mathbb{R}^n$, oppure $a(z) = \frac{\mathrm{dist}\,(z,\partial(A))}{1+\mathrm{dist}\,(z,\partial(A))} \cdot \frac{1}{1+\|f(z)\|}$ nel caso $A \subset \mathbb{R}^n$, si verifica (perché?) che tutte le soluzioni di (5.17) sono globalmente definite. In definitiva, il sistema dinamico locale generato dal flusso di (5.16) è sostanzialmente equivalente al sistema dinamico generato dal flusso di (5.17), definito su tutto $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ (in sostanza, si opera un cambio di coordinate che riparametrizza le soluzioni di (5.16) in modo tale che siano globalmente definite). In generale non è dunque restrittivo supporre che il sistema dinamico ottenuto sia globale.

Si osservi infine che al più generale sistema non autonomo $y' = f(t, y)$ si potrebbe associare il flusso (e sistema dinamico) generato dal sistema autonomo equivalente

$$\begin{cases} y' = f(t, y) \\ t' = 1. \end{cases}$$

Purtroppo questa non è una scelta felice, perché è facile verificare che tale sistema dinamico non può ammettere equilibri né orbite periodiche, ecc., dunque è poco interessante.

Dimostrazione del Teorema 5.10 di differenziabilità rispetto ai dati, caso $n = 1$

Dall'analisi formale svolta precedentemente, nel caso $n = 1$ basta verificare che $\partial_{y_0} y(t; y_0)$ coincide con la soluzione $z(t)$ del problema di Cauchy

$$z' = \partial_y f(t, y(t; y_0))z, \qquad z(0) = 1.$$

Supponendo per facilità $|h| \leq 1$ e $t \in I_\delta(t_0)$ per qualche δ, si ha

$$\begin{aligned} &y(t; y_0 + h) - y(t; y_0) - hz(t) \\ &\quad = \Big(y_0 + h + \int_{t_0}^t f(s, y(s; y_0 + h))\, ds\Big) - \Big(y_0 + \int_{t_0}^t f(s, y(s; y_0))\, ds\Big) + \\ &\qquad\qquad - h\Big(1 + \int_{t_0}^t \partial_y f(s, y(s; y_0))z(s)\, ds\Big) \\ &\quad = \int_{t_0}^t \big[f(s, y(s; y_0 + h)) - f(s, y(s; y_0)) - h\partial_y f(s, y(s; y_0))z(s)\big]\, ds. \end{aligned}$$

Per il Teorema di Lagrange, per ogni fissati s e h esiste $\xi(s, h)$ tale che

$$f(s, y(s; y_0 + h)) - f(s, y(s; y_0)) = \partial_y f(s, \xi(s, h))\big[y(s; y_0 + h) - y(s; y_0)\big],$$

con $\xi(s, h)$ compreso tra $y(s; y_0)$ e $y(s; y_0+h)$. La relazione sopra può dunque essere scritta

$$\begin{aligned} &y(t; y_0 + h) - y(t; y_0) - hz(t) \\ &\quad = \int_{t_0}^t \big[\partial_y f(s, \xi(s, h))\big[y(s; y_0 + h) - y(s; y_0)\big] - h\partial_y f(s, y(s; y_0))z(s)\big]\, ds \\ &\quad = \int_{t_0}^t \big[\partial_y f(s, \xi(s, h)) - \partial_y f(s, y(s; y_0))\big]z(s)h\, ds + \\ &\qquad\qquad + \int_{t_0}^t \big[\partial_y f(s, \xi(s, h))\big[y(s; y_0 + h) - y(s; y_0) - hz(s)\big]\big]\, ds, \end{aligned}$$

da cui, prendendo il valore assoluto e facendo ovvie maggiorazioni, segue

$$v_h(t) = \alpha_h + \beta\Big|\int_{t_0}^{t} v_h(s)\,ds\Big|,$$

avendo posto

$$\begin{aligned} v_h(t) &:= \big|y(t;y_0+h) - y(t;y_0) - hz(t)\big|, \\ \alpha_h := |h|\omega(h) &:= |h|\left|\int_{t_0-\delta}^{t_0+\delta} \big|\partial_y f(s,\xi(s,h)) - \partial_y f(s,y(s;y_0))\big|\,\big|z(s)\big|\,ds\right|, \\ \beta &:= \sup\big\{|\partial_y f(t,\xi(t,h))| :\ t\in I_\delta(t_0),\ |h|\le 1\big\} < +\infty. \end{aligned}$$

Per il Lemma 5.4 si ottiene allora

$$v_h(t) \le \alpha_h \mathrm{e}^{\beta|t-t_0|},.$$

Poiché per il Teorema 5.6 $y(t;y_0+h) \to y(t;y_0)$ per $h\to 0$ uniformemente per $t\in I_\delta(t_0)$, per confronto $\xi(t,h)\to y(t;y_0)$ per $h\to 0$ uniformemente per $t\in I_\delta(t_0)$, da cui si ottiene $\omega(h)=o(1)$ e $\alpha_h = o(h)$, per cui

$$|y(t;y_0+h) - y(t;y_0) - hz(t)| = v_h(t) = o(h)$$

da cui la tesi, ovvero $\partial_{y_0} y(t;y_0) = z(t)$. □

Il caso $n\ge 2$ si tratta sostanzialmente allo stesso modo, considerando le derivate parziali e utilizzando opportunamente il Lemma di Gronwall.

Dimostrazione del Teorema 5.12 di dipendenza continua dai dati (III)

Dimostrazione (del Teorema 5.12) La dimostrazione proposta fa uso del cosiddetto "bootstrap principle": dimostreremo che per s_0, z_0, g sufficientemente vicini a t_0, y_0, f, se la traiettoria di $z(t)$ è definita e contenuta in un intorno compatto della traiettoria di $y(t)$ fino al tempo t, allora vale (5.13) fino al tempo t; inoltre dimostreremo che se vale la disuguaglianza (5.13) fino al tempo t, allora la traiettoria di $z(t)$ è contenuta in un intorno leggermente *più piccolo* di quello iniziale, il che permetterà di estendere $z(t)$ e le disuguaglianze in un intorno di t. Grazie a questo ragionamento (apparentemente circolare, ma non lo è!) si potrà concludere che z è definita in I con traiettoria contenuta in un intorno compatto della traiettoria di y e che (5.13) vale per ogni $t\in I$.

Posto $I=[a,b]$, poniamo per brevità $\rho = b-a$ e, come nella dimostrazione del Teorema di Peano sui compatti 2.22, prendiamo $\alpha, R>0$ tali

che $K := C_{\alpha,R}(\mathcal{T}_y)$ sia contenuto in Ω, dove $\mathcal{T}_y$ è la traiettoria di y in I e $C_{\alpha,R}(\mathcal{T}_y)$ è definito come in (2.11). K è il compatto cercato. Sia infine $L = L_f(K)$ la costante di Lipschitz di f in K e siano

$$M_f := \|f\|_\infty = \max_{(s,x)\in K} \|f(s,x)\|, \quad M := M_f + R/\rho.$$

Se g è tale che $\|g - f\|_\infty \le R/\rho$ allora $\|g\|_\infty \le \|f\|_\infty + \|g - f\|_\infty \le M$. Si prendano ora s_0, z_0 tali che

$$|s_0 - t_0| \le \alpha/2, \qquad \|z_0 - y_0\| \le R/2; \tag{5.18}$$

ciò permette di concludere che $C_{\alpha/2,R/2}(s_0, z_0) \subset C_{\alpha,R}(t_0, y_0) \subset K$, e il Teorema di Peano sui compatti 2.22 insieme al Lemma 3.26 garantiscono che ogni soluzione di (5.12), tra le quali $z(t)$, è definita (almeno) in $I_\varepsilon(s_0)$ dove $\varepsilon = \min\{\alpha/2, R/(2M)\}$. Restringendo ora $|s_0 - t_0| \le \varepsilon$ si ha che $z(t)$ è sicuramente definita in (un intorno di) t_0. Prendiamo infine

$$\big[\|z_0 - y_0\| + M|s_0 - t_0| + \rho\|g - f\|_\infty\big]\mathrm{e}^{L\rho} \le R \tag{5.19}$$

(la quale tra l'altro garantisce $\|g - f\|_\infty \le R/\rho$). Le condizioni (5.18)-(5.19) insieme a $|s_0 - t_0| \le \varepsilon$ determinano un intorno di (t_0, y_0, f) in $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times C(\Omega)$ (le cui dimensioni dipendono solo da t_0, y_0, f) che è quello cercato. Dimostriamo che finché è definita $z(t)$ soddisfa $\|z(t) - y(t)\| \le R$. Questa è essenzialmente una *stima a priori*. Sotto le condizioni imposte, $z(t)$ è definita almeno in un intorno di t_0 e per continuità verifica $\|z(t) - y(t)\| \le R$; si può allora applicare il Lemma 5.11 con le costanti ε, M, L, ρ trovate, ottenendo che finché $z(t)$ è definita e con traiettoria contenuta in K vale

$$\|z(t) - y(t)\| \le \big[\|z_0 - y_0\| + M|s_0 - t_0| + \rho\|g - f\|_\infty\big]\mathrm{e}^{L|t-t_0|}. \tag{5.20}$$

Consideriamo il caso $t > t_0$, analogamente si ragionerà per $t < t_0$. Se ora $z(t)$ è definita in un intorno $[t_0, \tau]$ di t_0 con $t_0 \le \tau < b$, la precedente disuguaglianza insieme a (5.19) implica che in effetti $\|z(\tau) - y(\tau)\| < R$. Da ciò segue che il punto $(\tau, z(\tau))$ è contenuto nell'*interno* del compatto K ed è quindi possibile costruire un cilindro di sicurezza con centro tale punto e ancora contenuto in K. Ne consegue che $z(t)$ è definita almeno in un intorno (destro) di τ con traiettoria contenuta in K. Si può quindi estendere il ragionamento per concludere che (5.20) vale anche in un intorno di τ. In maniera analoga si ragiona per $a < \tau \le t_0$. In definitiva, detto $I(t_0, \tau)$ l'intervallo di estremi t_0 e τ, e posto

$$J := \big\{\tau \in I : \ z \text{ è definita in } I(t_0, \tau) \text{ e vale (5.20) } \forall t \in I(t_0, \tau)\big\},$$

si è dimostrato che J è un sottoinsieme chiuso (banale), aperto e non vuoto di $[t_0, b]$, dunque per connessione $J = [t_0, b]$. Analogamente si ragiona in passato ottenendo infine che se s_0, z_0, g soddisfano le condizioni trovate, la relativa soluzione $z(t)$ e definita in I e ivi soddisfa (5.20), cioè la tesi. $\square$

Dimostrazione del Teorema 5.13 di dipendenza continua dai dati (IV)

Dimostrazione (del Teorema 5.13) Se f è localmente lipschitziana chiaramente si può applicare il Teorema 5.12; se f non è localmente lipschitziana la disuguaglianza (5.13) non è più valida perché non si dispone della costante di Lipschitz L di f e la dimostrazione deve essere cambiata.

Anzitutto si può supporre che $I \subseteq [a, b]$ e $t_0 \in]a, b[$. Si prenda poi un compatto K di Ω che contiene la traiettoria di $y(t)$ per $t \in [a, b]$; più precisamente, per compattezza esistono $\alpha, R > 0$ tale che

$$K := \bigcup_{t\in[a,b]} C_{\alpha,R}(t, y(t)) \subset \Omega.$$

Si ponga quindi $M := \max\big\{\|f(s, z)\| : \ (s, z) \in K\big\}$. Poiché $f_k \to f$ uniformemente sui compatti si avrà $\max_K \|f_k - f\| \le 1$ definitivamente per $k \ge \bar{k}$ di modo che

$$\max_{(s,z)\in K} \|f_k(s, z)\| \le \max_{(s,z)\in K} \|f(s, z)\| + \max_{(s,z)\in K} \|f_k(s, z) - f(s, z)\| \le (M + 1).$$

Eventualmente aumentando $\bar{k}$ si può anche assumere che $|t_k - t_0| \le \alpha/2$ e che $\|y_k - y_0\| \le R/2$ cosicché $\|f_k(s, z)\| \le M + 1$ per ogni (s, z) con $|s - t_k| \le \alpha/2$ e $\|z - y_k\| \le R/2$ (per cui $|s - t_0| \le \alpha$ e $\|z - y_0\| \le R$).

Per il Lemma 3.26 ogni soluzione del problema di Cauchy 5.12 per $k \ge \bar{k}$ può essere definita in $I_\varepsilon(t_k)$ dove $\varepsilon = \min\{\alpha/2, R/(2(M + 1))\}$. Eventualmente aumentando $\bar{k}$ si può assumere che $|t_k - t_0| \le \varepsilon/2$; in particolare, essendo $I_{\varepsilon/2}(t_0) \subset I_\varepsilon(t_k)$ si ha che ogni $y_k(t)$, per $k \ge \bar{k}$, è definita almeno in $I_{\varepsilon/2}(t_0)$. Inoltre per ogni $t \in I_{\varepsilon/2}(t_0)$, per il Lemma 2.8 si ha $\|y_k(t) - y_k\| \le R/2$ per cui valgono $\|y_k(t) - y_0\| \le R$ e per $t, s \in I_{\varepsilon/2}(t_0)$

$$\|y_k'(t)\| = \|f_k(t, y_k(t))\| \le M + 1 \qquad \Longrightarrow \qquad \|y_k(t) - y_k(s)\| \le (M + 1)|t - s|.$$

La successione $(y_k(t))$ è dunque equilimitata ed equilipschitziana in $I_{\varepsilon/2}(t_0)$, e per il Teorema di Ascoli-Arzelà ammette una sottosuccessione $(y_{k_j}(t))$ uniformemente convergente a una funzione $\tilde{y}(t)$ in $I_{\varepsilon/2}(t_0)$. Si verifica facilmente che anche $f_{k_j}(t, y_{k_j}(t))$ converge uniformemente a $f(t, y(t))$ sul medesimo

intervallo. Passando al limite nella formulazione integrale di 5.12, ovvero

$$y_{k_j}(t) = y_{k_j} + \int_{t_{k_j}}^{t} f(s, y_{k_j}(s))\, ds,$$

si ottiene che

$$\tilde{y}(t) = y_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, \tilde{y}(s))\, ds,$$

quindi $\tilde{y}(t)$ è soluzione del problema di Cauchy 5.11 e per l'ipotesi di unicità di tale soluzione si ha $\tilde{y}(t) = y(t)$ in $I_{\varepsilon/2}(t_0)$. Il medesimo risultato può essere ottenuto partendo direttamente da una sottosuccessione di $(y_k(t))$ e passando poi a una sotto-sottosuccessione convergente a $y(t)$. Per il Teorema A.26 in Appendice, si ottiene che *tutta* la successione $(y_k(t))$ converge uniformemente a $y(t)$ in $I_{\varepsilon/2}(t_0)$. A questo punto il ragionamento può essere iterato a partire dal punto $(t_1, y(t_1))$ dove $t_1 = t_0 + \varepsilon/2$ (analogamente in passato a partire da $t_1 = t_0 - \varepsilon/2$). Poiché il compatto K e la costante ε non dipendono dal dato iniziale fissato $(\tilde{t}, y(\tilde{t}))$, purché $\tilde{t} \in]a, b[$, si ottiene la convergenza di $y_k(t)$ a $y(t)$ nell'intervallo $I_{\varepsilon/2}(t_1)$, e in un numero finito di iterazioni la convergenza su tutto $[a, b]$. $\square$

Capitolo 6

Analisi qualitativa

Con la locuzione analisi qualitativa si intende lo studio del comportamento delle soluzioni di un sistema di equazioni differenziali, ottenuto generalmente senza conoscere, come di norma, un'espressione esplicita per tali soluzioni. Tra le proprietà studiate che considereremo si annoverano la monotonia, la convessità, il comportamento agli estremi dell'intervallo massimale d'esistenza, sia per quanto riguarda l'eventuale esistenza del limite, sia per quanto concerne, più in generale, il profilo asintotico. Molte informazioni riguardanti le soluzioni possono infatti essere ottenute direttamente dall'equazione differenziale stessa; per esempio, nel caso $n = 1$ le proprietà di monotonia sono direttamente collegate col segno del campo vettoriale, il quale fornisce anche molte indicazioni sul comportamento asintotico. Nella prossima sezione verranno inoltre introdotti altri due importanti strumenti: il Teorema del confronto e il criterio dell'asintoto.

Il Teorema del confronto

In questa sezione presenteremo uno strumento molto utile per studiare le proprietà qualitative delle soluzioni di un'equazione differenziale, quali l'intervallo di esistenza, oppure l'esplosione in tempo finito, oppure ancora il comportamento asintotico della traiettoria. Più precisamente vedremo due risultati, il primo che vale nella sola ipotesi di continuità del campo vettoriale f, il secondo più generale in qualche condizione rispetto al primo ma che necessita come controparte dell'unicità delle soluzioni. Si sottolinea fin da subito che i teoremi saranno validi solo nel caso $n = 1$ ovvero per la singola equazione scalare, sebbene alcuni risultati possano essere estesi anche al caso vettoriale con l'utilizzo delle più generali "disuguaglianze differenziali".

Teorema 6.1 (del confronto (I)) *Data $f : \Omega \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua, Ω aperto, siano $v, u : I \to \mathbb{R}$ derivabili tali che*

$$v'(t) \leq f(t, v(t)), \qquad u'(t) \geq f(t, u(t)),$$

nelle quali, per ogni $t \in I$, almeno una delle disuguaglianze è stretta. Preso $t_0 \in I$ si ha

i) FUTURO: *se $v(t_0) \leq u(t_0)$ allora $v(t) < u(t)$ per ogni $t > t_0$, $t \in I$;*

ii) PASSATO: *se $v(t_0) \geq u(t_0)$ allora $v(t) > u(t)$ per ogni $t < t_0$, $t \in I$.*

La dimostrazione del teorema si basa sul seguente semplice lemma.

Lemma 6.2 *Date $u, v : I \to \mathbb{R}$ tali che $v'(\bar{t}) < u'(\bar{t})$ con $\bar{t} \in I$ allora si ha*

i) FUTURO: *se $v(\bar{t}) \leq u(\bar{t})$ allora esiste $\delta > 0$ tale che $v(t) < u(t)$ per ogni $t \in]\bar{t}, \bar{t} + \delta]$;*

ii) PASSATO: *se $v(\bar{t}) \geq u(\bar{t})$ allora esiste $\delta > 0$ tale che $v(t) > u(t)$ per ogni $t \in [\bar{t} - \delta, \bar{t}[$.*

DIMOSTRAZIONE Per definizione di derivata si ha

$$\lim_{t \to \bar{t}} \frac{v(t) - v(\bar{t})}{t - \bar{t}} < \lim_{t \to \bar{t}} \frac{u(t) - u(\bar{t})}{t - \bar{t}},$$

e per il Teorema della permanenza del segno esiste un intorno $[t_0 - \delta, t_0 + \delta] \subseteq I$ tale che per $t \in [t_0 - \delta, t_0 + \delta] \setminus \{\bar{t}\}$ si ha

$$\frac{v(t) - v(\bar{t})}{t - \bar{t}} < \frac{u(t) - u(\bar{t})}{t - \bar{t}}.$$

Se $v(\bar{t}) \leq u(\bar{t})$ e $t \in]\bar{t}, \bar{t} + \delta]$ la disuguaglianza sopra equivale a $v(t) - v(\bar{t}) < u(t) - u(\bar{t})$ cioè $u(t) - v(t) > u(\bar{t}) - v(\bar{t}) \geq 0$ da cui il primo risultato. Se $v(\bar{t}) \geq u(\bar{t})$, preso $t \in [\bar{t} - \delta, \bar{t}[$ la disuguaglianza sopra equivale a $v(t) - v(\bar{t}) > u(t) - u(\bar{t})$ cioè $v(t) - u(t) > v(\bar{t}) - u(\bar{t}) \geq 0$ da cui la tesi. □

DIMOSTRAZIONE DEL TEOREMA DEL CONFRONTO (I) Dimostriamo i), analogamente si può procedere per ii). Definiamo l'insieme

$$A := \big\{ t \in I : \ t > t_0, \ v(s) < u(s) \ \forall\, s \in]t_0, t] \big\}.$$

Anzitutto si osserva che l'insieme è non vuoto. Infatti, se $v(t_0) < u(t_0)$ per continuità si ha $v(t) < u(t)$ in un intorno destro di t_0 dunque $A \neq \varnothing$. Se, invece, $v(t_0) = u(t_0)$ si ha

$$v'(t_0) \leq f(t_0, v(t_0)) = f(t_0, u(t_0)) \leq u'(t_0),$$

dove per ipotesi almeno una delle disuguaglianze è stretta. Si può quindi applicare il lemma precedente con $\bar{t} = t_0$ (in futuro) e ottenere che $v(t) < u(t)$ in un intorno destro di t_0, per cui ancora $A \neq \varnothing$.

A questo punto la tesi equivale a dimostrare che $\sup A = \sup I$. Ragionando per assurdo, supponiamo che $\beta := \sup A < \sup I$; in particolare si ha $\beta \in I$. Per le proprietà caratteristiche dell'estremo superiore, per ogni $s \in]t_0, \beta[$ esiste $t \in A$ tale che $s < t < \beta$ ma allora $v(s) < u(s)$ per definizione di A. Per continuità si avrà $v(\beta) \leq u(\beta)$. Se fosse $v(\beta) < u(\beta)$, per continuità si potrebbe estendere la disuguaglianza in un intorno destro di β, contro il fatto che β è l'estremo superiore di A. Se fosse $v(\beta) = u(\beta)$, come sopra si dimostrerebbe che $v'(\beta) < u'(\beta)$ e applicando il lemma con $\bar{t} = \beta$ (in passato) si avrebbe che $v(t) > u(t)$ in un intorno sinistro di β, ancora una contraddizione. In definitiva $\sup A = \sup I$ da cui la tesi. □

Osservazione 6.3 In realtà si è dimostrato che se due funzioni sono tali che $v(t_0) \leq u(t_0)$ e vale $v'(t) < u'(t)$ ogni qual volta $v(t) = u(t)$ per qualche $t \geq t_0$, allora $v(t) < u(t)$ per ogni $t > t_0$.

Nelle ipotesi del teorema, per $t > t_0$ la funzione v viene detta *sottosoluzione* e u viene detta *soprasoluzione* relative all'equazione $y' = f(t, y)$, mentre per $t < t_0$ le terminologie vanno invertite. In particolare, ogni soluzione $y(t)$ dell'equazione differenziale $y' = f(t, y)$ è sia sotto che soprasoluzione. Conseguentemente, se $v'(t) < f(t, v(t))$ e $u'(t) > f(t, u(t))$ (ovvero v e u sono per $t > t_0$, rispettivamente, una sottosoluzione e una soprasoluzione *stretta*) e si ha $v(t_0) \leq y(t_0) \leq u(t_0)$ allora $v(t) < y(t) < u(t)$ per ogni $t > t_0$, il che giustifica l'uso della terminologia. In questo caso v e u si dicono anche *sottosoluzione* e, rispettivamente, *soprasoluzione di y per $t > t_0$*. Si tenga ben presente che per una funzione $u(t)$ lo stare sopra una soluzione $y(t)$ non vuol dire essere una soprasoluzione; in effetti per essere soprasoluzione $u(t)$ deve verificare $u'(t) \geq f(t, u(t))$, e il Teorema del confronto afferma che allora u sta effettivamente sopra y. Ma in generale una qualsiasi funzione che stia sopra $y(t)$ non è necessariamente una soprasoluzione. Analoghe considerazioni valgono nel caso di una sottosoluzione.

Il Teorema 6.1, come anche il Teorema 6.4 che seguirà, può dunque essere utilizzato per ottenere delle stime per eccesso e per difetto delle soluzioni utilizzando delle opportune sopra e sottosoluzioni; il vantaggio è che mentre in generale le soluzioni non sono esplicitamente calcolabili, è invece più semplice trovare o costruire delle opportune sopra o sottosoluzioni. Volendo confrontare una soluzione $v = y$ con una soprasoluzione u, poiché $y'(t) = f(t, y(t))$ per ogni t, per applicare il Teorema 6.1 deve necessariamente valere $u'(t) \gneqq f(t, u(t))$ per ogni t dunque u deve essere soprasoluzione

stretta. Ci si può chiedere se sia possibile indebolire o, meglio, togliere tale restrizione. Vedremo che la risposta è positiva se c'è unicità delle soluzioni per i problemi di Cauchy. Per dimostrare tale estensione del teorema utilizzeremo il Teorema 5.13 di dipendenza continua delle soluzioni dai dati iniziali e dal campo vettoriale.

Teorema 6.4 (del confronto (II)) *Sia data $f : \Omega \subseteq \mathbb{R}\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua, Ω aperto, tale che il problema di Cauchy $y' = f(t, y)$, $y(t_0) = y_0$ ammetta un'unica soluzione $y(t)$ nell'intervallo I. Sia $v : J \to \mathbb{R}$, tale che*

$$\begin{cases} v'(t) \leq f(t, v(t)) \\ v(t_0) \leq y_0, \end{cases} \qquad t \in J.$$

Allora $v(t) \leq y(t)$ per ogni $t > t_0$, $t \in I \cap J$.

Dimostrazione Sia K un generico intervallo compatto contenuto in I (nel caso I stesso sia compatto basta prendere $K = I$). Poniamo $f_k(t, y) := f(t, y) + \frac{1}{k}$ e $(t_k, y_k) = (t_0, y_0)$ per $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 1$. Banalmente si ha che $f_k \to f$ uniformemente in Ω per $k \to +\infty$. Detta $y_k(t)$ una soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(t) = f_k(t, y(t)) \\ y(t_0) = y_0, \end{cases}$$

per il Teorema 5.13 esiste $\bar{k}$ tale che per $k \geq \bar{k}$ è possibile definire $y_k(t)$ su tutto K e si ha $y_k \to y$ se $k \to +\infty$ uniformemente su K. Confrontiamo ora v e y_k: si ha $v(t_0) \leq y_0 = y_k(t_0)$ e inoltre

$$v'(t_0) \leq f(t, v(t)) < f(t, v(t)) + \frac{1}{k} = f_k(t, v(t)),$$

quindi v è sottosoluzione stretta di y_k. Applicando il Teorema 6.1 alle funzioni f_k, v e y_k si ottiene che $v(t) < y_k(t)$ per ogni $t \in K \cap J$, $t > t_0$, e $k \geq \bar{k}$. Passando al limite per $k \to +\infty$ si ha $v(t) \leq y(t)$ per ogni $t \in K \cap J$, $t > t_0$ e per l'arbitrarietà di K in I tale disuguaglianza vale in tutto $I \cap J$. $\square$

Osservazione 6.5 Vale un risultato analogo al Teorema 6.4 per soprasoluzioni $u(t)$ tali che

$$\begin{cases} u'(t) \geq f(t, u(t)) \\ u(t_0) \geq y_0, \end{cases} \qquad t \in J,$$

ottenendo come tesi $u(t) \geq y(t)$ per ogni $t > t_0$, $t \in I \cap J$. In maniera del tutto simile si dimostra poi anche una versione in passato.

Osservazione 6.6 Non è possibile estendere ulteriormente il teorema precedente, per esempio togliendo l'ipotesi di unicità delle soluzioni. Infatti, se valesse una tale estensione, considerando un problema di Cauchy senza unicità delle soluzioni (per esempio $y' = 2\sqrt{|y|}$, $y(0) = 0$), e prendendo due soluzioni distinte y_1 e y_2, applicando tale estensione alle funzioni $v = y_1$ (ogni soluzione è sottosoluzione) e $y = y_2$ si otterrebbe $y_1(t) \leq y_2(t)$ per ogni t. Scambiando il ruolo delle funzioni e quindi prendendo $v = y_2$ e $y = y_1$ si otterrebbe anche $y_2(t) \leq y_1(t)$ per ogni t da cui $y_1(t) = y_2(t)$, assurdo. L'estensione del teorema sarebbe falsa anche richiedendo in aggiunta che valesse la disuguaglianza stretta $v(t_0) < y(t_0)$ (trovare per esercizio un controesempio). Si potrebbe invece dimostrare che ogni sottosoluzione $v(t)$ soddisfa $v(t) \leq \overline{y}(t)$ e ogni soprasoluzione $u(t)$ soddisfa $u(t) \geq \underline{y}(t)$ dove $\overline{y}$ e $\underline{y}$ sono, rispettivamente, l'integrale superiore e l'integrale inferiore del problema di Cauchy in oggetto.

Il criterio dell'asintoto

Un ulteriore strumento utile per lo studio qualitativo delle soluzioni delle equazioni differenziali è il criterio dell'asintoto, utilizzato principalmente per studiare il limite, o più in generale il comportamento asintotico, delle soluzioni per $t \to \pm\infty$.

Teorema 6.7 (criterio dell'asintoto) *Sia data $f : [x_0, +\infty[\to \mathbb{R}$ derivabile tale che*

i) il limite $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ esiste finito;

ii) esiste il limite $\lim_{x\to+\infty} f'(x)$.

Allora $\lim_{x\to+\infty} f'(x) = 0$. Un risultato analogo vale per funzioni definite in $]-\infty, x_0]$ per quanto concerne il limite per $x \to -\infty$.

Dimostrazione La dimostrazione segue subito dall'applicazione del Teorema di de l'Hôpital che vale per limiti di forme indeterminate del tipo $[\frac{\text{qualsiasi cosa}}{\infty}]$, applicato al limite $\lim_{x\to+\infty} f(x)/x$. Si ha quindi

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f'(x)}{1} \overset{H}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = 0.$$

Alternativamente si poteva applicare il Teorema di Lagrange a f in ogni intervallo del tipo $[x_n, x_{n+1}]$ dove (x_n) è una successione che diverge a $+\infty$. Prendendo per esempio $x_n = n$, per Lagrange esiste $\xi_n \in]n, n+1[$ tale che

$$f(n+1) - f(n) = f'(\xi_n)((n+1) - n) = f'(\xi_n).$$

Per i) entrambi gli addendi a primo membro tendono al medesimo limite finito e passando al limite per $n \to +\infty$ si ottiene $\lim_{n\to+\infty} f'(\xi_n) = 0$. Poiché per confronto (ξ_n) diverge a $+\infty$ e il limite della derivata prima esiste per ii), per il teorema sui limite mediante successioni si ha $\lim_{x\to+\infty} f'(x) = \lim_{n\to+\infty} f'(\xi_n) = 0$. □

Osservazione 6.8 L'ipotesi i) può essere indebolita chiedendo che f sia solamente limitata in un intorno di $+\infty$ (si può ancora applicare de L'Hôpital).

Osservazione 6.9 Le ipotesi i) e ii) sono indipendenti una dall'altra. Per esempio, la funzione $f(x) = \ln x$ soddisfa $\lim_{x\to+\infty} f'(x) = 0$ ma non esiste il limite $\lim_{x\to+\infty} f(x)$; in questo caso vale dunque ii) ma non vale i). Come secondo esempio si consideri $f(x) = \frac{\operatorname{sen} x^2}{x}$ per la quale $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$ mentre $\lim_{x\to+\infty} f'(x) = \lim_{x\to+\infty} \left(2\cos x^2 - \frac{\operatorname{sen} x^2}{x^2}\right)$ non esiste perché non esiste il limite della funzione coseno all'infinito. In questo caso vale dunque i) ma non ii).

Nel caso delle equazioni differenziali il criterio verrà principalmente utilizzato per *escludere* che il limite di una soluzione per $t \to \pm\infty$ sia finito (si vedano gli esercizi più avanti). Un'altra notevole ma semplice applicazione è data dal seguente risultato al quale premettiamo una definizione.

Definizione 6.10 *Un* equilibrio *per un'equazione differenziale $y' = f(t, y)$ è una soluzione costante sul proprio dominio di definizione.*

Se l'equazione è autonoma cioè $f = f(y)$, $y(t) = \bar{y}$ è un equilibrio se e solo $0 = y'(t) = f(y(t)) = f(\bar{y})$ cioè se e solo se $\bar{y}$ è uno zero del campo vettoriale f. Nel caso non autonomo, invece, $y(t) = \bar{y}$ è un equilibrio definito per $t \in I$ se e solo se $0 = y'(t) = f(t, y(t)) = f(t, \bar{y})$ ovvero $f(t, \bar{y}) = 0$ per ogni $t \in I$.

Corollario 6.11 *Sia data $f : A \to \mathbb{R}^n$ funzione continua, con $A \subseteq \mathbb{R}^n$ aperto. Se $y : [t_0, +\infty[\to \mathbb{R}$ è soluzione dell'equazione $y' = f(y)$ tale che $\lim_{t\to+\infty} y(t) = a \in A$, allora a è un equilibrio del sistema, cioè $f(a) = 0$.*

Dimostrazione Posto $f = (f_1, \ldots, f_n)$, $y = (y_1, \ldots, y_n)$ e inoltre $a = (a_1, \ldots, a_n)$, applichiamo il criterio dell'asintoto a ciascuna componente $y_k(t)$ della soluzione $y(t)$. Si ha che $\lim_{t\to+\infty} y_k(t) = a_k$ e per continuità di f in $a \in A$ vale $\lim_{t\to+\infty} y_k'(t) = \lim_{t\to+\infty} f_k(y(t)) = f_k(a)$. Per il criterio dell'asintoto si ha $f_k(a) = \lim_{t\to+\infty} y_k'(t) = 0$ per ogni $k = 1, \ldots, n$ da cui segue $f(a) = 0$. □

Ogni soluzione di un'equazione differenziale autonoma che sia globalmente definita in futuro ha dunque le seguenti alternative: i) la soluzione

non ammette limite per $t \to +\infty$ (per esempio se è una soluzione periodica); ii) la soluzione esplode in norma; iii) la soluzione converge a un punto della frontiera di A; iv) la soluzione converge a un equilibrio del sistema.

Si noti infine che il corollario precedente vale solo per equazioni autonome. Per esercizio si trovi un controesempio nel caso non autonomo.

Esercizio 6.12 Dimostrare la seguente generalizzazione del Criterio dell'asintoto: data $f : [x_0, +\infty[\to \mathbb{R}$ derivabile e tale che ammette finito il limite per $x \to +\infty$, allora

i) $\liminf_{x\to+\infty} f'(x) \le 0$, e $\limsup_{x\to+\infty} f'(x) \ge 0$;

ii) se f' è continua, l'integrale $\int_{x_0}^{+\infty} f'(s)\, ds$ converge.

Riottenere come corollario il criterio dell'asintoto.

Esempi ed esercizi

Vediamo ora qualche esempio di studio qualitativo delle soluzioni di un'equazione differenziale scalare mediante gli strumenti fin qui introdotti.

Esempio 6.13 Proseguiamo con l'analisi qualitativa delle soluzioni dell'equazione

$$y' = \frac{1}{y^2 + t^2},$$

già cominciata nell'Esercizio 4.18. Studiamo il comportamento asintotico delle soluzioni. Per il punto b) dell'Esercizio 4.18 è sufficiente limitarsi a $t \to +\infty$, il caso $t \to -\infty$ ottenendosi per simmetria. Anzitutto osserviamo che tutte le soluzioni sono monotone crescenti perché il campo vettoriale $f(t, y) = \frac{1}{y^2+t^2}$ è sempre strettamente positivo. Per monotonia, ogni soluzione $y(t)$ con $y(t_0) = y_0$ e $t_0 > 0$ oppure con $y(0) = y_0$ e $y_0 \neq 0$, che è definita (almeno) in $]0, +\infty[$ sempre per l'Esercizio 4.18, ammette limite per $t \to +\infty$, sia esso y_∞, finito oppure $+\infty$. Dimostriamo che il limite è finito. Anzitutto si osservi che il criterio dell'asintoto non dà alcuna informazione essendo in ogni caso $\lim_{t\to+\infty} y'(t) = \lim_{t\to+\infty} \frac{1}{y^2(t)+t^2} = 0$. Utilizziamo allora le informazioni che provengono direttamente dall'andamento del campo vettoriale. Presa una soluzione $y(t)$ con $y(0) = y_0 > 0$, dalla monotonia e integrando l'equazione differenziale tra 0 e $t > 0$ si ottiene

$$y(t) - y_0 = \int_0^t y'(s)\, ds = \int_0^t \frac{1}{y^2(s) + s^2}\, ds \le \int_0^t \frac{1}{y_0^2 + s^2}\, ds = \frac{1}{y_0} \operatorname{arctg} \frac{t}{y_0}.$$

Passando al limite per $t \to +\infty$ in quest'ultima disuguaglianza si ottiene $y_\infty \le y_0 + \pi/(2y_0)$ dunque y_∞ è finito e si anche trovata una sua stima per eccesso. Le soluzioni con $y_0 < 0$ avranno poi una traiettoria limitata dall'alto da una qualsiasi soluzione con dato iniziale positivo, dunque avranno ancora $y_\infty < \infty$. Analogamente, il limite per $t \to -\infty$ sarà anch'esso finito.

Per dimostrare che il limite è finito può anche tornare utile il criterio del confronto. A tal fine, infatti, è sufficiente trovare una soprasoluzione che abbia limite finito e per confronto anche il limite della soluzione lo sarà. La difficoltà sta chiaramente nel trovare (se esiste) una tale soprasoluzione. Motivati dall'analisi precedente, si può provare con un'arcotangente. Più precisamente, dimostriamo che data $y(t)$ soluzione dell'equazione con $y(t_0) = y_0$ e $y_0 > 0$, la funzione $w(t) = \operatorname{arctg}(t - t_0) + w_0$ dove $w_0 = \max\{y_0, 1\}$ è una sua soprasoluzione per $t > t_0$. Infatti, si ha $w(t_0) = w_0 \ge y_0$ e anche

$$\begin{aligned} w'(t) \ge f(t, w(t)) \quad &\iff \quad \frac{1}{1 + (t - t_0)^2} \ge \frac{1}{(\operatorname{arctg}(t - t_0) + w_0)^2 + t^2} \\ &\iff \quad (\operatorname{arctg}(t - t_0) + w_0)^2 + t^2 \ge 1 + (t - t_0)^2 \\ &\iff \quad \operatorname{arctg}^2(t - t_0) + 2w_0 \operatorname{arctg}(t - t_0) + (w_0^2 - 1) + t_0(2t - t_0) \ge 0, \end{aligned}$$

che è verificata per ogni $t \ge t_0$. In definitiva $w(t)$ è soprasoluzione di $y(t)$ per $t > t_0$ e per il Teorema del confronto si ha $y(t) \le w(t)$ per $t > t_0$. Passando al limite si ottiene infine $y_\infty \le \pi/2 + w_0$ che fornisce anche una stima del limite per eccesso. Per esercizio si provi che per ogni (t_0, y_0), $t_0, y_0 > 0$ anche la funzione $w(t) = m_0 \operatorname{arctg}(m_0(t - t_0)) + y_0$, dove $m_0 = (y_0^2 + t_0^2)^{-1/2}$, è soprasoluzione per $t > t_0$ della soluzione $y(t)$ tale che $y(t_0) = y_0$.

Proviamo ora a stimare la differenza $y_\infty - y_0$: la disuguaglianza $y_\infty \le y_0 + \pi/(2y_0)$, trovata sopra, fornisce una buona approssimazione del limite y_∞ quando y_0 è grande, essendo in questo caso $|y_\infty - y_0| \le \pi/(2y_0) \ll 1$. Volendo ottenere delle stime più accurate quando $y_0 \simeq 0$ oppure $y_0 < 0$ si può operare come segue. Si osservi che la funzione $h(y_0) = y_0 + \pi/(2y_0)$ ha un minimo assoluto per $y_0 = \sqrt{\pi/2}$ in $]0, +\infty[$. Se $y_0 \ge \sqrt{\pi/2}$ allora $y_\infty - y_0 \le \pi/(2y_0) < \sqrt{\pi/2}$. Se invece $y_0 < \sqrt{\pi/2}$ si hanno due sottocasi: nel caso in cui $y(t) < \sqrt{\pi/2}$ per ogni $t \ge 0$, si ha $y(t) - y_0 < \sqrt{\pi/2}$ da cui $y_\infty - y_0 \le \sqrt{\pi/2}$. Altrimenti, definitivamente per $t \ge t_1$ si ha $y(t) \ge y(t_1) = \sqrt{\pi/2}$, e integrando tra t_1 e t si trova

$$\begin{aligned} y(t) = y(t_1) + \int_{t_1}^{t} \frac{1}{y^2(s) + s^2}\, ds &\le \sqrt{\pi/2} + \int_{t_1}^{t} \frac{1}{\pi/2 + s^2}\, ds \\ &\le \sqrt{\pi/2} + \int_{0}^{+\infty} \frac{1}{\pi/2 + s^2}\, ds = 2\sqrt{\pi/2} = \sqrt{2\pi}, \end{aligned}$$

da cui si ottiene $y_\infty - y_0 \le y_\infty \le \sqrt{2\pi}$. Sia ora $y_0 < 0$; se inoltre $y_0 \ge -\sqrt{2\pi}$ si ha che il limite y_∞ è sicuramente inferiore a quello relativo a $y_0 = 0^+$ che è maggiorato da $\sqrt{2\pi}$. Si ottiene allora $y_\infty - y_0 \le \sqrt{2\pi} + \sqrt{2\pi} = 2\sqrt{2\pi}$. Infine, se $y_0 < -\sqrt{2\pi}$ allora per tutti i t per cui $y(t) \le y_0/2$ si ottiene

$$y(t) \le y_0 + \int_0^t \frac{1}{(y_0/2)^2 + s^2}\, ds < y_0 + \frac{\pi}{2|y_0/2|} = y_0 - \frac{\pi}{y_0}.$$

Per $y_0 < -\sqrt{2\pi}$ si ha $y_0 - \pi/y_0 < y_0/2$, dunque $y(t) \le y_0/2$ per ogni $t \ge 0$ e vale la stima sopra per gli stessi t da cui anche $y_\infty - y_0 \le \pi/|y_0| \le \sqrt{\pi/2}$. Per simmetria si ottengono analoghe stime per $y_{-\infty} := \lim_{t\to-\infty} y(t)$. In particolare, indipendentemente da y_0 si ha che $y_\infty - y_{-\infty} \le 3\sqrt{2\pi}$ (al variare di y_0 si può essere più precisi), dunque ogni traiettorie è contenuta in una striscia del piano di ampiezza al più $3\sqrt{2\pi}$.

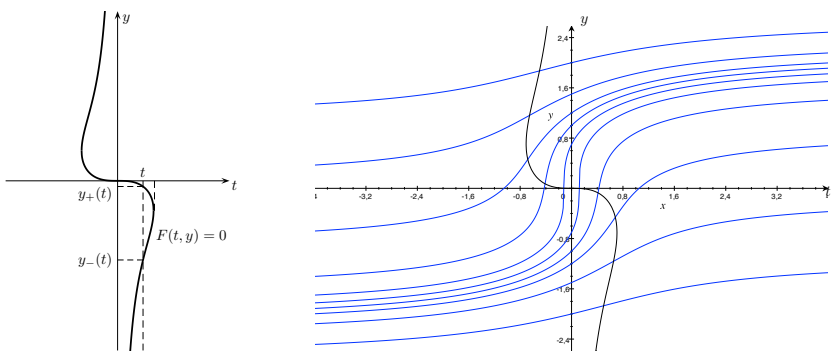


Figura 6.1: La cubica $F(t, y) = 0$ e l'andamento delle soluzioni

Procediamo con l'analisi studiando la concavità/convessità delle soluzioni. Poiché il campo vettoriale è C^∞, tali saranno anche le soluzioni; derivando ulteriormente l'equazione si ottiene

$$y''(t) = \left(\frac{1}{y^2(t) + t^2}\right)' = -\frac{2y(t)y'(t) + 2t}{(y^2(t) + t^2)^2} = -2\big[y'(t)\big]^2\big(y(t)y'(t) + t\big),$$

quindi $y''(t) \le 0$ se e solo se $y(t)y'(t) + t \ge 0$ e ricordandosi dell'equazione ciò equivale a $\frac{y(t)}{y^2(t)+t^2} + t \ge 0$ cioè a $ty^2(t) + y(t) + t^3 \ge 0$. L'equazione $F(t, y) := ty^2 + y + t^3 = 0$ rappresenta una cubica nel piano $t - y$, ed essendo $F(-t, -y) = F(t, y)$ è simmetrica rispetto all'origine. Studiamola per $t \ge 0$, osservando che F come funzione di y è un polinomio di secondo grado. Se $\Delta = 1 - 4t^4 < 0$, l'equazione $F(t, y) = 0$ nell'incognita y non ha dunque soluzione; ciò accade se $t > t_M := 1/\sqrt[4]{4} = 1/\sqrt{2}$. La cubica è dunque tutta

contenuta nella striscia di piano $[-t_M, t_M] \times \mathbb{R}$. Per $t \in [0, t_M]$ l'equazione $F(t, y) = 0$ nell'incognita y ha due soluzioni $y_-(t)$ e $y_+(t)$, entrambe negative per la regola dei segni di Cartesio, e coincidenti se $t = t_M$. In particolare, si ha $F(t, y) \geq 0$ se e solo se $y \leq y_-(t)$ oppure $y \geq y_+(t)$. Se ne deduce che nel semipiano $t > 0$ si ha $y''(t) = 0$ lungo la cubica, e $y''(t) < 0$, cioè la relativa soluzione è concava, nell'insieme

$$C := \{(t, y) : \ t > t_M\} \cup \{(t, y) : \ 0 \leq t \leq t_M, \, y < y_-(t) \text{ o } y > y_+(t)\}.$$

Per simmetria si ottiene poi l'andamento della convessità anche nel semipiano $t < 0$. Il profilo qualitativo delle cubica F e delle soluzioni è delineato in Figura 6.1.

Concludiamo l'analisi dimostrando che esistono soluzioni non globalmente definite; in tal caso, per il Teorema della fuga dai compatti non potrà che essere $(t, y(t)) \to (0, 0)$. L'esistenza di tali soluzioni deriva da un argomento di continuità delle soluzioni dai dati iniziali. L'idea è la seguente: detti $t_0 = 0$, $t_1 = 1$ e preso $y_0^+ > 0$, per esempio $y_0^+ = 1$, poniamo $y_1^+ = y(t_1; t_0, y_0^+)$. Preso poi $y_0^- < 0$, per esempio $y_0^- = -1$ sia $y_1^- = y(t_1; t_0, y_0^-)$. Consideriamo ora le soluzioni passanti per il generico punto dell'intervallo $[y_1^-, y_1^+]$ all'istante $t_1 = 1$. Per quanto già visto tutte queste soluzioni sono definite almeno in $]0, +\infty[$. Inoltre, per costruzione le due soluzioni passanti per $y_1^\pm$ sono definite anche in $t_0 = 0$ valendo $y_0^\pm$. Se tutte le soluzioni considerate fossero definite anche in $t = 0$, allora l'immagine dell'intervallo $[y_1^-, y_1^+]$ mediante l'applicazione continua $y_1 \mapsto y(0; t_1, y_1)$ sarebbe necessariamente l'intervallo $[y_0^-, y_0^+]$. In particolare dovrebbe esistere una soluzione passante per $(0, 0)$, assurdo perché tale punto non appartiene al dominio di definizione. Ne consegue che deve esistere almeno una soluzione che non può essere definita in $t_0 = 0$.

Esercizio 6.14 Data l'equazione

$$y' = g(t, y) \operatorname{sen}^2 y$$

con $g \in C^1(\mathbb{R})$, $g(t, y) > 0$,

a) studiare l'esistenza e l'unicità locale per i problemi di Cauchy associati. Valgono le ipotesi dei teoremi di esistenza globale?

b) Trovare le soluzioni costanti (equilibri);

c) provare che le soluzioni massimali sono globalmente definite in $\mathbb{R}$ e che sono limitate;

d) dimostrare che se $y(t)$ è soluzione massimale esistono finiti i limiti $\lim_{t\to\pm\infty} y(t)$;

e) supposto che inoltre esistano $\tau, m > 0$ tali che $g(t,y) \geq m$ per ogni $|t| \geq \tau$, detta $y(t)$ la soluzione massimale del problema di Cauchy tale che $y(0) = \pi/2$ si calcolino tali limiti;

f) è ancora vero il risultato di e) se non esiste una limitazione inferiore positiva su g?

g) Supposto $g = g(t)$ si trovino condizioni necessarie e sufficienti su g affinché la soluzione con $y(0) = \pi/2$ abbia gli stessi limiti trovati in e).

Soluzione. a) Per ipotesi il campo vettoriale $f(t,y) = g(t,y)\operatorname{sen}^2 y$ è di classe $C^1(\mathbb{R}^2)$ dunque c'è esistenza e unicità locale per tutti i problemi di Cauchy. Poiché non si conosce il comportamento di $g(t,y)$ per $|y| \to +\infty$, né la sua derivata parziale rispetto a y, non è possibile applicare i teoremi di esistenza globale.

b) Si ha $f(t,y) = 0$ se e solo se $\operatorname{sen} y = 0$ cioè $y = \bar{y}_k := k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, che sono quindi le soluzioni costanti (equilibri) dell'equazione.

c) Sia $y(t_0) = y_0$; se $y_0 = \bar{y}_k$ per qualche $k \in \mathbb{Z}$, per unicità la relativa soluzione $y(t)$ coincide con l'equilibrio $\bar{y}_k$ per ogni t ed è globalmente definita. Altrimenti esiste $k \in \mathbb{Z}$ tale che $k\pi < y_0 < (k+1)\pi$. Poiché per unicità le traiettorie non si intersecano, si avrà $k\pi < y(t) < (k+1)\pi$ per ogni t di definizione. Avendo l'orbita contenuta (in futuro e passato) nel compatto $[k\pi, (k+1)\pi]$, per il Teorema 4.1 $y(t)$ è globalmente definita in $\mathbb{R}$ e limitata.

d) Se $y(t)$ è una soluzione massimale differente da un equilibrio (per i quali la tesi è banale), per il punto precedente ha l'orbita sempre strettamente contenuta tra due di essi, per cui vale $y'(t) = f(t, y(t)) > 0$ per ogni t. Dunque $y(t)$ è strettamente crescente e per monotonia esistono i limiti richiesti;

e) Per i punti c)-d) si avrà $0 < y(t) < \pi$ e $y(t)$ crescente per ogni $t \in \mathbb{R}$. Dimostriamo che allora $\lim_{t\to+\infty} y(t) = \pi$; analogamente si può dimostrare che $\lim_{t\to-\infty} y(t) = 0$. Posto $\lim_{t\to+\infty} y(t) = y_\infty$, per assurdo sia $y_\infty < \pi$. Allora si ha $\pi/2 = y_0 \leq y(t) < y_\infty < \pi$ per ogni $t \geq t_0$ da cui $\operatorname{sen}^2 y(t) > \operatorname{sen}^2 y_\infty > 0$. Per ogni $t \geq \tau$ si avrà quindi $y'(t) > m \operatorname{sen}^2 y_\infty$ e integrando

$$y(t) - y(\tau) = \int_\tau^t y'(s)\, ds > \int_\tau^t m \operatorname{sen}^2 y_\infty \, ds = (t-\tau) m \operatorname{sen}^2 y_\infty,$$

con il membro destro che tende all'infinito se $t \to +\infty$ da cui l'assurdo perché $y(t)$ è limitata. Analogamente si può dimostrare che se $y_0 \in]\bar{y}_k, \bar{y}_{k+1}[$ allora

la relativa soluzione $y(t)$ verifica $\lim_{t\to+\infty} y(t) = \bar{y}_{k+1}$ e $\lim_{t\to-\infty} y(t) = \bar{y}_k$. L'andamento globale delle soluzioni è delineato in Figura 6.2.

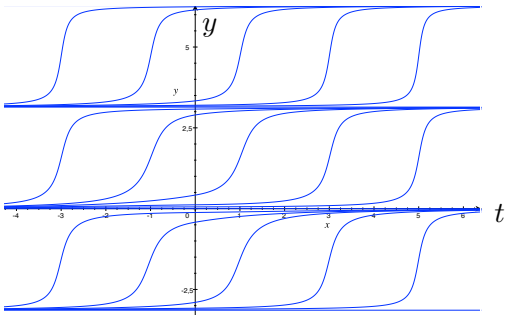


Figura 6.2: Quadro globale delle soluzioni

f)-g) Se $\inf g = 0$ non è detto che che la soluzione tenda verso gli equilibri. Per esempio, supposta $g = g(t)$ l'equazione è a variabili separabili e integrando si ottiene

$$\int_{\pi/2}^{y(t)} \frac{1}{\operatorname{sen}^2 z}\, dz = \int_0^t g(s)\, ds \qquad \Longrightarrow \qquad -\operatorname{ctg} y(t) = G(t)$$

cioè $y(t) = \operatorname{arcotg}(-G(t))$, dove $G(t)$ è la primitiva di g tale che $G(0) = 0$. Se ne deduce che si ha $\lim_{t\to+\infty} y(t) = \pi$ se e solo se $\lim_{t\to+\infty} G(t) = +\infty$; analogamente $\lim_{t\to-\infty} y(t) = 0$ se e solo se $\lim_{t\to-\infty} G(t) = -\infty$. In definitiva, condizione necessaria e sufficiente affinché valga e) è che g abbia integrale divergente a $\pm\infty$. Per ottenere un controesempio in f) basta allora trovare una funzione positiva g con limite 0 per $t \to \pm\infty$ (tale che non valga l'ipotesi in e)) e con integrale convergente; per esempio $g(t) = \frac{1}{1+t^2}$, con integrale $\int_0^{+\infty} g(s)\, ds = \pi/2$. La soluzione $y(t)$ del problema di Cauchy $y' = \frac{1}{1+t^2} \operatorname{sen}^2 y$, $y(0) = \pi/2$ soddisferà $\lim_{t\to+\infty} y(t) = \operatorname{arcotg}(-\pi/2) < \pi$.

Esercizio 6.15 Dato il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = \mathrm{e}^{y^2} - \mathrm{e}^{t^2} \\ y(0) = 0, \end{cases}$$

a) studiare l'esistenza e l'unicità locale. Valgono le ipotesi dei teoremi di esistenza globale?

b) Verificare che se $y(t)$ è soluzione dell'equazione in $]\alpha, \beta[$ allora anche $z(t) := -y(-t)$ è soluzione in $]-\beta, -\alpha[$. Ricavare da questo fatto che la soluzione del problema di Cauchy è una funzione dispari;

c) studiare le regioni del piano $t - y$ dove le soluzioni dell'equazione differenziale sono crescenti e dove sono decrescenti;

d) dimostrare che la soluzione $y(t)$ del problema di Cauchy è globalmente definita in $\mathbb{R}$ (utilizzare opportune sopra e sottosoluzioni);

e) studiare l'esistenza e l'eventuale valore dei limiti $\lim_{t\to\pm\infty} y(t)$;

f) provare che esistono soluzioni dell'equazione che tendono a $+\infty$ in futuro;

g) esistono soluzioni dell'equazione non globalmente definite in futuro? Cosa succede eventualmente del loro limite per $t \to \beta^-$? Esistono soluzioni non globalmente definite sia in passato che in futuro?

h) Dimostrare che tutte le soluzioni $y(t)$ superlineari tali che $y(t) \geq mt$ definitivamente per $t \geq t_m$, con $m > 1$, esplodono in tempo finito.

Soluzione. a) Il campo vettoriale $f(t, y) = \mathrm{e}^{y^2} - \mathrm{e}^{t^2}$ appartiene a $C^\infty(\mathbb{R}^2)$ dunque ci sono esistenza e unicità locale per tutti i problemi di Cauchy, in particolare per quello in considerazione. A causa del termine e^{y^2} il campo vettoriale non è sublineare né globalmente lipschitziano, quindi non si possono applicare i vari teoremi di esistenza globale.

b) Supposto che $y(t)$ sia soluzione si ha

$$z'(t) = y'(-t) = \mathrm{e}^{y^2(-t)} - \mathrm{e}^{(-t)^2} = \mathrm{e}^{z^2(t)} - \mathrm{e}^{t^2} = f(t, z(t)),$$

quindi $z(t)$ è soluzione dell'equazione differenziale. Se in più vale $y(0) = 0$ si ha anche $z(0) = -y(0) = 0$, perciò sia $y(t)$ che $z(t)$ sono soluzioni del medesimo problema di Cauchy con dati $(t_0, y_0) = (0, 0)$. Per unicità si ha $y(t) = z(t) = -y(-t)$ su un intervallo comune di esistenza (che deve allora necessariamente contenere l'origine ed essere simmetrico rispetto a essa) dunque y è funzione dispari.

c) Essendo $y'(t) = f(t, y(t))$, tali regioni si trovano studiando il segno del campo vettoriale f: dove esso è positivo le soluzioni saranno crescenti, dove negativo decrescenti. Si ha $f(t, y) \geq 0$ se e solo se $\mathrm{e}^{y^2} \geq \mathrm{e}^{t^2}$ ovvero $y^2 \geq t^2$ cioè $|y| \geq |t|$; in particolare il campo vettoriale si annulla lungo le rette di equazione $y = t$ e $y = -t$.

d) Prendendo $u(t) = t$ si ha $u'(t) = 1 > 0 = f(t, u(t))$, dunque $u(t)$ è soprasoluzione in futuro; analogamente, presa $w(t) = -t$ si ha $w'(t) = -1 < 0 = f(t, w(t))$ e w è sottosoluzione. Detta $y(t) :]-\beta, \beta[\to \mathbb{R}$ la soluzione del problema di Cauchy, poiché inoltre $w(0) = y(0) = u(0) = 0$, w e u

sono, rispettivamente, sotto e soprasoluzione (strette) di y per $t > 0$. Per il Teorema 6.1 (si può anche applicare il Teorema 6.4) vale $-t = w(t) < y(t) < u(t) = t$ per ogni $t \in]0, \beta[$. In particolare si ha $|y(t)| \leq t$ e per il Teorema 4.5 la soluzione è globalmente definita in futuro, cioè $\beta = +\infty$. Grazie al punto b) la soluzione è anche globalmente definita in passato.

e) Per il punto b) è sufficiente studiare il limite per $t \to +\infty$. Nel punto d) si è provato che $|y(t)| < t$ per $t > 0$, dunque $(t, y(t))$ appartiene alla regione di piano dove f è negativa. Ciò implica che $y'(t) = f(t, y(t)) < 0$, perciò $y(t)$ è decrescente e per monotonia ammette limite per $t \to +\infty$, sia esso y_∞. Se fosse $y_\infty \in \mathbb{R}$ si avrebbe

$$\lim_{t\to+\infty} y'(t) = \lim_{t\to+\infty} \left(\mathrm{e}^{y^2(t)} - \mathrm{e}^{t^2}\right) = -\infty,$$

contro il criterio dell'asintoto. Allora necessariamente $y_\infty = -\infty$. Si potrebbe anche dimostrare che ogni soluzione che entra definitivamente in futuro nella regione $|y| \leq t$ è asintotica alla retta $y = -t$. La traiettoria della soluzione è descritta dalla linea blu in a) della Figura 6.3.

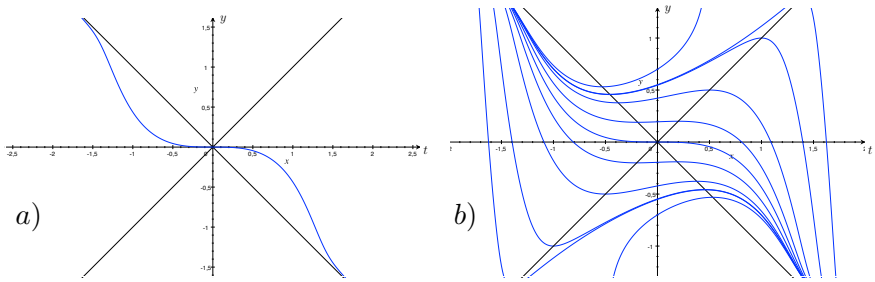


Figura 6.3: a) Traiettoria della soluzione del problema di Cauchy; b) andamento generale delle soluzioni

f) Basta provare che esistono soluzioni $y(t)$ che stanno sempre sopra la retta $y = t$. Purtroppo tale funzione non è sottosoluzione (anzi è soprasoluzione!) perciò non è immediato verificare che vale $y(t) \geq t$. Conviene invece dimostrare che esistono sottosoluzioni della forma $v(t) = mt$ con $m > 1$. A tal fine dovrà essere

$$v'(t) \leq f(t, v(t)) \qquad \Longleftrightarrow \qquad m \leq \mathrm{e}^{m^2t^2} - \mathrm{e}^{t^2}.$$

Essendo $\lim_{t\to+\infty}(\mathrm{e}^{m^2t^2} - \mathrm{e}^{t^2}) = +\infty$ si ha $\mathrm{e}^{m^2t^2} - \mathrm{e}^{t^2} \geq m$ definitivamente per $t \geq t_m$ per qualche t_m. Detta $y(t)$ la soluzione di $y' = \mathrm{e}^{y^2} - \mathrm{e}^{t^2}$ tale che $y(t_m) = v(t_m) = mt_m$, si ha che $v(t)$ è una sottosoluzione di $y(t)$ in futuro

per $t > t_m$. Per il Teorema 6.4 vale $y(t) \geq v(t)$ per ogni $t \geq t_m$ per i quali $y(t)$ è definita. Se y non è globalmente definita in futuro per il Teorema dell'esplosione in norma dovrà esplodere (a $+\infty$) in tempo finito; altrimenti, se $y(t)$ è globalmente definita in futuro si ha comunque

$$\lim_{t\to+\infty} y(t) \geq \lim_{t\to+\infty} v(t) = +\infty.$$

g) Anzitutto, come già osservato in f) è chiaro che se una soluzione non è globalmente definita dovrà tendere a $+\infty$ o a $-\infty$. Essendo $\mathrm{e}^{y^2} > y^2$ si ha che $y'(t) > y^2(t) - \mathrm{e}^{t^2}$ e poiché l'equazione $y' = y^2$ ha soluzioni che esplodono in tempo finito, a maggior ragione ci si aspetta questo comportamento anche per (alcune) soluzioni dell'equazione in oggetto. Per dimostrare che esistono effettivamente soluzioni non globalmente definite si può cercare una sottosoluzione dell'equazione che esplode in tempo finito; per esempio una funzione del tipo $z(t) = \frac{1}{\tau - t}$ con $\tau > 0$ fissato, che esplode per $t \to \tau^-$. Affinché $z(t)$ sia sottosoluzione in un intorno sinistro di τ dovrà ivi valere $z'(t) \leq f(t, z(t))$, e osservando che $z'(t) = z^2(t)$ tale equazione equivale a

$$z^2(t) \leq \mathrm{e}^{z^2(t)} - \mathrm{e}^{t^2} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \mathrm{e}^{z^2(t)} \geq z^2(t) + \mathrm{e}^{t^2}.$$

Essendo $\mathrm{e}^{t^2} < \mathrm{e}^{\tau^2}$ per $0 < t < \tau$ basta dimostrare che vale $\mathrm{e}^{z^2(t)} \geq z^2(t) + \mathrm{e}^{\tau^2}$. Poiché $\lim_{t\to\tau^-} z(t) = +\infty$ è chiaro che una tale disequazione è definitivamente verificata in un intorno sinistro di τ, diciamolo $[t_0, \tau[$ con $t_0 < \tau$. In tale intervallo $z(t)$ è sottosoluzione; in particolare, detta $y(t)$ la soluzione dell'equazione $y' = \mathrm{e}^{y^2} - \mathrm{e}^{t^2}$ tale che $y(t_0) = z(t_0)$, si ha che $z(t)$ è una sottosoluzione di $y(t)$ nell'intervallo $[t_0, \tau[$ dunque, per il Teorema 6.4, vale $y(t) \geq z(t)$ per ogni $t \in [t_0, \tau[$ di definizione di y. Da ciò segue facilmente che o $y(t)$ non è definita fino a τ, e dunque esplode a $+\infty$ per $t \to \beta^-$ con $\beta < \tau$, oppure $\lim_{t\to\tau^-} y(t) = +\infty$ per confronto. Il quadro globale delle traiettorie delle soluzioni è delineato in b) della Figura 6.3.

Infine, non esistono soluzioni che non siano contemporaneamente globalmente definite sia in futuro che in passato. Infatti, per unicità ogni soluzione dovrà stare o sempre sopra o sempre sotto la soluzione $y(t)$ del problema di Cauchy in oggetto. Se una tale soluzione $\bar{y}(t)$ esistesse dovrebbe allora soddisfare $\lim_{t\to\alpha^+} \bar{y}(t) = \lim_{t\to\beta^-} \bar{y}(t) = +\infty$ oppure $\lim_{t\to\alpha^+} \bar{y}(t) = \lim_{t\to\beta^-} \bar{y}(t) = -\infty$, ma ciò non è possibile perché tutte le soluzioni che stanno sopra $y(t)$ non possono esplodere a $+\infty$ in tempo finito per $t \to \alpha^+$, né a $-\infty$ per $t \to \beta^-$, e analogamente per quelle che stanno sempre sotto.

h) Sia $y :]\alpha, \beta[\to \mathbb{R}$ tale che $y(t) \geq mt$ per ogni $t_m < t < \beta$, con $m > 1$, dove si può anche supporre $t_m > 0$. Allora

$$\begin{aligned} y'(t) = \mathrm{e}^{y^2(t)} - \mathrm{e}^{t^2} &= \mathrm{e}^{y^2(t)}(1 - \mathrm{e}^{t^2 - y^2(t)}) \\ &\geq \mathrm{e}^{y^2(t)}(1 - \mathrm{e}^{(1-m^2)t^2}) \geq \mathrm{e}^{y^2(t)}(1 - \mathrm{e}^{(1-m^2)t_m^2}). \end{aligned}$$

Allora $y(t)$ è soprasoluzione relativa all'equazione $z' = c_m \mathrm{e}^{z^2}$, con $c_m = 1 - \mathrm{e}^{(1-m^2)t_m^2} > 0$, la quale ha tutte le soluzioni che esplodono in tempo finito in futuro (verificarlo per esercizio), dunque $\beta < +\infty$.

Esercizio 6.16 Data l'equazione di ordine due

$$y'' = \mathrm{e}^y y'$$

a) verificare che le costanti sono soluzioni e che quelle non costanti sono strettamente monotone;

b) trovare la soluzione massimale tale che $y(0) = 0$, $y'(0) = v$ con $v > 1$.

Soluzione. a) Poiché il campo vettoriale è C^∞ ci sono esistenza e unicità globale per i relativi problemi di Cauchy. La verifica che le costanti sono soluzioni è banale. Fissato poi un dato di Cauchy $(y(0), y'(0)) = (y_0, y_0')$ se $y_0' = 0$ l'unica soluzione è $\bar{y}(t) = y_0$; se $y_0' \neq 0$ allora la derivata della soluzione $\bar{y}(t)$ non può mai annullarsi. Se fosse infatti $\bar{y}'(\tau) = 0$ per qualche τ, poiché l'equazione è autonoma $\bar{y}(t)$ sarebbe anche soluzione del problema di Cauchy con dati $y(\tau) = \bar{y}(\tau)$, $y'(\tau) = 0$, ma tale soluzione è identicamente uguale a $\bar{y}(\tau)$ da cui $\bar{y}' \equiv 0$, assurdo. Allora la derivata di $\bar{y}(t)$ non si annulla mai e per continuità ha segno costante dunque $\bar{y}(t)$ è strettamente monotona.

b) Tenendo conto che $y(0) = 0$ e $y'(0) = v$, integrando si ottiene

$$\int_0^t y''(s)\, ds = \int_0^t \mathrm{e}^{y(s)} y'(s)\, ds \qquad \Longrightarrow \qquad y'(t) - v = \mathrm{e}^{y(t)} - 1,$$

equazione a variabili separabili. Separando le variabili si ottiene

$$\int_0^{y(t)} \frac{1}{v - 1 + \mathrm{e}^z}\, dz = \int_0^t ds = t.$$

Mediante la sostituzione $w = \mathrm{e}^{-z}$ e tenendo conto che $v > 1$ si ha

$$\begin{aligned} \int_0^{y(t)} \frac{1}{v - 1 + \mathrm{e}^z}\, dz &= \int_0^{y(t)} \frac{\mathrm{e}^{-z}}{(v-1)\mathrm{e}^{-z} + 1}\, dz = -\int_1^{\mathrm{e}^{-y(t)}} \frac{1}{(v-1)w + 1}\, dw \\ &= -\Big[\frac{\ln|(v-1)w + 1|}{v - 1}\Big]_1^{\mathrm{e}^{-y(t)}} = \frac{1}{1 - v} \ln \frac{(v-1)\mathrm{e}^{-y(t)} + 1}{v}. \end{aligned}$$

Si ottiene quindi l'equazione

$$\frac{1}{1-v}\ln\frac{(v-1)\mathrm{e}^{-y(t)}+1}{v}=t$$

che risolta in $y(t)$ fornisce la soluzione

$$y(t)=\ln\frac{v-1}{v\mathrm{e}^{(1-v)t}-1}.$$

Si osservi che $y(t)$ è definita in $]\alpha,\beta[=]-\infty,\frac{\ln v}{v-1}[$ e che $\lim_{t\to\beta^-}y(t)=+\infty$ cioè la soluzione esplode in tempo finito in futuro, il che doveva essere aspettato poiché il campo vettoriale ha un andamento esponenziale in y (e lineare in y') per $y\to+\infty$ e la velocità iniziale è positiva.

Esercizio 6.17 Sia $y(t)$ la soluzione del problema di Cauchy $y'=\sqrt{|y+t|}$, $y(0)=0$ (si veda anche l'Esercizio 4.20). Studiare l'esistenza e l'eventuale valore dei limiti $\lim_{t\to+\infty}y(t)$, $\lim_{t\to+\infty}y(t)/t$ e dimostrare che $y(t)$ è asintotica a $t^2/4$ per $t\to+\infty$.

Soluzione. La soluzione $y(t)$ è crescente, perciò per monotonia esiste il limite $\lim_{t\to+\infty}y(t)\in]0,+\infty]$. Essendo in ogni caso $\lim_{t\to+\infty}y'(t)=\lim_{t\to+\infty}\sqrt{|y(t)+t|}=+\infty$, per il criterio dell'asintoto non può che essere $\lim_{t\to+\infty}y(t)=+\infty$. Per il Teorema di de-L'Hôpital segue subito che $\lim_{t\to+\infty}y(t)/t\overset{H}{=}\lim_{t\to+\infty}y'(t)=+\infty$. Per $t>0$ la soluzione è positiva e di classe C^∞; derivando l'equazione si ricava quindi

$$y''(t)=\frac{y'(t)+1}{2\sqrt{y(t)+t}}=\frac{\sqrt{y(t)+t}+1}{2\sqrt{y(t)+t}}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2\sqrt{y(t)+t}}.$$

Sempre per il Teorema di de-L'Hôpital si ottiene allora

$$\lim_{t\to+\infty}\frac{y(t)}{t^2}\overset{H}{=}\lim_{t\to+\infty}\frac{y'(t)}{2t}\overset{H}{=}\lim_{t\to+\infty}\frac{y''(t)}{2}=\lim_{t\to+\infty}\Big(\frac{1}{4}+\frac{1}{4\sqrt{y(t)+t}}\Big)=\frac{1}{4},$$

da cui segue che $y(t)$ è asintotica a $t^2/4$ per $t\to+\infty$. L'analisi della soluzione terminerà nell'Esercizio 12.1.

Esercizio 6.18 Nelle notazioni di p. 40, data per nota l'esistenza dell'integrale superiore e dell'integrale inferiore di $y'=f(t,y)$, $y(t_0)=y_0$, si dimostri che per ogni $t^*>t_0$ e ogni y^* tale che $\underline{y}(t^*)\le y^*\le\overline{y}(t^*)$ esiste almeno una soluzione $y(t)$ del problema di Cauchy tale che $y(t^*)=y^*$.

Esercizio 6.19 Sia data l'equazione $y' = f(y)$ dove $f \in C^1(\mathbb{R})$ è non negativa e crescente.

a) Dimostrare che ogni soluzione dell'equazione è definita globalmente in passato. (Suggerimento: trovare un'opportuna funzione lineare/affine che sia sottosoluzione.)

b) È ancora vero il punto a) nel caso in cui f è crescente ma di segno variabile? E se è non negativa e non crescente?

Esercizio 6.20 Dimostrare la seguente generalizzazione del Lemma di Gronwall: sia $v : I \to \mathbb{R}$ continua per la quale esistono $\alpha \geq 0$, $t_0 \in I$ e una funzione continua $h = h(t, v) : I \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ localmente lipschitziana e crescente in v, tali che

$$v(t) \leq \alpha + \int_{t_0}^{t} h(s, v(s))\, ds \quad \text{per } t \geq t_0.$$

a) Dimostrare che $v(t) \leq y(t)$ per $t \geq t_0$, dove $y(t)$ è la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = h(t, y) \\ y(t_0) = \alpha. \end{cases} \tag{6.1}$$

b) Supposto che h non sia localmente lipschitziana, è ancora vero il punto a) prendendo come $y(t)$ una qualsiasi soluzione di (6.1)? In caso negativo fornire un controesempio e provare a suggerire qualche ipotesi da aggiungere affinché il risultato continui a essere vero.

Esercizio 6.21 È noto che se l'orbita di un sistema planare autonomo con campo vettoriale di classe C^1 è contenuta in una curva chiusa semplice priva di punti di equilibrio allora l'orbita è periodica. È ancora vero se il sistema non è autonomo? In caso affermativo provarlo, altrimenti fornire un controesempio.

Analisi di un sistema di Lotka-Volterra: caso dell'estinzione

Si consideri il seguente sistema nel piano

$$\begin{cases} x' = x(1 - x - y) \\ y' = y(1 - 2x - 2y), \end{cases} \tag{6.2}$$

caso particolare di una classe più generale di sistemi, detti *sistemi di Lotka-Volterra* del tipo

$$\begin{cases} x' = b_1 x + c_1 y + x(a_{11}x + a_{12}y) \\ y' = c_2 x + b_2 y + y(a_{21}x + a_{22}y), \end{cases} \tag{6.3}$$

che modellano l'evoluzione di due popolazioni omogenee, di cui x e y rappresentano il numero di individui o la loro densità, che coabitano il medesimo ambiente. A seconda del segno dei coefficienti b_i, c_i e a_{ij}, questi sistemi permettono di modellare situazioni di cooperazione o competizione tra le due specie, oppure situazioni di tipo preda-predatore nelle quali una specie si ciba dell'altra. Il caso in oggetto e in generale i sistemi

$$\begin{cases} x' = x(b_1 - a_{11}x - a_{12}y) \\ y' = y(b_2 - a_{21}x - a_{22}y), \end{cases} \tag{6.4}$$

con b_i, a_{ij} non negativi, trattano il caso della *competizione* tra le due specie. I numeri a_{ij}, $i \neq j$, si dicono *coefficienti di competizione interspecifica* e vogliono rappresentare la diminuzione del tasso di crescita di una popolazione dovuta alla presenza dell'altra, mentre a_{ii} si dicono *coefficienti di competizione intraspecifica* e tengono conto della competizione per il cibo tra individui della stessa specie. Infine i coefficienti b_i rappresentano il tasso di crescita che ciascuna delle due specie avrebbe in assenza dell'altra specie e in assenza di competizione (ciò è plausibile finché le risorse disponibili sono di gran lunga superiori al fabbisogno globale della popolazione).

Vogliamo ora studiare qualitativamente il comportamento delle soluzioni di (6.2). Anzitutto, vista l'interpretazione di x, y, ci limiteremo a studiare il sistema nel primo quadrante $\mathcal{D} := \{(x, y) : \ x, y \geq 0\}$. Il campo vettoriale $f(x, y) = (x(1-x-y), y(1-2x-2y))$ è autonomo e di classe C^∞ in $\mathcal{D}$ (anzi in tutto $\mathbb{R}^2$), dunque ci sono esistenza e unicità locale delle soluzioni dei problemi di Cauchy associati. A causa dei termini x^2, xy e y^2, f ha crescita quadratica, dunque non si possono applicare i teoremi di esistenza globale 4.12 e 4.13. In virtù del Corollario 6.11, gli equilibri di un sistema autonomo hanno un ampio rilievo perché concorrono alla descrizione del possibile comportamento asintotico delle soluzioni, di notevole importanza nella descrizione dell'evoluzione di sistemi biologici quali quello in considerazione. Ricordando che gli equilibri sono soluzioni dell'equazione $f(x, y) = 0$, se ne ottengono tre e precisamente $E_1 = (0, 0)$, $E_2 = (1, 0)$ e $E_3 = (0, 1/2)$. In relazione a ciascun equilibrio assume particolare rilevanza la sua *stabilità* (in questo caso, stabilità in futuro). Non entreremo qui nel dettaglio delle

definizioni, argomento di corsi più avanzati, ma ci limiteremo a fornire le idee di base. Essenzialmente, un equilibrio y_0 di un'equazione differenziale $y' = f(t, y)$ si dice

STABILE: se le orbite che partono da punti vicini a y_0 rimangono per sempre vicine a y_0;

ASINTOTICAMENTE STABILE: se oltre a essere stabili, le orbite che partono da punti vicini a y_0 tendono a y_0;

INSTABILE: se esistono orbite che partono da punti arbitrariamente vicini a y_0 e si allontanano da y_0.

Lo studio della stabilità degli equilibri di un sistema non lineare, quale quello in oggetto, è *localmente* ricondotto a quello di un opportuno sistema lineare. Per dare un'idea, supponiamo che y_0 sia equilibrio del sistema autonomo $y' = f(y)$ con f di classe C^1; è allora possibile sviluppare f mediante il polinomio di Taylor in y_0 ottenendo $f(y) = f(y_0)+Df(y_0)(y-y_0)+o(y-y_0)$ dove $o(y-y_0)$ è una funzione tale che $\lim_{y\to y_0} \frac{o(y-y_0)}{\|y-y_0\|} = 0$. Essendo $f(y_0) = 0$ si ha quindi che

$$y' = f(y) \qquad \Longleftrightarrow \qquad y' = Df(y_0)(y - y_0) + o(y - y_0).$$

Se $\|y - y_0\|$ è piccola, cioè localmente vicino a y_0, il termine $o(y - y_0)$ è in generale trascurabile rispetto a $Df(y_0)(y - y_0)$ (ciò accade, per esempio, se $Df(y_0)$ è non singolare); per il Lemma 5.11 e il Teorema 5.12 le soluzioni dell'equazione $y' = f(y)$ possono essere approssimate, localmente vicino a y_0 e per intervalli di tempo limitati, dalle soluzioni di $y' = Df(y_0)(y - y_0)$. Operando la trasformazione $z = y - y_0$ quest'ultimo si può scrivere come $z' = Df(y_0)z$ ed è un sistema lineare a coefficienti costanti, detto *sistema linearizzato nel punto di equilibrio* y_0 (per i sistemi lineari a coefficienti costanti si veda la sezione dedicata nel Capitolo 9). All'equilibrio y_0 di $y' = f(y)$ corrisponde l'equilibrio $z_0 = 0$ di $z' = Df(y_0)z$. Si può dunque sperare che lo studio di z_0 possa dare indicazioni anche su y_0. In effetti è possibile dimostrare i seguenti risultati, dei quali omettiamo la dimostrazione.

Teorema 6.22 *Sia $f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ di classe C^2 e sia y_0 un equilibrio per l'equazione $y' = f(y)$. Se $Df(y_0)$ non ha autovalori con parte reale nulla, allora la stabilità di y_0 è analoga alla stabilità dell'equilibrio $z_0 = 0$ per il sistema linearizzato $z' = Df(y_0)z$, dove $z = y - y_0$. In particolare*

i) y_0 è asintoticamente stabile per $y' = f(y)$ se e solo se 0 è asintoticamente stabile per $z' = Df(y_0)z$;

ii) y_0 *è instabile per* $y' = f(y)$ *se e solo se* 0 *è instabile per* $z' = Df(y_0)z$.

In particolare la dinamica locale di $y' = f(y)$ vicino a y_0 è analoga a quella di $z' = Df(y_0)z$ vicino a $z_0 = 0$. In generale, la *stabilità lineare di* y_0 è per definizione la stabilità di 0 per l'equazione linearizzata $z' = Df(y_0)z$; di conseguenza si parlerà anche di *equilibrio linearmente stabile/instabile*. Inoltre, per rendere più chiara la differenza, la stabilità di y_0 viene anche detta *stabilità nonlineare di* y_0. In conclusione, nelle ipotesi del teorema precedente si è dimostrato che y_0 è stabile/instabile se e solo se è linearmente stabile/instabile. Resta ora da studiare la stabilità dell'origine per sistemi lineari; a tal fine viene in aiuto il seguente teorema.

Teorema 6.23 *Dato il sistema lineare* $n \times n$ *a coefficienti costanti* $z' = Az$, $A \in \mathcal{M}_n$, *allora*

i) *se ogni autovalore di* A *ha parte reale negativa, l'origine è un equilibrio asintoticamente stabile;*

ii) *se ogni autovalore di* A *ha parte reale minore o uguale a* 0, *e gli autovalori con parte reale nulla hanno molteplicità algebrica* 1, *allora l'origine è un equilibrio stabile;*

iii) *se esistono autovalori di* A *con parte reale positiva, l'origine è un equilibrio instabile.*

Applichiamo questi risultati al sistema (6.2). Il differenziale di f nel generico punto (x, y) è dato da

$$Df(x,y) = \begin{pmatrix} 1-2x-y & -x \\ -2y & 1-2x-4y \end{pmatrix},$$

in particolare

$$Df(0,0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad Df(1,0) = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad Df(0,1/2) = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

La prima matrice ha un unico autovalore reale e positivo dunque, per i Teoremi 6.23 e 6.22 E_1 è un equilibrio linearmente e nonlinearmente instabile; la seconda matrice ha un unico autovalore reale e negativo quindi E_2 è linearmente e nonlinearmente asintoticamente stabile; infine, la terza matrice ha un autovalore negativo e uno positivo dunque anche E_3 è instabile. In definitiva, le soluzioni che partono vicino a $(0, 0)$ tendono ad allontanarsi

dall'equilibrio e analogamente per quelle che partono vicino a $(0, 1/2)$ (purché sia $x(t) \neq 0$). Invece, le soluzioni che partono vicino a $E_2 = (1, 0)$ sono attratte dall'equilibrio stesso. Vogliamo ora dimostrare che *tutte* le soluzioni che partono all'interno del quadrante sono attratte da E_2.

Anzitutto, fissato un dato iniziale (x_0, y_0), se $x_0 = 0$ allora $x(t) \equiv 0$ soddisfa la prima equazione, mentre la seconda si riduce a $y' = y(1 - 2y)$, $y(0) = y_0$ con soluzione denotata con $y(t)$. Per unicità, la soluzione è allora della forma $(0, y(t))$ con orbita contenuta nell'asse $x = 0$. In questo caso l'asse y è un cosiddetto *insieme invariante.*

Definizione 6.24 *Un insieme M si dice* positivamente *(risp.* negativamente*)* invariante *rispetto all'equazione $y' = f(t, y)$, se per ogni $(t_0, y_0) \in \Omega$ tale che $y_0 \in M$, ogni soluzione massimale $y(t)$ del problema di Cauchy $y' = f(t, y)$, $y(t_0) = y_0$ è tale che $y(t) \in M$ per ogni $t \geq t_0$ (rispet. $t \leq t_0$). Un insieme M si dice* invariante *se è contemporaneamente positivamente e negativamente invariante.*

In altri termini, un insieme M è invariante se ogni soluzione che ha origine da un suo punto rimane sempre dentro M per ogni tempo. Nel caso in considerazione l'asse y è dunque un insieme invariante. Analogamente, se $y_0 = 0$ la soluzione è del tipo $(x(t), 0)$ e anche l'asse x è invariante. Se ora $x_0, y_0 > 0$ cioè si parte all'interno del quadrante $\mathcal{D}$, detta $(x(t), y(t))$ la relativa soluzione, per l'unicità delle soluzioni dei problemi di Cauchy, nessuna delle sue componenti potrà mai annullarsi. Dovesse infatti essere $x(t_1) = 0$ (analog. $y(t_1) = 0$) si otterrebbe una contraddizione con l'unicità della soluzione passante in $(0, y(t_1))$ al tempo t_1. In definitiva si avrà $x(t), y(t) > 0$ per ogni tempo t di definizione, dunque anche il quadrante aperto è un insieme invariante. Per proseguire l'analisi conviene studiare il segno delle componenti del campo vettoriale f; ciò permette di dividere il piano in regioni nelle quali la direzione di f è simile e in definitiva di avere un'idea del comportamento delle orbite delle soluzioni. Limitandoci a $\mathcal{D}$, la prima componente di f è positiva nel semipiano inferiore alla retta di equazione $x+y = 1$ e si annulla su di essa, la seconda componente è positiva nel semipiano inferiore alla retta di equazione $x + y = 1/2$ e si annulla su di essa. Un quadro globale della direzione del campo vettoriale nelle varie regioni di piano si può vedere in a) di Figura 6.4.

Intuitivamente, preso un dato iniziale (x_0, y_0) con $x_0+y_0 < 1/2$ la relativa soluzione interseca la retta $x + y = 1/2$ in tempo finito. Infatti, se per assurdo ciò non fosse vero, ovvero se fosse $x(t) + y(t) < 1/2$ per ogni t di definizione, non potendo nemmeno uscire attraversando gli assi, la soluzione rimarrebbe per sempre all'interno del triangolo $\mathcal{T} := \big\{(x, y) : \ x, y > 0, \ x +$

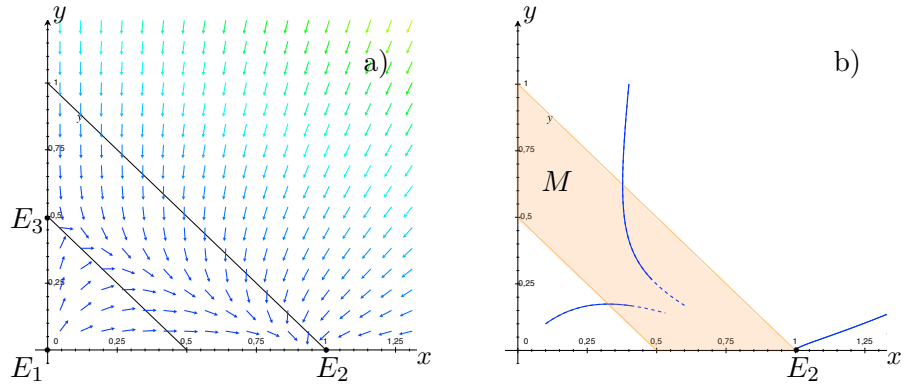


Figura 6.4: a) L'andamento del campo vettoriale; b) l'insieme invariante M

$y < 1/2\}$. Essendo $\mathcal{T}$ limitato, l'orbita sarebbe contenuta in un compatto e per il Teorema della fuga dai compatti la soluzione sarebbe globalmente definita in futuro, cioè in $[0, +\infty[$. Inoltre, essendo $(x(t), y(t)) \in \mathcal{T}$ per ogni $t > 0$ si avrebbe $x'(t) > 0$ e $y'(t) > 0$ per gli stessi t, dunque le componenti sarebbero monotone crescenti e ammetterebbero limiti x_∞ e, rispettivamente, y_∞ per $t \to +\infty$. Essendo $(x(t), y(t)) \to (x_\infty, y_\infty) \in \mathbb{R}^2$ per il Corollario 6.11 il punto (x_∞, y_∞) sarebbe un equilibrio contenuto, per confronto, nel triangolo $\mathcal{T}_1 := \{(x, y) : \ x \geq x_0, y \geq y_0, x + y \leq 1/2\}$, assurdo perché in $\mathcal{T}_1$ non ci sono equilibri. In definitiva esiste $t_1 > 0$ tale che $x(t_1) + y(t_1) = 1/2$. Analogamente, se $x_0 + y_0 > 1$, o esiste un tempo t_1 tale che $x(t_1) + y(t_1) = 1$, oppure la soluzione $(x(t), y(t))$ verifica $x(t) + y(t) > 1$ per ogni t, e un ragionamento simile permette di dimostrare che tende a un equilibrio contenuto in $\{x + y \geq 1\}$, il quale non può che essere E_2.

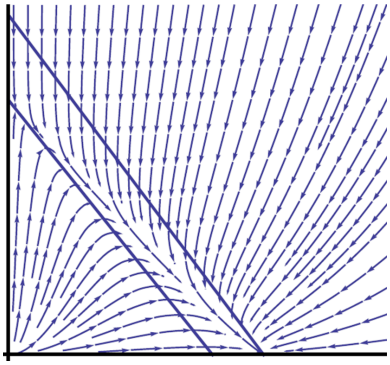


Figura 6.5: Quadro globale delle soluzioni

In definitiva, preso un qualsiasi dato iniziale (x_0, y_0) con $x_0, y_0 > 0$, la

relativa soluzione o tende a E_2 oppure entra (se non lo è già) in tempo finito nell'insieme $M := \big\{(x,y) : \ x,y > 0,\, 1/2 \le x+y \le 1\big\}$ (si veda b) di Figura 6.4). Dimostriamo che l'insieme M è un insieme invariante cioè che le soluzioni, una volta entrate, non possono più uscirne. Infatti, una soluzione potrebbe uscire da M solamente attraverso una delle due parti della frontiera $x+y=1/2$ oppure $x+y=1$ sulle quali, rispettivamente, la seconda oppure la prima componente del campo vettoriale si annulla. Se esistesse un tempo $t_2 > t_1$ per cui $x(t_2)+y(t_2)=1/2$ e la soluzione stesse dentro M in $[t_1,t_2]$ si avrebbe $y'(t_2)=0$ e $x'(t_2)>0$. Derivando la seconda equazione del sistema un'altra volta rispetto a t

$$y''(t) = y'(t) - 2y'(t)x(t) - 2y(t)x'(t) - 4y(t)y'(t),$$

e sostituendo $t=t_2$ si otterrebbe $y''(t_2) = -2y(t_2)x'(t_2) < 0$. Il punto t_2 sarebbe quindi un punto di massimo per la funzione $t \mapsto y(t)$, assurdo perché in $[t_1,t_2[$ la soluzione sta in M per cui $y'(t)<0$ e $y(t)$ è ivi decrescente. Analogamente si trova un assurdo nel caso in cui $x(t_2)+y(t_2)=1$. In conclusione, se una soluzione è contenuta in M per $t=t_1$, rimarrà in M per ogni $t>t_1$. Dalla compattezza di M segue che la soluzione è globalmente definita in $[t_1,+\infty[$. Come prima si ottiene che $x'(t)>0$ e $y'(t)<0$ cioè $x(t)$ è crescente mentre $y(t)$ è decrescente, e per monotonia esiste $\lim_{t\to+\infty}(x(t),y(t)) = (x_\infty,y_\infty) \in \overline{M}$. Per la conseguenza del criterio dell'asintoto (x_∞,y_∞) è un equilibrio e dovendo essere $x_\infty > x(t) > x(t_1) > 0$ non può che essere $(x_\infty,y_\infty)=(1,0)=E_2$.
In definitiva si è provato che ogni soluzione con dati iniziali appartenenti all'interno di $\mathcal{D}$ converge all'equilibrio E_2 per $t \to +\infty$: il microcosmo favorisce la prima popolazione che tende a un valore d'equilibrio finito, a discapito della seconda che tende a estinguersi. Il quadro complessivo delle soluzioni si può osservare in Figura 6.5.

Capitolo 7

Sistemi autonomi e integrali primi

Integrali primi e sistemi conservativi

Nello studio qualitativo delle soluzioni di un sistema di equazioni differenziali può tornare spesso utile la conoscenza di qualche "costante del moto" ovvero di qualche quantità conservata lungo le soluzioni del sistema stesso. Nel seguito di questo capitolo ci restringeremo ai sistemi autonomi del tipo

$$y' = g(y) \tag{7.1}$$

dove $g : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ è continua, A aperto.

Definizione 7.1 *Un* integrale primo *dell'equazione* (7.1) *è una funzione* $E : A \to \mathbb{R}$ *costante lungo tutte le soluzioni, cioè tale che per ogni soluzione* $y : I \to \mathbb{R}^n$ *di* (7.1) *si abbia* $E(y(t)) =$ *costante per ogni* $t \in I$.

Definizione 7.2 *Un sistema* (7.1) *si dice* sistema conservativo *se ammette almeno un integrale primo.*

Normalmente nella definizione di integrale primo si richiede in più che E non sia *localmente costante* cioè non sia costante su alcun aperto contenuto in A. Questa ulteriore condizione serve per evitare casi banali: per esempio, ogni funzione costante E è un integrale primo (di una qualsiasi equazione) ma è chiaro che non dà alcuna informazione sul comportamento delle soluzioni! Un facile criterio per verificare che E sia un integrale primo è dato dal seguente lemma.

Lemma 7.3 *Se $E \in C^1(A)$ soddisfa*

$$\langle \nabla E(y), g(y) \rangle = 0$$

per ogni $y \in A$, allora E è integrale primo per (7.1).

DIMOSTRAZIONE Data $y : I \to \mathbb{R}^n$ soluzione di (7.1) si ha

$$\frac{d}{dt} E(y(t)) = DE(y(t))y'(t) = \big\langle \nabla E(y(t)), y'(t) \big\rangle = \big\langle \nabla E(y(t)), g(y(t)) \big\rangle = 0$$

per ogni $t \in I$ dunque $E(y(t))$ è costante in I. □

Se E è integrale primo di (7.1) e $y : I \to \mathbb{R}^n$ è soluzione del problema di Cauchy associato con $y(0) = y_0$ si ha dunque $E(y(t)) = E(y_0)$ per ogni $t \in I$ ovvero, in altri termini, $y(t) \in E^{-1}\big(E(y_0)\big)$ cioè $y(t) \in E_c$ dove

$$E_c := \big\{ y \in \mathbb{R}^n : \ E(y) = c \big\} = E^{-1}(\{c\}),$$

è l'*insieme di livello* $c = E(y_0)$ della funzione E. Lo studio degli insiemi di livello di un integrale primo può fornire molte informazioni riguardo alle soluzioni del sistema in considerazione. Per esempio vale il seguente

Corollario 7.4 *Se E è un integrale primo di* (7.1) *e gli insiemi di livello di E sono compatti, allora tutte le soluzioni (massimali) di* (7.1) *sono globalmente definite in passato e futuro.*

DIMOSTRAZIONE Basta utilizzare la precedente osservazione e il Teorema 4.1. □

Chiaramente può accadere che alcuni insiemi di livello siano compatti ed altri no; in questo caso il corollario si applica a tutte le soluzioni che sono contenute negli insiemi di livello che sono compatti.

Che struttura hanno gli insiemi di livello di E? In generale si può dimostrare che se $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n-p}$ con $p > 0$ è di classe C^1 e per ogni $x \in A$ il differenziale $Df(x)$ ha rango massimo ($= n - p$) allora per ogni $c \in \mathbb{R}^{n-p}$ l'insieme $f_c = \{x \in A : \ f(x) = c\}$, se non vuoto, è una *varietà differenziale* di classe C^1 e dimensione p. In particolare

- se $p = n - 1$ si hanno le ipersuperfici;
- se $p = 2$ si hanno le superfici;
- se $p = 1$ si hanno le curve.

Più in generale, posto $N = \{x \in A : \ Df(x) \text{ non ha rango massimo}\}$ si può dimostrare che per ogni $c \in \mathbb{R}^{n-p}$ l'insieme $f_c \setminus N$, se non vuoto, è una varietà differenziale di classe C^1 e dimensione p.

Nel caso in considerazione, per quasi ogni valore di $c \in \mathbb{R}$ l'insieme di livello E_c rappresenta quindi una ipersuperficie in $\mathbb{R}^n$. Si osservi che in questo caso la condizione sul rango equivale a dire che il gradiente di E non si annulla mai. Eventualmente l'analisi precedente si può applicare a un singolo insieme di livello; infatti, se per qualche c il gradiente di E non si annulla in E_c ed esiste un intorno aperto U di E_c su cui il gradiente non si annulla (ciò accade se per esempio E_c è compatto), allora applicando il risultato sopra all'aperto U si ha che E_c è una varietà di dimensione $p = n-1$. Potrebbe però accadere che per altri valori di c ciò non sia verificato.

Può inoltre succedere che un sistema di equazioni differenziali abbia più di un integrale primo; in questo caso l'orbita di ogni soluzione del sistema sarà contenuta nell'intersezione degli insiemi di livello relativi a ciascun integrale primo. Per esempio, se il sistema (7.1) ammette due integrali primi E^1 ed E^2, per ogni soluzione $y : I \to \mathbb{R}^n$ del sistema tale che $y(0) = y_0$ si avrà $y(t) \in E^1_{c_1} \cap E^2_{c_2}$ dove $c_i = E^i(y_0)$, $i = 1, 2$. Si osservi che, introdotta la funzione $E : A \to \mathbb{R}^2$ definita da $E(y) = (E^1(y), E^2(y))$, si ha $y(t) \in E_c$ dove $c = (c_1, c_2)$. Per quanto visto, se il differenziale di E ha rango massimo $(= 2)$ l'insieme E_c rappresenta una varietà differenziale di dimensione $n-2$. Si osservi che il rango di DE è massimo se ∇E^1 e ∇E^2 non sono paralleli e, visto che ∇E^i è un vettore normale all'ipersuperficie E^i_c, ciò significa che le due ipersuperfici E^1_c, E^2_c si intersecano trasversalmente. Questa osservazione si estende a un numero arbitrario di integrali primi; in generale, dato un sistema in $\mathbb{R}^n$, se si conoscono m integrali primi indipendenti (nel senso che i loro gradienti sono linearmente indipendenti, dunque $m \leq n$ e in realtà $m \leq n-1$) allora l'intersezione degli insiemi di livello, a cui appartengono le orbite delle soluzioni, è una varietà di dimensione $n-m$. In particolare, se si conoscono $n-1$ integrali primi indipendenti le intersezioni dei relativi insiemi di livello rappresenteranno delle varietà di dimensione $n-(n-1) = 1$ cioè curve, che dunque conterranno il supporto delle orbite delle soluzioni. Per sistemi planari basterà quindi conoscere un integrale primo, per sistemi in $\mathbb{R}^3$ si dovranno invece trovare (se esistono!) due integrali.

Esempio 7.5 Dato il sistema in $\mathbb{R}^3$

$$\begin{cases} x' = yz \\ y' = -xz \\ z' = -k^2 xy, \end{cases}$$

dove $k > 0$ è una costante, verifichiamo che le funzioni $E^1(x, y, z) = x^2 + y^2$ e $E^2(x, y, z) = k^2x^2 + z^2$ sono integrali primi. Il campo vettoriale $g \in C^\infty(\mathbb{R}^3)$ è dato da $g(x, y, z) = (yz, -xz, -k^2xy)$, quindi il sistema ha esistenza e unicità locale per i problemi di Cauchy associati. Non valgono invece le ipotesi dei vari teoremi di esistenza globale. Si ha facilmente

$$\nabla E^1(x, y, z) = (2x, 2y, 0), \qquad \nabla E^2(x, y, z) = (2k^2x, 0, 2z),$$

da cui $\langle \nabla E^1(x, y, z), g(x, y, z)\rangle = 0$ e $\langle \nabla E^2(x, y, z), g(x, y, z)\rangle = 0$, dunque E^1, E^2 sono integrali primi. Fissato un dato iniziale (x_0, y_0, z_0), detta $(x(t), y(t), z(t))$ la soluzione del relativo problema di Cauchy, e posto $c_1 = E^1(x_0, y_0, z_0) = x_0^2 + y_0^2$, $c_2 = E^2(x_0, y_0, z_0) = k^2x_0^2 + z_0^2$ si ha $(x(t), y(t), z(t)) \in E^1_{c_1} \cap E^2_{c_2}$. Gli insiemi di livello di E^1 sono dei cilindri di sezione circolare e asse coincidente con l'asse z, mentre quelli di E^2 sono sempre cilindri di sezione ellittica e asse coincidente con l'asse y. Si osservi che gli uni e gli altri sono insiemi illimitati ma la loro intersezione è invece un insieme compatto. Volendo essere più precisi, per ogni t si ha

$$|x(t)|, |y(t)| \le \sqrt{x^2(t) + y^2(t)} = \sqrt{x_0^2 + y_0^2},$$

$$|z(t)| \le \sqrt{k^2x^2(t) + z^2(t)} = \sqrt{k^2x_0^2 + z_0^2},$$

perciò la generica soluzione, avendo le coordinate limitate, è contenuta in un compatto quindi, per il Teorema 4.1, è globalmente definita in futuro e passato cioè in $\mathbb{R}$. L'analisi del sistema proseguirà nell'Appendice finale.

Sistemi di ordine 2 conservativi: il caso dell'energia

Tra i "sistemi" conservativi si annoverano i sistemi omogenei di ordine 2

$$y'' = g(y) \tag{7.2}$$

dove $g : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ è un *campo vettoriale conservativo* cioè tale che esiste $V \in C^1(A)$ con $g(y) = -\nabla V(y)$ per ogni $y \in A$ (il segno "$-$" è convenzionale). In definitiva si tratta di sistemi della forma

$$y'' = -\nabla V(y). \tag{7.3}$$

Verifichiamo che (7.3) o, meglio, il corrispondente sistema di ordine 1 equivalente

$$\begin{cases} y' = p \\ p' = -\nabla V(y) \end{cases} \qquad y = (y_1, \dots, y_n),\ p = (p_1, \dots, p_n), \tag{7.4}$$

è un sistema conservativo, con integrale primo dato dall'*energia*

$$E(y,p) = \frac{\|p\|^2}{2} + V(y). \tag{7.5}$$

Infatti, il campo vettoriale $F : A \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ del sistema (7.4) è dato da $F(y,p) = (p, -\nabla V(y))$, mentre il gradiente di E è dato da

$$\begin{aligned}\nabla E(y,p) &= (\partial_{y_1} E(y,p), \dots, \partial_{y_n} E(y,p), \partial_{p_1} E(y,p), \dots, \partial_{p_n} E(y,p)) \\ &= (\partial_{y_1} V(y), \dots, \partial_{y_n} V(y), p_1, \dots, p_n) = (\nabla V(y), p),\end{aligned}$$

perciò banalmente $\langle \nabla E(y,p), F(y,p)\rangle = 0$ per ogni $(y,p) \in A \times \mathbb{R}^n$. Si osservi inoltre che $\nabla E(y,p) = 0$ se e solo se $\nabla V(y) = 0$ e $p = 0$; l'insieme dei punti critici di E è dunque contenuto nel sottospazio lineare di equazione $p = 0$ e dimensione n. In particolare E non è costante su nessun aperto di $A \times \mathbb{R}^n$. Essendo integrale primo, E è costante lungo le soluzioni $(y(t), p(t))$ di (7.4); in termini dell'equazione (7.3) si ha allora che

$$E(y(t), y'(t)) = \frac{\|y'(t)\|^2}{2} + V(y(t))$$

è costante lungo le soluzioni di (7.3). La funzione $L(t) = \frac{\|y'(t)\|^2}{2}$ si dice *energia cinetica* mentre $P(t) = V(y(t))$ si dice *energia potenziale* di $y(t)$. Si avrà quindi $(y(t), y'(t)) \in E_c$ dove $c = E(y_0, y_0')$.

Osservazione 7.6 Se $n = 1$, l'equazione del secondo ordine omogenea $y'' = g(y)$, g continua, è sempre conservativa; basta infatti prendere $V(y) = -\int^y g(s)\,ds$, perciò la sua energia è data da

$$E(y, y') = \frac{(y')^2}{2} - \int^y g(s)\,ds.$$

Osservazione 7.7 L'analisi degli insiemi di livello dell'energia permette di avere informazioni sulle soluzioni o, meglio, sulle orbite delle soluzioni del sistema (7.4) nel relativo piano delle fasi $A \times \mathbb{R}^n$. Per esempio, si può dimostrare che se $V : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ e $\lim_{\|y\|\to\infty} V(y) = +\infty$ (ovvero V è funzione "coercitiva") allora c'è esistenza globale delle soluzioni di $y'' = -\nabla V(y)$; infatti, gli insiemi di livello dell'energia, se non vuoti, sono compatti. Fissato $c \in \mathbb{R}$ l'insieme di livello E_c è formato dai punti (y,p) soluzioni dell'equazione $\frac{\|p\|^2}{2} + V(y) = c$. Per ipotesi segue che V ha un minimo globale V_{min} su tutto $\mathbb{R}^n$ (verificarlo per esercizio). Per ogni soluzione (y,p) si ha dunque $\frac{\|p\|^2}{2} = c - V(y) \le c - V_{min}$ da cui segue $\|p\| \le \sqrt{2(c - V_{min})} =: p_{max}$ (se

$c < V_{min}$ chiaramente E_c è vuoto). Inoltre $V(y) = c - \frac{\|p\|^2}{2} \leq c$, e per ipotesi esiste $r = r_c > 0$ tale che se $\|z\| > r$ si ha $V(z) > c$. Dunque per $\|y\| > r$ non possono esistere soluzioni di $E(y,p) = c$ e in definitiva il generico punto (y,p) di E_c deve necessariamente soddisfare $\|p\| \leq p_{max}$ e $\|y\| \leq r$, perciò E_c è limitato ed essendo anche chiuso è compatto.

Esempio 7.8 Le soluzioni dell'equazione del secondo ordine

$$y'' = -y^3$$

sono tutte globalmente definite e limitate. Infatti $V(y) = \int^y s^3\,ds = y^4/4$ tende all'infinito per $y \to \pm\infty$ e basta utilizzare l'osservazione precedente. Si osservi che il campo vettoriale del sistema di ordine 1 associato è $F(y,p) = (p, -y^3)$ che non è sublineare né globalmente lipschitziano. Non si potevano dunque applicare i teoremi di esistenza globale 4.12 e 4.13.

Il pendolo non lineare senza attrito

In questa sezione presentiamo un'analisi qualitativa delle soluzioni dell'equazione del pendolo non lineare senza attrito. Supponiamo quindi di avere un pendolo di lunghezza ℓ, al cui estremo è fissata una massa m e il tutto è inserito all'interno del campo gravitazione con accelerazione g. Preso un sistema di riferimento come in Figura 7.1, con l'asse delle ordinate diretto verso il basso, si denoti con θ l'angolo che il pendolo forma col semiasse positivo di y. Dalla fisica, supponendo che l'asta abbia massa trascurabile rispetto a m e che non ci sia attrito, l'equazione che governa il moto del pendolo è data da

$$\theta'' = -\frac{g}{\ell}\operatorname{sen}\theta. \tag{7.6}$$

Introdotta la *velocità angolare* $\omega := \theta'$, l'equazione è equivalente al sistema di ordine 1 nelle incognite (θ, ω)

$$\begin{cases} \theta' = \omega \\ \omega' = -\frac{g}{\ell}\operatorname{sen}\theta. \end{cases} \tag{7.7}$$

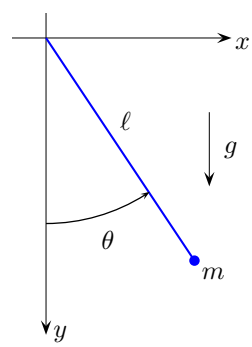


Figura 7.1: Il pendolo

Poiché $g(\theta) = -\frac{g}{\ell}\operatorname{sen}\theta$ è globalmente 1-lipschitziana, per il Lemma 2.14 e il Teorema 4.13 si hanno esistenza e unicità globale delle soluzioni dei problemi di Cauchy associati a (7.7) e a (7.6).

Per quanto visto nella sezione precedente il sistema è conservativo con $V(\theta) = -\int^\theta (-\frac{g}{\ell} \operatorname{sen} s)\, ds = -\frac{g}{\ell}\cos\theta$, dunque l'energia è data da

$$E(\theta,\omega) = \frac{\omega^2}{2} - \frac{g}{\ell}\cos\theta$$

ed è costante lungo le soluzioni, ovvero si ha $E(\theta(t),\omega(t)) = E(\theta_0,\omega_0)$ per ogni t dove $(\theta(t),\omega(t))$ è la soluzione di (7.7) con dati iniziali $(\theta(0),\omega(0)) = (\theta_0,\omega_0)$. Studiamo quindi le curve di livello E_c di E nel piano delle fasi $\theta - \omega$. Anzitutto si osservi che l'energia ha periodo $(2\pi, 0)$ nel senso che $E(\theta+2\pi,\omega) = E(\theta,\omega)$ per ogni (θ,ω). Basta quindi restringere l'analisi alla striscia $[-\pi,\pi]\times\mathbb{R}$ e poi estendere i risultati per periodicità su tutto $\mathbb{R}^2$.

Cerchiamo gli equilibri, soluzioni di $F(\theta,\omega) = (\omega, -\frac{g}{\ell}\operatorname{sen}\theta) = 0$. Si ottengono quindi $(\theta_k,\omega_k) := (k\pi, 0)$ al variare di $k\in\mathbb{Z}$. Studiamo la loro stabilità lineare: il differenziale di F è dato da

$$DF(\theta,\omega) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{g}{\ell}\cos\theta & 0 \end{pmatrix},$$

per cui

$$DF(\theta_{2k},\omega_{2k}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -g/\ell & 0 \end{pmatrix}, \quad DF(\theta_{2k+1},\omega_{2k+1}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ g/\ell & 0 \end{pmatrix}.$$

Gli autovalori di $DF(\theta_{2k},\omega_{2k})$ sono $\pm i\sqrt{g/\ell}$, immaginari puri, mentre quelli di $DF(\theta_{2k+1},\omega_{2k+1})$ sono $\pm\sqrt{g/\ell}$. Per il Teorema 6.23 $(\theta_{2k+1},\omega_{2k+1})$ sono equilibri linearmente instabili mentre $(\theta_{2k},\omega_{2k})$ sono stabili (ma non asintoticamente stabili; nella terminologia corretta sono detti *centri*). Per il Teorema 6.22 gli equilibri $(\theta_{2k+1},\omega_{2k+1})$ sono instabili anche per il sistema nonlineare (7.7) mentre nulla si può dire della stabilità di $(\theta_{2k},\omega_{2k})$, $k\in\mathbb{Z}$.

La medesima analisi poteva essere fatta tramite lo studio dell'energia: i punti critici di E sono soluzioni di $\nabla E(\theta,\omega) = (\frac{g}{\ell}\operatorname{sen}\theta,\omega) = 0$ e coincidono con gli equilibri del sistema $(\theta_k,\omega_k) = (k\pi,0)$. Studiando la natura dei punti critici mediante l'Hessiano di E

$$HE(\theta,\omega) = \begin{pmatrix} \frac{g}{\ell}\cos\theta & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Essendo $\det HE(2k\pi,0) = g/\ell$ positivo con traccia positiva, i punti critici $(\theta_{2k},\omega_{2k}) = (2k\pi,0)$ sono tutti dei minimi locali (e anche globali); diversamente, poiché $\det HE((2k+1)\pi,0) = -g/\ell$ è negativo, i punti critici $(\theta_{2k+1},\omega_{2k+1}) = ((2k+1)\pi,0)$ sono tutti punti di sella. Dal punto di vista

fisico i punti di sella sono degli equilibri instabili: spostandoci leggermente da essi lungo alcune direzioni si tende ad allontanarsi; i minimi locali sono, per lo stesso motivo, equilibri stabili. Il grafico e le curve di livello di E sono rappresentati in Figura 7.2.

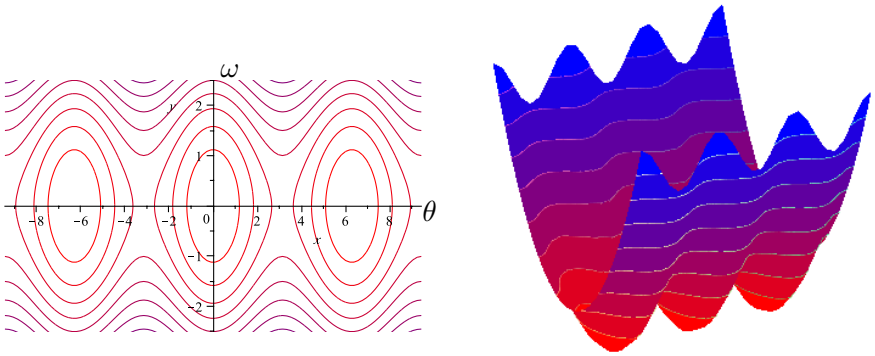


Figura 7.2: Curve di livello e grafico di $E(\theta, \omega)$

Studiamo ora le curve di livello di E. Per quanto visto nella sezione precedente gli insiemi di livello sono delle curve e le orbite delle soluzioni saranno archi di queste curve. In questo caso, l'insieme di livello $c = E_0 = E(\theta_0, \omega_0)$ è dato da

$$\frac{\omega^2}{2} - \frac{g}{\ell}\cos\theta = E_0$$

e si può esplicitare ω in funzione di θ ottenendo

$$\omega = \omega(\theta) = \pm\sqrt{2\Big(E_0 + \frac{g}{\ell}\cos\theta\Big)}. \tag{7.8}$$

Si tenga ben presente che quella ottenuta *non* è la soluzione, quest'ultima essendo una funzione $t \mapsto (\theta(t), \omega(t))$, mentre si è esplicitato ω in funzione di θ e non di t. Potendo scrivere $\theta = \theta(t)$ in funzione di t (ma ciò, vedremo, in generale non è possibile) si otterrebbe anche $\omega(\theta(t))$ in funzione di t.

Ci sono diversi casi, a secondo dell'energia iniziale del pendolo.

I caso: $\boxed{E_0 > g/\ell}$. L'argomento della radice in (7.8) è sempre strettamente positivo per ogni $\theta \in \mathbb{R}$ e la funzione $\omega(\theta)$ è definita e strettamente positiva su tutto $\mathbb{R}$. L'insieme di livello non è limitato ed è costituito da due curve periodiche una contenuta nel semipiano $\omega > 0$ e l'altra nel semipiano $\omega < 0$ (si veda la Figura 7.3). Essendo $\theta'(t) = \omega(t)$, la funzione $\theta(t)$ è strettamente monotona (crescente o decrescente) e l'orbita della soluzione copre interamente uno dei due rami dell'insieme di livello.

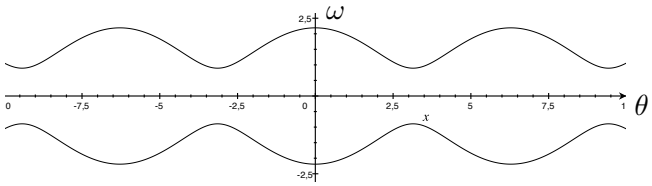


Figura 7.3: Curve di livello, caso $E_0 > g/\ell$

Dal punto di vista fisico, l'energia iniziale è sufficiente a fare arrivare il pendolo nella posizione verticale (corrispondente a $\theta = \pm\pi$ o a loro multipli) con un'energia cinetica non nulla pari a $E_0 - g/\ell > 0$. Ciò permette al pendolo di oltrepassare l'equilibrio instabile e "ricadere dall'altra parte". Le soluzioni corrispondono quindi a oscillazioni circolari periodiche del pendolo, in senso orario se $\omega_0 < 0$, antiorario se $\omega_0 > 0$. Le orbite e le traiettorie delle soluzioni sono rappresentate in Figura 7.4.

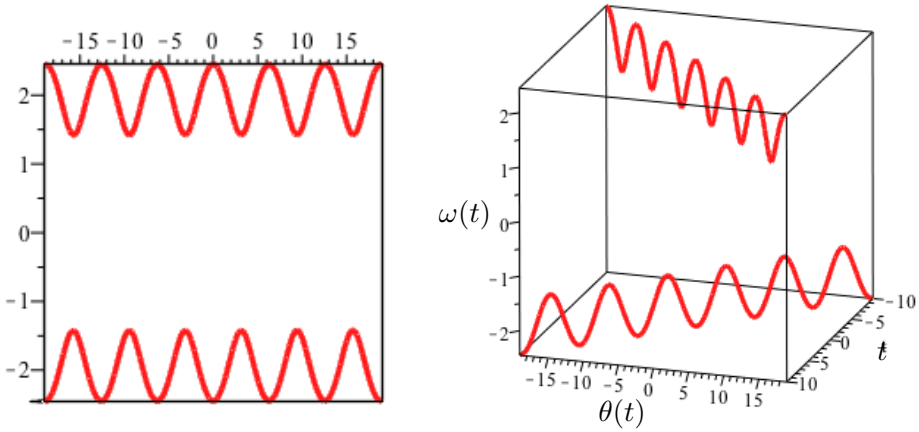


Figura 7.4: Orbite e traiettorie delle soluzioni, caso $E_0 > g/\ell$

II caso: $\boxed{E_0 = g/\ell}$. Corrisponde al caso limite, detto caso delle *separatrici*, le quali sono le curve di livello date da

$$\omega = \pm\sqrt{\frac{2g}{\ell}\Big(1+\cos\theta\Big)} = \pm 2\sqrt{\frac{g}{\ell}}\Big|\cos\frac{\theta}{2}\Big|.$$

Le curve di livello sono ancora definite per ogni $\theta \in \mathbb{R}$ ma ora in corrispondenza di $\theta = (2k+1)\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, la componente ω si annulla: gli equilibri instabili appartengono dunque all'insieme di livello $E_0 = g/\ell$ che è anche connesso (si veda la Figura 7.5). Si consideri una soluzione del pendolo che

parte dalla posizione (θ_0, ω_0) con energia g/ℓ e, per facilità, con $-\pi < \theta_0 < \pi$ e $\omega_0 > 0$. La restrizione dell'insieme di livello a $\theta \in [-\pi, \pi]$ e $\omega > 0$ è un arco di curva che connette i due equilibri $(-\pi, 0)$ e $(\pi, 0)$.

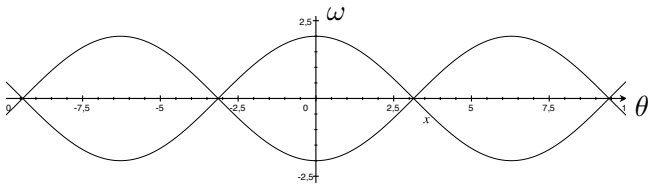


Figura 7.5: Curve di livello, caso $E_0 = g/\ell$

Si avrà dunque $\theta'(t) = \omega(t) > 0$ e $\theta(t)$ è crescente: l'orbita corrispondente percorre in futuro l'arco dell'insieme di livello in senso orario e tende all'equilibrio $(\pi, 0)$ ma senza mai arrivarci. Infatti, per l'unicità nessuna soluzione non costante può entrare in un equilibrio in tempo finito. Analogamente, in passato la soluzione tende all'altro equilibrio $(-\pi, 0)$. Dal punto di vista fisico, l'energia iniziale è tale che la soluzione tende alla posizione verticale, in futuro e passato, in tempo infinito, senza mai arrivarci (chiaramente questo è un modello!). Le orbite e le traiettorie delle soluzioni sono rappresentate in Figura 7.6.

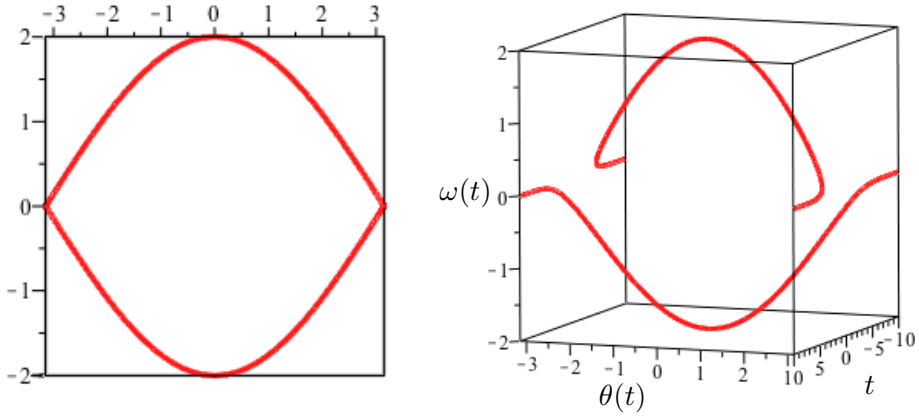


Figura 7.6: Orbite e traiettorie delle soluzioni, caso $E_0 = g/\ell$

III caso: $\boxed{E_0 < g/\ell}$. Più precisamente si avrà $-g/\ell < E_0 < g/\ell$ dove l'energia $-g/\ell$ è il minimo globale dell'energia che corrisponde a tutti e soli gli equilibri stabili. Per valori inferiori di E_0 l'insieme di livello è dunque vuoto. Nel presente caso l'argomento della radice in (7.8) non è sempre positivo; nell'intervallo $[-\pi, \pi]$ si annulla per $\theta = \pm\alpha$, con $\alpha \in]0, \pi[$ soluzione

dell'equazione

$$E_0 + \frac{g}{\ell}\cos\alpha = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad \alpha = \arccos\Big(-\frac{\ell E_0}{g}\Big).$$

L'equazione (7.8) può dunque riscriversi nella forma

$$\omega = \pm\sqrt{\frac{2g}{\ell}(\cos\theta - \cos\alpha)}$$

e dunque ha senso per $\theta \in [-\alpha, \alpha]$ e per periodicità in tutti gli intervalli $[2k\pi - \alpha, 2k\pi + \alpha]$, $k \in \mathbb{Z}$.

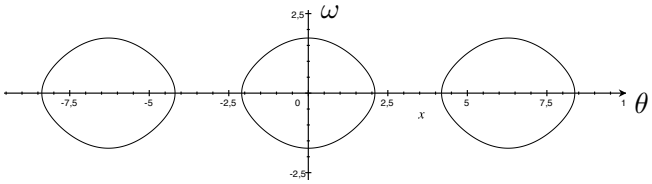


Figura 7.7: Curve di livello, caso $E_0 < g/\ell$

Ogni insieme di livello è costituito da infinite componenti connesse, una per ogni striscia $[(2k-1)\pi, (2k+1)\pi]$ e rappresentante il supporto di una curva chiusa semplice (si veda la Figura 7.7). Nella striscia $[-\pi, \pi] \times \mathbb{R}$, le soluzioni associate corrispondono a oscillazioni periodiche del pendolo tra le due posizioni estreme di θ date da $-\alpha$ e α. Nel piano delle fasi, l'orbita di tali soluzioni apparterrà alla componente connessa del relativo insieme di livello. Verifichiamo che l'orbita copre l'intera curva in tempo finito da cui seguirà che la soluzione è periodica. Più precisamente, fissato un dato iniziale (θ_0, ω_0) con, per facilità, $-\alpha < \theta_0 < \alpha$ e $\omega_0 > 0$, dimostriamo che esiste $t_1 > 0$ tale che $\omega(t_1) = 0$. Infatti si ha $\theta'(0) = \omega(0) = \omega_0 > 0$ quindi $\theta(t)$ è crescente in $t_0 = 0$ e rimarrà crescente finché $\omega(t)$ resterà positiva. Per assurdo supponiamo che $\omega(t) \neq 0$ per ogni $t > 0$; per continuità necessariamente $\omega(t) > 0$ per ogni $t > 0$ dunque $\theta(t)$ è crescente. Per monotonia esiste allora il limite $\lim_{t\to+\infty}\theta(t) =: \theta_\infty$ e per confronto $-\alpha < \theta_0 < \theta_\infty \leq \alpha$. Essendo

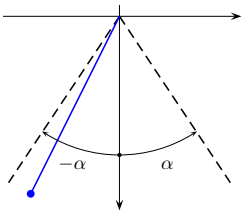


Figura 7.8: Oscillazioni periodiche di ampiezza α

$$\omega(t) = \sqrt{\frac{2g}{\ell}(\cos\theta(t) - \cos\alpha)} \tag{7.9}$$

esiste anche

$$\lim_{t\to+\infty} \omega(t) = \sqrt{\frac{2g}{\ell}(\cos\theta_\infty - \cos\alpha)} =: \omega_\infty.$$

In definitiva $(\theta(t), \omega(t))$ tende al punto $(\theta_\infty, \omega_\infty)$. Poiché l'orbita è contenuta nell'insieme di livello, che è chiuso, anche $(\theta_\infty, \omega_\infty)$ vi appartiene. Per il Corollario 6.11 $(\theta_\infty, \omega_\infty)$ deve essere un equilibrio, il che è assurdo perché essendo $0 < \alpha < \pi$ nessuno dei relativi insiemi di livello contiene equilibri del sistema. In conclusione esiste $t_1 > 0$ tale che $\omega(t_1) = 0$ e di conseguenza $\theta(t_1) = \alpha$. Al tempo t_1 si ha $\theta'(t_1) = \omega(t_1) = 0$ e $\omega'(t_1) = -\frac{g}{\ell}\operatorname{sen}\alpha < 0$ quindi in un intorno destro di t_1 si avrà $\omega(t) < 0$. In maniera del tutto analoga si può provare che se $\omega_0 < 0$ esiste un tempo $t_2 > t_0$ tale che $(\theta(t_2), \omega(t_2)) = (-\alpha, 0)$ e che in un intorno destro di t_2 si ha $\omega(t) > 0$. Mettendo insieme tutti i pezzi risulta chiaro che esiste un $T > 0$ tale che $(\theta(T), \omega(T)) = (\theta_0, \omega_0)$ perciò l'orbita (come anche la soluzione) è periodica. Le orbite e le traiettorie delle soluzioni sono rappresentate in Figura 7.9.

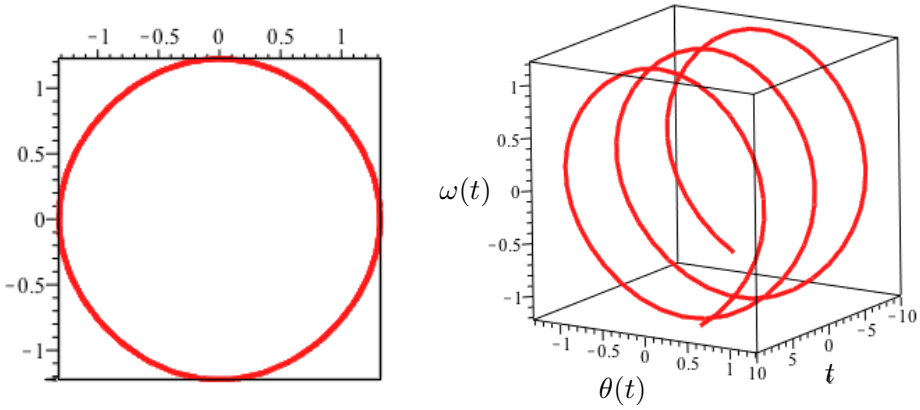


Figura 7.9: Orbite e traiettorie delle soluzioni, caso $E_0 < g/\ell$

È possibile scrivere una formula per il periodo di oscillazione delle soluzioni in dipendenza da α e in ultima analisi dall'energia iniziale E_0. Visto che ogni soluzione è periodica, supponiamo che al tempo $t_0 = 0$ sia $(\theta_0, \omega_0) = (-\alpha, 0)$. Detta $(\theta(t), \omega(t))$ la relativa soluzione, almeno inizialmente si avrà allora $\omega(t) > 0$. Inoltre, per (7.7) e (7.9) si ottiene

$$\theta'(t) = \sqrt{\frac{2g}{\ell}(\cos\theta(t) - \cos\alpha)}, \tag{7.10}$$

che è un'equazione differenziale autonoma del primo ordine nella sola incognita θ. L'integrazione di questa equazione permetterebbe di trovare la

soluzione $\theta(t)$. Separando le variabili si ottiene

$$\sqrt{\frac{\ell}{2g}}\int_{-\alpha}^{\theta(t)}\frac{1}{\sqrt{\cos\varphi-\cos\alpha}}\,d\varphi=\int_0^t ds.$$

Se τ è il primo tempo positivo per cui $\theta(\tau)=\alpha$, per simmetria τ è il semiperiodo di oscillazione. Si ricava che il periodo di oscillazione $T=2\tau$ è

$$T=2\sqrt{\frac{\ell}{2g}}\int_{-\alpha}^{\alpha}\frac{1}{\sqrt{\cos\varphi-\cos\alpha}}\,d\varphi=4\sqrt{\frac{\ell}{2g}}\int_0^{\alpha}\frac{1}{\sqrt{\cos\varphi-\cos\alpha}}\,d\varphi.$$

Mediante il cambio di coordinate $\operatorname{sen}\psi=\frac{\operatorname{sen}(\varphi/2)}{\operatorname{sen}(\alpha/2)}$ si ricava

$$T=4\sqrt{\frac{\ell}{g}}\int_0^{\pi/2}\frac{1}{\sqrt{1-\operatorname{sen}^2(\alpha/2)\operatorname{sen}^2\psi}}\,d\psi. \tag{7.11}$$

Questa formula fornisce un'espressione per il periodo $T=T_\alpha$ del pendolo in dipendenza da α, cioè dall'energia iniziale. Al contempo, l'analisi svolta dimostra che se $0<\alpha<\pi$ non è possibile trovare esplicitamente la soluzione $\theta(t)$, visto che l'integrazione dell'equazione (7.10) coincide col calcolo dell'integrale (ellittico, di prima specie) in (7.11), problema non elementarmente risolubile. Si osservi che $\lim_{\alpha\to0^+}T_\alpha=2\pi\sqrt{\ell/g}$. Se α è piccolo l'oscillazione è piccola e in definitiva il limite del periodo per $\alpha\to0$ coincide proprio con la formula classica del periodo delle piccole oscillazioni, cioè $2\pi\sqrt{\ell/g}$. Per esercizio, si scriva il sistema linearizzato di (7.7) relativamente all'equilibrio $(0,0)$ e si dimostri che tale sistema è equivalente all'equazione del pendolo lineare (oscillatore armonico) $\theta''=-g\theta/\ell$. Si verifichi che ogni soluzione di quest'ultimo è periodica e che il periodo (delle piccole oscillazioni) è $2\pi\sqrt{\ell/g}$ e non dipende dall'energia iniziale. In definitiva si è dimostrato che il limite del periodo delle soluzioni di (7.6) quando l'ampiezza dell'oscillazione tende a zero è il periodo delle soluzioni del problema linearizzato in 0.

Per terminare l'analisi del problema, si osservi che è possibile ottenere una formula esplicita per le soluzioni con energia iniziale $E_0=g/\ell$. Infatti, procedendo come sopra, ciò equivale a integrare l'equazione

$$\theta'(t)=\pm\sqrt{\frac{2g}{\ell}(1+\cos\theta(t))}.$$

Fissato per facilità il dato iniziale $(\theta_0,\omega_0)=(0,2\sqrt{g/\ell})$ (in modo tale che $E_0=E(\theta_0,\omega_0)=g/\ell$), per separazione delle variabili si ottiene

$$\sqrt{\frac{\ell}{2g}}\int_0^{\theta(t)}\frac{1}{\sqrt{1+\cos\varphi}}\,d\varphi=\int_0^t ds=t.$$

Essendo per ogni $\varphi \in]-\pi, \pi[$

$$\sqrt{1+\cos\varphi} = \sqrt{2}\cos\frac{\varphi}{2} = \sqrt{2}\big(\cos^2\frac{\varphi}{4} - \operatorname{sen}^2\frac{\varphi}{4}\big) = \sqrt{2}\cos^2\frac{\varphi}{4}\big(1-\operatorname{tg}^2\frac{\varphi}{4}\big),$$

mediante la sostituzione $z = \operatorname{tg}(\varphi/4)$, tale che $dz = \frac{1}{4\cos^2(\varphi/4)}d\varphi$, si ottiene

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{\sqrt{1+\cos\varphi}}\,d\varphi &= \frac{1}{\sqrt{2}}\int \frac{1}{1-\operatorname{tg}^2\frac{\varphi}{4}}\cdot\frac{1}{\cos^2\frac{\varphi}{4}}\,d\varphi = \frac{4}{\sqrt{2}}\int\frac{1}{1-z^2}\,dz\\ &= \sqrt{2}\ln\frac{1+z}{1-z} = 2\sqrt{2}\,\operatorname{settanh} z = 2\sqrt{2}\,\operatorname{settanh}\operatorname{tg}(\varphi/4),\end{aligned}$$

da cui segue

$$2\sqrt{\ell/g}\,\operatorname{settanh}\operatorname{tg}(\theta(t)/4) = t.$$

Risolvendo questa equazione nell'incognita $\theta(t)$ si ottiene infine

$$\theta(t) = 4\operatorname{arctg}\tanh\Big(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{g}{\ell}}t\Big).$$

Si osservi che $\theta(t)$ tende ai valori $-\pi$ e π (cioè la relativa soluzione di (7.7) tende ai due equilibri $(-\pi, 0)$ e $(\pi, 0)$) rispettivamente se $t \to -\infty$ e $t \to \infty$, dunque l'orbita non è periodica. Una tale orbita, che connette due equilibri distinti in tempo infinito, viene detta *eteroclina*; nel caso in cui connette un equilibrio con se stesso si dice invece *omoclina*. Vale la pena notare che per dimostrare, come a volte si dice in casi come questo, che il "periodo di oscillazione è infinito" non serviva calcolare esplicitamente la soluzione. Infatti tale tempo di oscillazione coincide col valore dell'integrale

$$\sqrt{\frac{\ell}{2g}}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1}{\sqrt{1+\cos\varphi}}\,d\varphi,$$

che è un integrale improprio in entrambi gli estremi di integrazione. Per valutarne la convergenza basta utilizzare il criterio di asintoticità: sviluppando il coseno in serie di Taylor con punto iniziale π si ottiene $\cos\varphi = \cos\pi - \operatorname{sen}\pi(\varphi-\pi) - \frac{\cos\pi}{2}(\varphi-\pi)^2 + o\big((\varphi-\pi)^2\big)$ da cui $1+\cos\varphi = \frac{1}{2}(\varphi-\pi)^2 + o\big((\varphi-\pi)^2\big)$. Di conseguenza la funzione $\sqrt{1+\cos\varphi}$ è asintotica a $\frac{1}{\sqrt{2}}(\pi-\varphi)$ per $\varphi \to \pi^-$, perciò

$$\int^{\pi}\frac{1}{\sqrt{1+\cos\varphi}}\,d\varphi \sim \int^{\pi}\frac{1}{\pi-\varphi}\,d\varphi = +\infty,$$

e l'integrale, dunque il tempo di oscillazione (o, meglio, di percorrenza dell'orbita) è infinito.

Osservazione 7.9 Per la generica equazione conservativa di ordine due

$$y'' = g(y)$$

e il relativo integrale primo dato dall'energia

$$E(y, y') = \frac{(y')^2}{2} + V(y) = \frac{(y')^2}{2} - \int^y g(s)\, ds,$$

è sempre possibile risolvere l'equazione $E(y, y') = E_0 := E(y_0, y_0')$ in funzione di y' ottenendo l'equazione differenziale di ordine 1

$$y' = \pm\sqrt{2(E_0 - V(y))},$$

la quale permette di ricavare informazioni sulla soluzione nonché, potendola integrare, la soluzione stessa.

La ricerca di integrali primi

Dopo avere compreso che la conoscenza di eventuali integrali primi per un sistema di equazioni differenziali permette di ottenere molte informazioni sul comportamento delle soluzioni, resta il problema di come fare per trovarli, sempre che ne esistano. Nel caso di sistemi planari autonomi del tipo

$$\begin{cases} x' = a(x, y) \\ y' = b(x, y), \end{cases} \tag{7.12}$$

con $a, b : A \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ continue, esiste un metodo che utilizza le 1-forme differenziali. L'idea è sostanzialmente la seguente: se è possibile esprimere la variabile t in funzione di x (oppure di y) si ottiene, almeno formalmente

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}\frac{dt}{dx} = \frac{y'}{x'} = \frac{b(x, y)}{a(x, y)}, \tag{7.13}$$

che è una singola equazione scalare dove x è ora la variabile indipendente e $y = y(x)$ quella dipendente. Procedendo ancora formalmente si ha

$$a(x, y)dy = b(x, y)dx \quad \Longrightarrow \quad \omega(x, y) := -b(x, y)dx + a(x, y)dy = 0.$$

In definitiva ci si aspetta che la 1-forma $\omega(x, y)$ sia nulla. Non solo: se ω è esatta in A cioè esiste una primitiva $F \in C^1(A)$ tale che $dF = \omega$ allora ci si aspetta che $dF = 0$ cioè che F sia costante lungo le soluzioni di (7.12). In effetti, questo discorso può essere formalizzato correttamente.

Proposizione 7.10 *Dato il sistema* (7.12) *con* $a, b : A \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *continue, se la* 1*-forma* $\omega(x, y) = -b(x, y)dx + a(x, y)dy$ *è esatta allora ogni sua primitiva è un integrale primo di* (7.12).

Dimostrazione Per ipotesi esiste $F \in C^1(A)$ tale che $dF = \omega$ cioè $\nabla F(x, y) = (-b(x, y), a(x, y))$. Il campo vettoriale associato al sistema (7.12) è $g(x, y) = (a(x, y), b(x, y))$ quindi si ha $\langle \nabla F(x, y), g(x, y)\rangle = 0$ in A e per il Lemma 7.3 F è integrale primo del sistema. □

Ricordiamo che se una forma $\omega(x, y) = \omega_1(x, y)dx + \omega_2(x, y)dy$ è esatta, le sue primitive in un dominio rettangolare A (o in un sottodominio rettangolare di A) si ottengono mediante la seguente formula

$$F(x, y) = k + \int_{x_0}^{x} \omega_1(s, y_0)\, ds + \int_{y_0}^{y} \omega_2(x, z)\, dz, \tag{7.14}$$

con $k \in \mathbb{R}$ costante e dove (x_0, y_0) è un qualsiasi punto fissato in A.

Le idee che hanno portato alla Proposizione 7.10 possono essere estese a opportune equazioni scalari non autonome del tipo

$$y' = -\frac{p(t, y)}{q(t, y)}, \tag{7.15}$$

dove $f(t, y) := -\frac{p(t,y)}{q(t,y)}$ è definita e continua in un aperto Ω. Scrivendo $y' = \frac{dy}{dt}$ e operando formalmente come sopra si ottiene

$$\omega(t, y) = p(t, y)dt + q(t, y)dy = 0.$$

Si osservi che introducendo l'ulteriore equazione $t' = 1$ per la variabile t l'equazione (7.15) è equivalente al sistema planare autonomo

$$\begin{cases} y' = -\dfrac{p(t, y)}{q(t, y)} \\ t' = 1, \end{cases} \tag{7.16}$$

e la forma $\omega(t, y)$ coincide con la forma associata al sistema moltiplicata per il fattore non nullo $q(t, y)$. Per quanto visto sopra ogni primitiva $F(t, y)$ della forma $\omega(t, y)$ è un integrale primo del sistema (7.16) da cui segue che $F(t, y(t))$ è costante lungo le soluzioni dell'equazione (7.15).

Proposizione 7.11 *Data l'equazione* (7.15) *con* $f(t, y) := -\frac{p(t,y)}{q(t,y)}$ *definita e continua in un aperto* Ω*, se la* 1*-forma* $\omega(t, y) = p(t, y)dt + q(t, y)dy$ *è esatta, detta* $F(t, y)$ *una sua primitiva in* Ω *si ha che* $F(t, y(t))$ *è costante per ogni soluzione di* (7.15).

Dimostrazione Per ipotesi esiste $F \in C^1(\Omega)$ tale che $dF = \omega$ cioè $\nabla F(t,y) = (p(t,y), q(t,y))$, perciò se $y(t)$ è soluzione di (7.15) si ha

$$\frac{d}{dt}F(t,y(t)) = \frac{\partial F}{\partial t}(t,y(t)) + \frac{\partial F}{\partial y}(t,y(t))y'(t) = p(t,y(t)) + q(t,y(t))y'(t) = 0,$$

da cui la tesi. □

Diversamente dalla Proposizione 7.10, dove l'integrale primo $F(x,y)$ fornisce una relazione chiusa tra le componenti x e y della soluzione, quindi permette di individuarne l'orbita, nel caso della Proposizione 7.11 se $F(t,y)$ è un integrale primo di ω, risolvendo l'equazione $F(t,y) = c$ (con c determinato dalle condizioni iniziali) si ottiene proprio la soluzione $y = y(t)$.

Esempio 7.12 Consideriamo l'equazione del primo ordine

$$y' = \frac{t^2 - y^2}{2ty}, \tag{7.17}$$

dove il campo vettoriale $f(t,y) = \frac{t^2-y^2}{2ty}$ è definito e di classe C^∞ al di fuori degli assi coordinati. Si hanno quindi esistenza e unicità locale delle soluzioni dei problemi di Cauchy. La 1-forma associata $\omega(t,y) = (y^2 - t^2)dt + 2tydy$ soddisfa $\partial_y(y^2 - t^2) = 2y = \partial_t(2ty)$ dunque è chiusa perciò, essendo definita in $\mathbb{R}^2$, è anche esatta. Per (7.14) una sua primitiva in $\mathbb{R}^2$ è data da

$$F(t,y) = \int_0^t (-s^2)\,ds + \int_0^y 2tz\,dz = -\frac{t^3}{3} + ty^2.$$

Per la Proposizione 7.11 $F(t,y)$ è costante lungo le soluzioni dell'equazione differenziale; più precisamente si avrà $F(t,y(t)) = F(t_0,y_0)$ dove si è fissata la condizione iniziale $y(t_0) = y_0$.
In particolare, è possibile trovare le soluzioni risolvendo in y l'equazione $F(t,y) = c$ delle linee di livello c di F. Se $c = 0$ si ottiene

$$ty^2 - \frac{t^3}{3} = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad t\Big(y - \frac{t}{\sqrt{3}}\Big)\Big(y + \frac{t}{\sqrt{3}}\Big) = 0,$$

che fornisce le due soluzioni $y_+(t) = t/\sqrt{3}$ e $y_-(t) = -t/\sqrt{3}$, corrispondenti al livello 0 di F. Se $c \neq 0$, risolvendo l'equazione $F(t,y) = c$ si ottiene

$$y = y(t) = \pm\sqrt{\frac{t^2}{3} + \frac{c}{t}}, \tag{7.18}$$

che al variare di c fornisce tutte le soluzioni. Il quadro complessivo delle traiettorie è delineato in Figura 7.10.

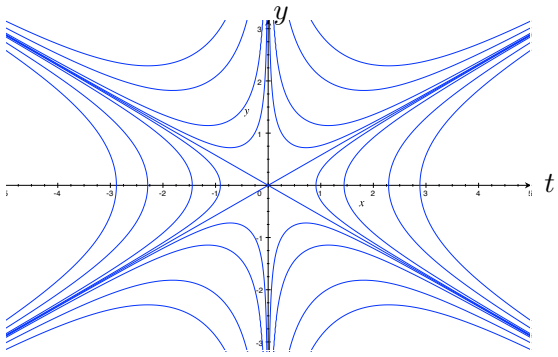


Figura 7.10: Andamento generale delle soluzioni di (7.17)

Osservazione 7.13 Per il sistema

$$\begin{cases} x' = 2y \\ y' = x^2 - y^2 + 2x, \end{cases}$$

la relativa 1-forma è $\omega(x,y) = (y^2 - x^2 - 2x)dx + 2ydy$, banalmente non chiusa dunque non esatta, e non è possibile applicare la Proposizione 7.10.

In realtà non è necessario che la 1 forma $\omega(x,y) = -b(x,y)dx + a(x,y)dy$ della Proposizione 7.10 sia esatta ma è sufficiente che ammetta un cosiddetto *fattore integrante* cioè una funzione $\lambda(x,y)$ continua in A con $\lambda(x,y) \neq 0$ e tale che la 1-forma $\lambda\omega$ sia esatta. In questo caso ogni primitiva di $\lambda\omega$ è un integrale primo del sistema. Infatti, se $dF = \lambda\omega$ si ha

$$\langle \nabla F, g\rangle = \langle \lambda(-b,a),(a,b)\rangle = \lambda\langle(-b,a),(a,b)\rangle = 0,$$

e F è costante lungo le soluzioni del sistema. La medesima osservazione può chiaramente essere estesa anche alla forma $\omega(t,y)$ della Proposizione 7.11. Questa strategia verrà utilizzata, per esempio, nello studio del sistema preda-predatore di Lotka-Volterra (7.26).

Problema: come trovare un fattore integrante? In generale, data una 1-forma $\omega(x,y) = p(x,y)dx + q(x,y)dy$ di classe $C^1(A)$ si vuole cercare un fattore integrante $\lambda(x,y) \in C^1(A)$ con $\lambda \neq 0$, in modo tale che la forma $\lambda\omega$ sia esatta. Se A è semplicemente connesso, è sufficiente verificare che $\lambda\omega$ sia chiusa, cioè che

$$\frac{\partial(\lambda p)}{\partial y} = \frac{\partial(\lambda q)}{\partial x},$$

ovvero

$$p\frac{\partial\lambda}{\partial y} - q\frac{\partial\lambda}{\partial x} = -\lambda\Big(\frac{\partial p}{\partial y} - \frac{\partial q}{\partial x}\Big), \tag{7.19}$$

per la quale utilizzeremo anche la scrittura $p\partial_y\lambda - q\partial_x\lambda = -\lambda(\partial_y p - \partial_x q)$. La (7.19) è un'equazione differenziale alle *derivate parziali* nell'incognita $\lambda(x, y)$. Non è sempre semplice trovarne una soluzione, sebbene si possa dimostrare che l'equazione ammette infinite soluzioni.

In ogni caso, si può provare a vedere se esistono degli eventuali fattori integranti che dipendono da un'unica variabile, del tipo $\lambda(x)$ oppure $\lambda(y)$. Infatti, se per esempio $\lambda = \lambda(x)$ dipende solo da x, la (7.19) si riduce all'equazione

$$q\partial_x\lambda = \lambda(\partial_y p - \partial_x q)$$

che se $q \neq 0$, possibilmente in un sottodominio rettangolare A_1 di A, si riscrive nella forma

$$\partial_x\lambda = \frac{\partial_y p - \partial_x q}{q}\lambda.$$

Quest'ultima, nel caso in cui la funzione $f := (\partial_y p - \partial_x q)/q$ dipende solo da x, si riduce a un'equazione differenziale ordinaria lineare, la cui facile integrazione porta al fattore integrante nell'aperto A_1

$$\lambda(x) = \exp \int^x f(s)\, ds.$$

Ricapitolando, abbiamo dimostrato il seguente risultato

Proposizione 7.14 *Sia data la* 1*-forma* $\omega(x, y) = p(x, y)dx + q(x, y)dy$, $p, q \in C^1(A)$. *Se* A_1 *è un sottodominio rettangolare di* A *su cui* $q(x, y) \neq 0$ *e la funzione*

$$f(x) := \frac{\partial_y p(x, y) - \partial_x q(x, y)}{q(x, y)} \tag{7.20}$$

dipende solo da x*, allora la funzione*

$$\lambda(x) = \exp \int^x f(s)\, ds$$

è un fattore integrante in A_1 *per la* 1*-forma* ω*. Analogamente, se* $p(x, y) \neq 0$ *in* A_1 *e la funzione*

$$g(y) := \frac{\partial_x q(x, y) - \partial_y p(x, y)}{p(x, y)} \tag{7.21}$$

dipende solo da y*, allora la funzione*

$$\lambda(y) = \exp \int^y g(s)\, ds$$

è un fattore integrante in A_1 *per* ω.

DIMOSTRAZIONE Fatta sopra. □

Esempio 7.15 Riprendiamo l'esempio considerato nell'Osservazione 7.13

$$\begin{cases} x' = 2y \\ y' = x^2 - y^2 + 2x. \end{cases} \tag{7.22}$$

Si noti che il sistema è equivalente all'equazione non conservativa del secondo ordine $x'' = 2(x^2 - (x'/2)^2 + 2x)$. Cerchiamo un integrale primo: la 1-forma associata $\omega(x, y) = (y^2 - x^2 - 2x)dx + 2ydy$ non è chiusa/esatta. Verifichiamo se esiste un fattore integrante del tipo $\lambda(x)$; siccome

$$\frac{\partial_y(y^2 - x^2 - 2x) - \partial_x(2y)}{2y} = 1 =: f(x)$$

non dipende da y, per la proposizione precedente un fattore integrante è fornito da una soluzione dell'equazione

$$\frac{d\lambda}{dx} = \lambda$$

da cui, per esempio, $\lambda(x) = \mathrm{e}^x$. Si osservi che non è necessario verificare (7.20) per calcolare λ (sebbene (7.20) sia anche una condizione necessaria per la sua esistenza). Basta provare a imporre direttamente che la forma $\lambda(x)\omega(x, y)$ sia chiusa: se esiste un fattore integrante dipendente solo da x, tale condizione porta a una soluzione. Esemplificando, in questo caso si ha che $\lambda(x)\omega(x, y)$ è chiusa se e solo se

$$\partial_y\big(\lambda(x)(y^2 - x^2 - 2x)\big) = \partial_x(\lambda(x)2y)$$

da cui $2y\lambda(x) = 2y\lambda'(x)$ che è verificata per ogni (x, y) se e solo se $\lambda'(x) = \lambda(x)$, equazione già trovata sopra. Calcoliamo ora una primitiva di $\lambda\omega$ in $\mathbb{R}^2$: per qualche funzione derivabile $a(x)$ sarà

$$F(x, y) = \int 2y\mathrm{e}^x\, dy + a(x) = y^2\mathrm{e}^x + a(x).$$

Si dovrà dunque avere anche

$$\mathrm{e}^x(y^2 - x^2 - 2x) = \partial_x F(x, y) = y^2\mathrm{e}^x + a'(x),$$

da cui si ricava $a'(x) = -(x^2 + 2x)\mathrm{e}^x$. Integrando (per parti) si ottiene la soluzione $a(x) = -x^2\mathrm{e}^x$. Una primitiva di $\lambda\omega$ è allora $F(x, y) = (y^2 - x^2)\mathrm{e}^x$ e per l'Osservazione 7.13 e la Proposizione 7.10, se $(x(t), y(t))$ è soluzione del sistema si ha $F(x(t), y(t)) = (y^2(t) - x^2(t))\mathrm{e}^{x(t)} = c$, per ogni t di definizione, con c costante. L'analisi qualitativa del sistema proseguirà nel Capitolo 12.

Osservazione 7.16 L'idea alla base della Proposizione 7.14 è di cercare, se esiste, un fattore integrante costante lungo ciascuna retta della famiglia di equazione $x = c$, oppure di equazione $y = c$, con c costante. Si può generalizzare questo approccio, andando a cercare dei fattori integranti che siano costanti lungo le curve della famiglia di equazione $\phi(x, y) = c$, con $\phi : A \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ generica funzione differenziabile con $\nabla\phi(x, y) \neq 0$ per ogni (x, y). Vorremmo dunque che fosse $\lambda(x, y) = \mu(\phi(x, y))$ per qualche funzione reale di variabile reale $\mu(c)$. Dall'equazione (7.19) si ricava

$$p\mu'\partial_y\phi - q\mu'\partial_x\phi = -\mu(\partial_y p - \partial_x q),$$

da cui, potendo dividere,

$$\mu' = -\frac{\partial_y p - \partial_x q}{p\partial_y\phi - q\partial_x\phi}\mu.$$

Se la funzione

$$h(x, y) := -\frac{\partial_y p - \partial_x q}{p\partial_y\phi - q\partial_x\phi}$$

dipende in realtà solo da $\phi(x, y)$, ovvero si ha $h(x, y) = k(\phi(x, y))$ per qualche funzione k, ponendo $c = \phi(x, y)$ si ottiene l'equazione differenziale ordinaria $\mu'(c) = k(c)\mu(c)$ una cui soluzione è

$$\mu(c) = \exp \int^c k(s)\, ds.$$

Dalla quest'ultima si ricava il fattore integrante per la forma $\omega = pdx + qdy$ dato da

$$\lambda(x, y) = \mu(\phi(x, y)) = \exp \int^{\phi(x,y)} k(s)\, ds.$$

Una scelta classica per la funzione ϕ è data da $\phi(x, y) = ax + by$ con a, b non contemporaneamente nulli, per cui $\phi(x, y) = c$ è una famiglia di rette parallele. Se $b = 0$ oppure $a = 0$ si riottiene il caso considerato nella Proposizione 7.14. I medesimi argomenti si possono chiaramente applicare a una forma del tipo $\omega(t, y) = p(t, y)dt + q(t, y)dy$.

Esempio 7.17 Sia data l'equazione

$$y' = \frac{2t - 6}{y - t + 2},$$

il cui campo vettoriale è definito e di classe C^∞ fuori dalla retta di equazione $y - t + 2 = 0$. La 1-forma associata è $\omega(t, y) = -(2t - 6)dt + (y - t + 2)dy$ che

banalmente non è chiusa, dunque neanche esatta, in $\mathbb{R}^2$. Utilizziamo le idee dell'osservazione precedente e cerchiamo un fattore integrante della forma $\lambda(t,y) = \mu(at+by)$ per qualche $a, b \in \mathbb{R}$ e qualche funzione μ. Essendo

$$-\frac{\partial_y p - \partial_t q}{p\partial_y\phi - q\partial_t\phi} = -\frac{1}{-(2t-6)b-(y-t+2)a} = \frac{1}{(2b-a)t+ay+2a-6b},$$

affinché quest'ultima coincida con $k(at+by)$ per qualche funzione k, dovrà essere $(2b-a)/a = a/b$ da cui $a^2+ab-2b^2 = 0$, ovvero $(a-b)(a+2b) = 0$. Si trovano quindi due soluzioni: $a = b$, per esempio $a = b = 1$, oppure $a = -2b$, per esempio $a = 2$, $b = -1$. In corrispondenza della prima scelta, posto $c = t+y$ si ottiene

$$-\frac{\partial_y p - \partial_t q}{p\partial_y\phi - q\partial_t\phi} = \frac{1}{t+y-4} =: k(t+y) = k(c),$$

da cui l'equazione per μ

$$\mu'(c) = \frac{1}{c-4}\mu(c),$$

che ha come soluzione

$$\mu(c) = \exp\int^c \frac{1}{s-4}\,ds = |c-4|,$$

e in definitiva $\lambda(t,y) = \mu(t+y) = |t+y-4|$. Per comodità, al posto di questo prenderemo invece $\lambda(t,y) = 3(y+t-4)$. Tale fattore è non nullo fuori dalla retta di equazione $y+t-4 = 0$, perciò si può applicare la Proposizione 7.11 separatamente ai due aperti $\Omega_+ = \{(t,y) :\ y+t-4 > 0\}$ e $\Omega_- = \{(t,y) :\ y+t-4 < 0\}$. Da una verifica diretta si osserva poi che $y = -t+4$ è soluzione dell'equazione. Calcoliamo una primitiva di $\lambda\omega$ in $\mathbb{R}^2$: per qualche funzione derivabile $a(y)$ sarà

$$\begin{aligned}
F(t,y) &= \int -3(y+t-4)(2t-6)\,dt + a(y)\\
&= -3\Big[(y+t-4)^2(t-3) - \int (y+t-4)^2\,dt\Big] + a(y)\\
&= -3\Big[(y+t-4)^2(t-3) - \frac{(y+t-4)^3}{3}\Big] + a(y)\\
&= (y+t-4)^2(y-2t+5) + a(y).
\end{aligned}$$

Si dovrà dunque avere anche

$$3(y+t-4)(y-t+2) = \partial_y F(t,y) = 2(y+t-4)(y-2t+5) - 2(y+t-4)^2 + a'(y),$$

da cui si ricava $a'(y) = 0$ ovvero $a(y)$ costante (e a questo punto basta prendere $a = 0$). Una primitiva di $\lambda\omega$ è dunque $F(t, y) = (y+t-4)^2(y-2t+5)$ e per la Proposizione 7.11 si ha

$$F(t, y(t)) = (y(t) + t - 4)^2(y(t) - 2t + 5) = c,$$

per ogni t di definizione, con c costante. Si compari questo risultato con quello che si troverà, con altri metodi, nell'Esempio 8.3.

Per esercizio, verificare che con la scelta $a = 2$, $b = -1$ si perviene al fattore integrante $\overline{\lambda}(t, y) = \frac{1}{\sqrt{|2t-y-5|}}$ e all'integrale primo

$$\overline{F}(t, y) = (1-y)\sqrt{|2t - y - 5|} - \frac{1}{3}\sqrt{|2t - y - 5|^3} = -\frac{2}{3}(y+t-4)\sqrt{|2t - y - 5|},$$

essenzialmente equivalente a $F(t, y)$.

Una seconda generalizzazione della Proposizione 7.14 è data dal seguente risultato.

Proposizione 7.18 *Data la* 1*-forma* $\omega(x, y) = p(x, y)dx + q(x, y)dy$ *,* p, q *di classe* C^1 *in* $A = I_1 \times I_2$ *con* I_1, I_2 *intervalli, se esistono* $f : I_1 \to \mathbb{R}$ *e* $g : I_2 \to \mathbb{R}$ *continue tali che*

$$\partial_y p(x, y) - \partial_x q(x, y) = f(x)q(x, y) - g(y)p(x, y), \tag{7.23}$$

allora per ogni fissato $(x_0, y_0) \in A$

$$\lambda(x, y) := \exp\Big(\int_{x_0}^{x} f(s)\, ds + \int_{y_0}^{y} g(s)\, ds\Big)$$

è un fattore integrante per ω*.*

Dimostrazione Per ipotesi si ha $\partial_x\lambda(x, y) = f(x)\lambda(x, y)$ e $\partial_y\lambda(x, y) = g(y)\lambda(x, y)$, perciò

$$\begin{aligned}\partial_y(\lambda p) - \partial_x(\lambda q) &= p\partial_y\lambda + \lambda\partial_y p - q\partial_x\lambda - \lambda\partial_x q \\ &= (pg - qf)\lambda + (\partial_y p - \partial_x q)\lambda = 0,\end{aligned}$$

dunque $\lambda\omega$ è forma chiusa ed essendo A semplicemente connesso è anche esatta. □

Esempio 7.19 Consideriamo il sistema planare

$$\begin{cases} x' = 2x^3 - xy \\ y' = -2x^2y - y^2, \end{cases} \tag{7.24}$$

la cui 1-forma associata è

$$\omega(x,y) = (2x^2y + y^2)dx + (2x^3 - xy)dy.$$

Cerchiamo due funzioni del tipo $f(x) = a/x$ e $g(y) = b/y$ affinché valgano le ipotesi della proposizione precedente. Dovrà essere

$$\begin{aligned} &\partial_y p(x,y) - \partial_x q(x,y) = f(x)q(x,y) - g(y)p(x,y) \quad \iff \\ \iff \quad &(2x^2 + 2y) - (6x^2 - y) = a(2x^2 - y) - b(2x^2 + y) \\ \iff \quad &2x^2(a - b + 2) - y(a + b + 3) = 0 \end{aligned}$$

che è identicamente verificata se e solo se $a = -5/2$ e $b = -1/2$. Per la proposizione precedente

$$\lambda(x,y) = \exp\Big(-\frac{5}{2}\ln|x| - \frac{1}{2}\ln|y|\Big) = |x|^{-5/2}|y|^{-1/2}$$

è un fattore integrante. Una primitiva di

$$\lambda\omega = \frac{(2x^2y + y^2)dx + (2x^3 - xy)dy}{|x|^{5/2}|y|^{1/2}}$$

nell'aperto $x, y > 0$ è

$$\begin{aligned} F(x,y) &= \int_1^x \Big(\frac{2}{s^{1/2}} + \frac{1}{s^{5/2}}\Big)\,ds + \int_1^y \Big(\frac{2x^{1/2}}{z^{1/2}} - \frac{z^{1/2}}{x^{3/2}}\Big)\,dz \\ &= 4(\sqrt{x} - 1) - \frac{2}{3}\Big(\frac{1}{x^{3/2}} - 1\Big) + 4x^{1/2}(\sqrt{y} - 1) - \frac{2}{3x^{3/2}}(y^{3/2} - 1) \\ &= -\frac{10}{3} + 4\sqrt{xy} - \frac{2}{3}\frac{y}{x}\sqrt{\frac{y}{x}} = -\frac{10}{3} + \frac{2\sqrt{y}}{3x\sqrt{x}}(6x^2 - y), \end{aligned}$$

quindi basta prendere come integrale primo $F(x,y) = \frac{\sqrt{y}}{x\sqrt{x}}(6x^2 - y)$ che sarà dunque costante lungo le soluzioni del sistema di equazioni differenziali con dati (x_0, y_0), $x_0, y_0 > 0$. Analogamente si trovano gli integrali primi negli altri tre quadranti. Per concludere l'analisi si osservi che $(0,0)$ è l'unico equilibrio del sistema e che i semiassi coordinati sono orbite di soluzioni.

Esercizio 7.20 Dato il sistema di equazioni differenziali nel piano

$$\begin{cases} x' = 2xy + y^2 \\ y' = -2yx^3 - 4x^4, \end{cases} \tag{7.25}$$

a) verificare che si hanno esistenza e unicità locale per le soluzioni del problema di Cauchy associato e determinare gli equilibri del sistema.

Detta $\omega(x, y) := (2yx^3 + 4x^4)dx + (2xy + y^2)dy$ la 1-forma associata

b) verificare che ω non è esatta in $\mathbb{R}^2$; determinare $a, b \in \mathbb{R}$ in modo che $\lambda(x, y) := \frac{1}{ax+by}$ sia un fattore integrante per ω e utilizzarlo per trovare un integrale primo del sistema in $\Omega_+ := \big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : ax + by > 0\big\}$ e $\Omega_- := \big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : ax + by < 0\big\}$; trovare infine un integrale primo di (7.25) in $\mathbb{R}^2$ e disegnarne qualitativamente gli insiemi di livello;

c) utilizzare c) per dimostrare che tutte le soluzioni massimali sono globalmente definite. Esistono soluzioni che esplodono in norma? E soluzioni periodiche non costanti?

d) Detta $\varphi(t) = (x(t), y(t))$ la soluzione massimale di (7.25) con dati iniziali $(x(0), y(0)) = (1, 2)$, dimostrare che esistono i limiti $\lim_{t\to-\infty} \varphi(t)$, $\lim_{t\to+\infty} \varphi(t)$ e calcolarli.

Il sistema preda-predatore di Lotka-Volterra

Consideriamo il sistema planare autonomo

$$\begin{cases} x' = x(a - by) \\ y' = y(cx - d), \end{cases} \tag{7.26}$$

con $a, b, c, d > 0$, caso particolare dei sistemi di Lotka-Volterra già introdotti in (6.3), che modella il caso di due specie una delle quali si ciba dell'altra. In particolare si assume che $x(t)$ rappresenti il numero delle prede (o la loro densità) e $y(t)$ quello dei predatori. Si assume inoltre che x abbia solo y come predatore, che y si cibi esclusivamente di x, e che le prede abbiano a disposizione una quantità di cibo costante pro capite (caso delle "risorse illimitate"). Sotto queste ipotesi l'evoluzione di x e y è modellata dal sistema (7.26). Facciamo alcune considerazioni iniziali sul modello. Se y è nullo in un certo istante, cioè c'è assenza di predatori, chiaramente sarà $y(t) = 0$ per ogni tempo e la seconda equazione è soddisfatta, mentre la prima si riduce

a $x' = ax$ legge dell'accrescimento esponenziale di Malthus con soluzioni $x(t) = x_0 e^{at}$ che esplodono per $t \to +\infty$ (per ovviare a questa conseguenza, fisicamente impossibile, si può modificare il presente modello nella direzione data dall'equazione di Verhulst (8.8)). In definitiva, in assenza di predatori le prede prosperano e si riproducono senza limiti. Se, invece, x è nulla a un certo tempo allora sarà $x(t) = 0$ per sempre e la seconda equazione si riduce a $y' = -dy$ legge della decrescita esponenziale con soluzione $y(t) = y_0 e^{-dt}$ che tende a 0 per $t \to +\infty$. In conclusione, in assenza di prede anche i predatori tendono a estinguersi.

Si osservi che nella prima equazione il cosiddetto *tasso di accrescimento* di x è $a(y) = a - by$ dipendente da y: la presenza dei predatori diminuisce il tasso netto di crescita delle prede e se i predatori sono in numero elevato cioè, più precisamente, $a - by < 0$, il numero delle prede tende a decrescere. Specularmente il tasso di accrescimento dei predatori è dato da $d(x) = (cx - d)$ ed è più elevato quanto più elevato è il numero di prede.

Il campo vettoriale $f(x, y) = (x(a - by), y(cx - d))$ è di classe C^∞ perciò si hanno esistenza e unicità per le soluzioni dei problemi di Cauchy. Poiché f ha crescita quadratica non valgono invece le ipotesi dei teoremi di esistenza globale. Dall'analisi appena svolta segue che i semiassi positivi degli assi coordinati x e y sono orbite di soluzioni. Infatti se $(x_0, y_0) = (x_0, 0)$, con $x_0 \neq 0$, la soluzione è data da $(x(t), y(t)) = (x_0 e^{at}, 0)$ la cui immagine è il semiasse positivo delle ascisse, mentre se $(x_0, y_0) = (0, y_0)$, con $y_0 \neq 0$, la soluzione è data da $(x(t), y(t)) = (0, y_0 e^{-dt})$ la cui immagine è il semiasse positivo delle ordinate. Ci limiteremo quindi ad analizzare l'evoluzione nel quadrante positivo $x, y > 0$. Si noti che per l'unicità delle soluzioni se un dato iniziale (x_0, y_0) appartiene all'interno del quadrante, la relativa soluzione non potrà mai toccare gli assi perciò si avrà $x(t), y(t) > 0$ per ogni t di definizione. Gli equilibri, soluzioni del sistema $x(a - by) = 0$, $y(cx - d) = 0$ sono $E_1 = (0, 0)$ e $E_2 = (d/c, a/b)$. Studiamo la loro stabilità lineare: poiché

$$Df(x, y) = \begin{pmatrix} a - by & -bx \\ cy & cx - d \end{pmatrix}$$

allora segue che

$$Df(0, 0) = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & -d \end{pmatrix}, \qquad Df(d/c, a/b) = \begin{pmatrix} 0 & -ad/c \\ ca/b & 0 \end{pmatrix}.$$

La prima matrice ha un autovalore positivo e uno negativo quindi, per il Teorema 6.23, E_1 è un equilibrio linearmente instabile mentre la seconda matrice ha due autovalori immaginari puri con parte reale nulla dunque,

sempre per il Teorema 6.23, E_2 è linearmente stabile ma non asintoticamente stabile. Per il Teorema 6.22 E_1 è instabile anche per il sistema (7.26), mentre nulla si può dire a priori sulla stabilità (nonlineare) di E_2.

In relazione alla Proposizione 7.10 la 1-forma associata al sistema è data da $\omega(x,y) = -y(cx-d)dx + x(a-by)dy$; tale forma, definita in $\mathbb{R}^2$, non è esatta perché non è chiusa. Cerchiamo un fattore integrante utilizzando la Proposizione 7.18: affinché valga (7.23) dovrà essere

$$(d-cx)-(a-by) = x(a-by)f(x) - y(d-cx)g(y)$$

per qualche $f(x)$ e $g(y)$, ovvero

$$(xf(x)+1)(a-by) = (yg(y)+1)(d-cx) \qquad \Longrightarrow \qquad \frac{xf(x)+1}{d-cx} = \frac{yg(y)+1}{a-by}.$$

Quest'ultima può essere verificata solamente se entrambe le funzioni a primo e secondo membro coincidono con una (medesima) costante. Prendendo per facilità tale costante uguale a zero si ottiene $f(x) = -1/x$, $g(y) = -1/y$. Per la Proposizione 7.18 un fattore integrante per ω nel primo quadrante è dato da

$$\lambda(x,y) := \exp\Big(-\int^x \frac{1}{s}\,ds - \int^y \frac{1}{s}\,ds\Big) = \frac{1}{xy}.$$

In realtà, per comodità sceglieremo $\lambda(x,y) = -\frac{1}{xy}$ per cui

$$\lambda\omega(x,y) = \Big(c - \frac{d}{x}\Big)dx + \Big(b - \frac{a}{y}\Big)dy,$$

che è banalmente chiusa, dunque esatta. Una sua primitiva è data da

$$F(x,y) = \int^x \Big(c - \frac{d}{s}\Big)\,ds + \int^y \Big(b - \frac{a}{z}\Big)\,dz = cx - d\ln x + by - a\ln y,$$

che, per l'Osservazione 7.13, è un integrale primo del sistema (7.26). Si avrà quindi $F(x(t),y(t)) = F(x_0,y_0)$ per ogni t di definizione. È interessante osservare come l'integrale primo fosse facilmente ottenibile operando formalmente come in (7.13) che in questo caso diventa

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y(cx-d)}{x(a-by)} = \frac{c-d/x}{ay-b},$$

da cui

$$\omega_1(x,y) := \Big(c - \frac{d}{x}\Big)dx + \Big(b - \frac{a}{y}\Big)dy = 0,$$

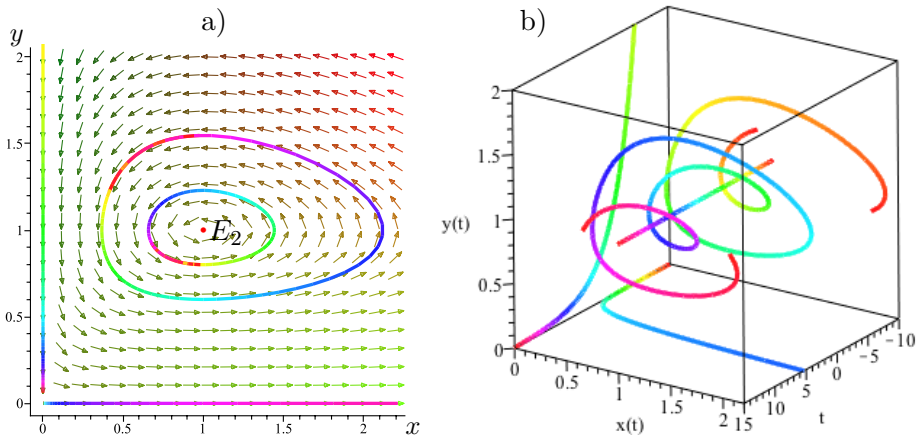


Figura 7.11: Quadro generale a) delle orbite, b) delle traiettorie

e la forma ω_1, coincidente con $\lambda\omega$, è banalmente chiusa.

Si può dimostrare (provare a farlo per esercizio) che gli insiemi di livello di F o sono vuoti, o contengono solamente l'equilibrio E_2, oppure sono delle curve chiuse semplici. In particolare le orbite delle soluzioni sono sempre limitate, dunque per il criterio di compattezza c'è esistenza globale in futuro e passato. Analogamente al caso del pendolo, si può poi dimostrare (svolgere i dettagli per esercizio) che le soluzioni sono tutte periodiche. Si osservi che ciò deve essere aspettato dallo studio della convessità della funzione F. Infatti, essendo $\nabla F(x,y) = (c - d/x, b - a/y)$ si ha banalmente $\nabla F(d/c, a/b) = 0$ ovvero E_2 è punto critico di F; inoltre

$$HF(x,y) = \begin{pmatrix} d/x^2 & 0 \\ 0 & a/y^2 \end{pmatrix},$$

dunque $HF(d/c, a/b)$ è definito positivo in E_2. Se ne deduce che E_2 è un minimo relativo di F e localmente vicino a E_2 il suo grafico assomiglia a quello di un paraboloide ellittico, per cui in definitiva ci si aspetta che gli insiemi di livello leggermente maggiore di quello dell'equilibrio siano curve chiuse semplici. In realtà, essendo l'hessiano definito positivo in ogni punto, la funzione F è strettamente convessa, E_2 è un minimo assoluto e tutti gli insiemi di livello hanno la proprietà di essere curve chiuse semplici.

L'andamento complessivo del campo vettoriale insieme alle orbite di alcune soluzioni è delineato in a) di Figura 7.11 mentre quello delle relative traiettorie in b) della medesima figura. Si possono notare l'equilibrio E_2, due soluzioni periodiche, una soluzione contenuta nel piano $x = 0$, relativa all'estinzione dei predatori in assenza di prede, e infine una contenuta nel

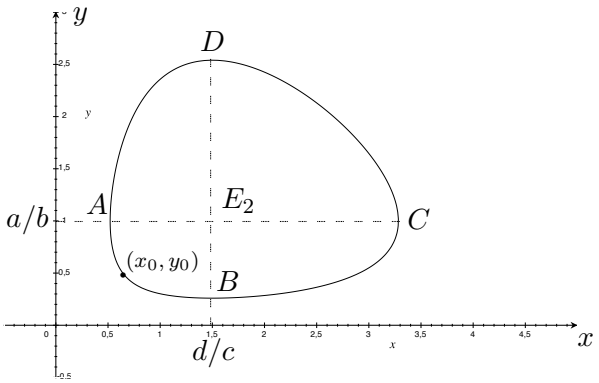


Figura 7.12: Soluzione periodica del sistema preda-predatore

piano $y = 0$, relativa alla crescita illimitata delle prede in assenza di predatori. L'evoluzione all'interno del primo quadrante è dunque periodica e l'orbita è una curva chiusa semplice come in Figura 7.12. L'interpretazione è la seguente: supponiamo di partire al tempo $t_0 = 0$ da una configurazione iniziale in cui sia le prede che i predatori siano piccoli in numero, più precisamente $x_0 < d/c$ e $y_0 < a/b$. Allora ci sono troppe poche prede e i predatori tendono a decrescere mentre le prede, sempre perché la predazione è scarsa, possono invece prosperare e crescere: l'orbita della soluzione si muove sull'arco di estremi A e B in Figura 7.12 dove inizialmente $x(t)$ cresce e $y(t)$ decresce. Quando le prede saranno aumentate di numero, più precisamente quando $x(t_2) \geq d/c$ e l'orbita avrà oltrepassato il punto B, saranno abbastanza numerose affinché anche i predatori possano crescere: l'orbita percorre l'arco di estremi B e C in Figura 7.12. La crescita del numero dei predatori aumenterà anche la predazione, e una volta che questi ultimi, grazie all'abbondanza di prede, saranno cresciuti fino a raggiungere e superare il valore soglia a/b nel punto C causeranno poi una decrescita del numero di prede a causa dell'eccessiva predazione: in questa fase l'orbita percorre l'arco di estremi C e D e si avranno allora $x(t)$ decrescente e $y(t)$ ancora crescente. Le prede decresceranno fino a raggiungere il valore d/c (e nel contempo i predatori raggiungeranno il loro valore massimo) nel punto D oltre il quale, a causa della loro scarsità, determineranno anche la decrescita dei predatori che saranno troppi rispetto alle prede di cui si nutrono: in questa fase sia le prede che i predatori decrescono e l'orbita percorrerà l'arco di estremi D e A. Quando i predatori, decrescendo, avranno raggiunto nuovamente la soglia a/b in corrispondenza del punto A la predazione tornerà scarsa e le prede potranno tornare a prosperare: l'orbita percorrerà l'arco di estremi A e B ripassando per (x_0, y_0) e ritornando dunque allo stato iniziale.

Capitolo 8

Alcune classi di equazioni integrabili

Nella maggior parte dei casi non è possibile integrare esplicitamente un'equazione o sistema di equazioni differenziali, ovvero non è possibile scrivere esplicitamente le sue soluzioni in termini di funzioni elementari. Esistono però alcune classi di equazioni che possono essere ricondotte, mediante opportune trasformazioni delle variabili dipendenti e/o indipendenti a equazioni più semplici, per esempio equazioni a variabili separabili, e dunque, almeno in linea teorica, essere integrate. In questo capitolo affronteremo lo studio delle equazioni di Bernoulli, delle equazioni omogenee o a esse riconducibili, delle equazioni di Eulero, e di alcune classi di equazioni di ordine 2 in forma normale oppure in forma non normale. Il prossimo capitolo affronterà invece il caso dei sistemi lineari.

Equazioni lineari a coefficienti continui di ordine 1

Sono le equazioni della forma

$$y' = a(t)y + b(t), \tag{8.1}$$

dove $a, b : I \to \mathbb{R}$ sono funzioni continue assegnate. Lo studio delle equazioni/sistemi lineari verrà affrontato nella sua generalità nel prossimo capitolo, ma anticipiamo la risoluzione dell'equazione (8.1) che sarà utilizzata nella prossima sezione. Grazie a uno stratagemma è possibile ottenere una formula risolutiva per (8.1): detta $A(t)$ una qualsiasi primitiva di $a(t)$ in I, moltiplicando ambo i membri per il *fattore integrante* $\exp(-A(t))$ (si verifichi che è anche un fattore integrante per la 1-forma

associata $\omega(t,y) = (a(t)y + b(t))dt - dy$ nel senso dell'Osservazione 7.13) e riordinando i termini si ottiene l'equazione equivalente

$$y'(t)\mathrm{e}^{-A(t)} - y(t)a(t)\mathrm{e}^{-A(t)} = \mathrm{e}^{-A(t)}b(t).$$

A primo membro si riconosce la derivata di un prodotto cioè

$$\big(y(t)\mathrm{e}^{-A(t)}\big)' = \mathrm{e}^{-A(t)}b(t), \tag{8.2}$$

e integrando indefinitamente si ottiene

$$y(t)\mathrm{e}^{-A(t)} = \int \mathrm{e}^{-A(t)}b(t)\,dt,$$

da cui segue la formula risolutiva

$$y(t) = \mathrm{e}^{A(t)} \int \mathrm{e}^{-A(t)}b(t)\,dt. \tag{8.3}$$

La risoluzione di (8.1) viene quindi ricondotta al calcolo di due integrali indefiniti: prima quello di $a(t)$ e poi quello di $\mathrm{e}^{-A(t)}b(t)$ con $A(t)$ primitiva di $a(t)$. Volendo poi risolvere il problema di Cauchy associato

$$\begin{cases} y' = a(t)y + b(t) \\ y(t_0) = y_0, \end{cases} \tag{8.4}$$

conviene scegliere $A(t)$ come la primitiva di $a(t)$ che si annulla in t_0, ovvero $A(t) = \int_{t_0}^t a(s)\,ds$, e integrando (8.2) tra t_0 e t si ottiene

$$\Big[y(s)\mathrm{e}^{-A(s)}\Big]_{t_0}^t = \int_{t_0}^t \mathrm{e}^{-A(s)}b(s)\,ds \quad\Longrightarrow\quad y(t)\mathrm{e}^{-A(t)} - y_0 = \int_{t_0}^t \mathrm{e}^{-A(s)}b(s)\,ds,$$

da cui si ricava la formula risolutiva per (8.4)

$$y(t) = \mathrm{e}^{A(t)}\Big[y_0 + \int_{t_0}^t \mathrm{e}^{-A(s)}b(s)\,ds\Big], \qquad A(t) = \int_{t_0}^t a(s)\,ds. \tag{8.5}$$

Nel caso di un'equazione lineare a coefficienti costanti

$$y' = ay + b, \tag{8.6}$$

si può utilizzare la formula appena trovata ma è più semplice ricordare che la generica soluzione dell'equazione è somma della generica soluzione dell'omogenea associata $z' = az$, ovvero $z(t) = c\mathrm{e}^{at}$, e di una soluzione

particolare (si veda quanto scritto a p. 179). In questo caso basta osservare che l'equazione ammette banalmente l'equilibrio $a\bar{y} + b = 0$ cioè $\bar{y} = -b/a$, perciò la generica soluzione di (8.6) è

$$y(t) = c\mathrm{e}^{at} - \frac{b}{a}.$$

Volendo trovare la soluzione del relativo problema di Cauchy con dati iniziali $y(t_0) = y_0$, basta imporre quest'ultima condizione nella soluzione generale appena trovata, ottenendo

$$y(t) = \Big(y_0 + \frac{b}{a}\Big)\mathrm{e}^{a(t-t_0)} - \frac{b}{a}.$$

Equazioni di Bernoulli

Sono le equazioni della forma

$$y' = a(t)y + b(t)y^\alpha, \tag{8.7}$$

dove $a, b : I \to \mathbb{R}$ sono funzioni continue, α è un numero reale assegnato. Tutte queste equazioni possono ricondursi a equazioni lineari. Ci sono vari casi: se $\alpha = 0$ l'equazione diventa $y' = a(t)y + b(t)$ che è un'equazione lineare a coefficienti continui, già affrontata nella sezione precedente. Se $\alpha = 1$, l'equazione si riduce a $y' = (a(t) + b(t))y$ ancora lineare, stavolta anche omogenea.

Sia ora $\alpha > 1$. In questo caso il campo vettoriale $f(t, y) = a(t)y + b(t)y^\alpha$ è continuo con derivata parziale rispetto a y continua in $I \times]0, +\infty[$ (se $\alpha \in \mathbb{N}$ la derivata parziale è addirittura di classe $C^\infty(I \times \mathbb{R})$), dunque c'è esistenza e unicità per i relativi problemi di Cauchy. In particolare, se $\alpha \in \mathbb{N}$ la soluzione $y(t) = 0$ è un equilibrio dell'equazione, dunque è l'unica soluzione tale che $y(t_0) = 0$ per qualche t_0. Se $y(t_0) = y_0 > 0$ si avrà quindi $y(t) > 0$ per ogni t di definizione, in particolare, dividendo l'equazione per y^α si ottiene

$$\frac{y'}{y^\alpha} = \frac{a(t)}{y^{\alpha-1}} + b(t) \qquad \Longrightarrow \qquad \frac{1}{1-\alpha}\Big(\frac{1}{y^{\alpha-1}}\Big)' = \frac{a(t)}{y^{\alpha-1}} + b(t).$$

Operando la sostituzione $z(t) = 1/y^{\alpha-1}(t)$ si ottiene un'equazione lineare a coefficienti continui per $z(t)$

$$z' = (1-\alpha)a(t)z + (1-\alpha)b(t),$$

risolta la quale si ricava la soluzione $y(t) = z^{\frac{1}{1-\alpha}}(t)$. Nel caso in cui $\alpha \in \mathbb{N}$ (o più in generale $\alpha \in \mathbb{Z}$) il metodo funziona anche se y_0 e $y(t)$ sono negativi.

L'analisi appena svolta è applicabile anche al caso $\alpha < 1$. Più precisamente permette di trovare la forma delle soluzioni nel sottointervallo del dominio sul quale sono strettamente positive. In particolare, si osservi che quando $0 < \alpha < 1$, $\alpha \in \mathbb{Q}$, il campo vettoriale f non è di classe C^1, né localmente lipschitziano, in $y = 0$ a causa del termine y^α, anzi proprio grazie a tale termine l'equazione potrebbe perdere l'unicità delle soluzioni dei problemi di Cauchy. Quindi non sarà più vero che tutte le soluzioni con $y_0 > 0$ rimangono sempre non nulle, e il quadro globale delle soluzioni sarà più complicato (basti pensare al classico caso $a(t) \equiv 0$, $b(t) \equiv 2$, $\alpha = 1/2$).

Esercizio 8.1 Si calcolino le soluzioni dell'equazione $ty' = -y^2 \ln t - 2y$.

L'equazione di Verhulst

Nel 1838 Verhulst pubblicò un'estensione del modello introdotto da Malthus per studiare l'evoluzione di una popolazione. Malthus, supponendo che la popolazione fosse omogenea, isolata e con risorse illimitate, aveva ottenuto un'equazione differenziale che doveva essere soddisfatta dal numero (o dalla densità) $y(t)$ degli individui della popolazione, più precisamente

$$y' = ay,$$

con $a > 0$, detto *tasso di accrescimento*, supposto costante. La soluzione generale dell'equazione è del tipo $y(t) = y_0 e^{at}$ e la popolazione tenderebbe a crescere a dismisura (esponenzialmente) per $t \to +\infty$, rendendo il modello poco verosimile. Uno dei principali problemi del modello di Malthus sta proprio nell'assumere che il tasso di accrescimento sia costante; in realtà, all'aumentare del numero di individui non si può più supporre che le risorse siano illimitate, e la competizione per il cibo tende a far abbassare il tasso di accrescimento, che dunque non sarà costante.

Il modello introdotto da Verhulst vuole tenere conto dell'effetto penalizzante sulla crescita di $y(t)$ causato dalla competizione. Tale effetto si può pensare direttamente proporzionale al numero di incontri tra gli individui, mentre quest'ultimo, in prima approssimazione, si può supporre proporzionale a y^2. Si deduce la seguente equazione

$$y' = ay - by^2 \tag{8.8}$$

con $a, b > 0$, detta comunemente *equazione logistica*. Si osservi che l'equazione si può scrivere $y' = (a - by)y$ dove ora $a(y) = a - by$ è il tasso di crescita analogo al coefficiente a nell'equazione di Malthus, e decresce

con l'aumentare di y ovvero del sovraffollamento. L'equazione di Verhulst è un'equazione di Bernoulli con $\alpha = 2$; operando la sostituzione $z = 1/y$ si ottiene l'equazione lineare a coefficienti costanti $z' = -az+b$ la cui soluzione generale è data da $z(t) = c\mathrm{e}^{-at} + b/a$ con $c \in \mathbb{R}$ perciò la soluzione generale dell'equazione di Verhulst è

$$y(t) = \frac{1}{z(t)} = \frac{1}{c\mathrm{e}^{-at} + b/a}.$$

Volendo infine la soluzione del relativo problema di Cauchy con dato iniziale $y(0) = y_0 > 0$ si ottiene come soluzione

$$y(t) = \frac{1}{z(t)} = \frac{ay_0}{(a - by_0)\mathrm{e}^{-at} + by_0}.$$

Si noti che $\lim_{t\to+\infty} y(t) = a/b$, cioè ogni soluzione tende asintoticamente all'equilibrio a/b, detto *capacità portante dell'ambiente*, che rappresenta il numero di individui sostenibile dall'ambiente e dalle risorse presenti.

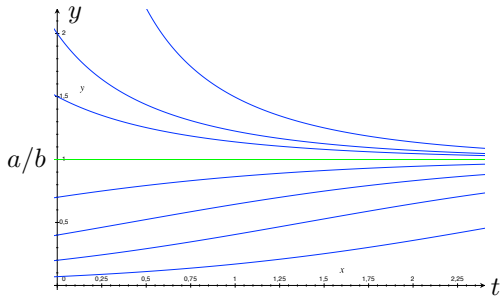


Figura 8.1: Soluzioni dell'equazione di Verhulst

In Figura (8.1) si osservi la traiettoria dell'equilibrio (in verde) e le altre traiettorie (in blu) convergenti all'equilibrio.

Equazioni omogenee

Sono le equazioni della forma

$$y' = f(t, y), \tag{8.9}$$

dove $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R}$ è una funzione continua e omogenea di grado 0, cioè tale che $f(\lambda t, \lambda y) = f(t, y)$ per ogni $\lambda \neq 0$ e $(t, y) \in \mathbb{R}^2$. Fanno parte di questa classe le equazioni della forma

$$y' = g\Big(\frac{y}{t}\Big).$$

Proprio queste ultime suggeriscono la sostituzione $z = y/t$ ovvero $y = tz$, per la quale si ha $y' = z + tz'$ e al contempo, per $t \neq 0$, $y' = f(t, y) = f(t, tz) = f(1, z)$. Si ottiene infine

$$z + tz' = f(1, z) \qquad \Longrightarrow \qquad z' = \frac{f(1, z) - z}{t},$$

che è un'equazione a variabili separabili.

Esempio 8.2 Consideriamo l'equazione

$$y' = \frac{t^2 - y^2}{2ty},$$

già studiata nell'Esempio 7.12. Il campo vettoriale $f(t, y) = \frac{t^2-y^2}{2ty}$, definito e di classe C^∞ al di fuori degli assi coordinati, è omogeneo di grado 0 (si noti che si può scrivere $f(t, y) = \frac{1-(y/t)^2}{2(y/t)}$). Utilizzando la sostituzione $y = tz$ si ottiene l'equazione

$$tz' = \frac{1 - z^2}{2z} - z \qquad \Longrightarrow \qquad z' = \frac{1 - 3z^2}{2zt}.$$

Il campo vettoriale associato è di classe C^∞ fuori dagli assi; si osservi inoltre che $z = \pm 1/\sqrt{3}$ sono gli unici due equilibri. Per unicità, al di fuori di questi sarà sempre $1 - 3z^2 \neq 0$ e separando le variabili si ottiene

$$\int \frac{2z}{1 - 3z^2}\, dz = \int \frac{dt}{t} \qquad \Longrightarrow \qquad -\frac{1}{3} \ln |1 - 3z^2| = \ln |t| + d,$$

con $d \in \mathbb{R}$, da cui si ricava

$$\ln |1 - 3z^2| = \ln \frac{1}{|t|^3} - 3d \qquad \Longrightarrow \qquad |1 - 3z^2| = \frac{a}{|t|^3},$$

dove si è posto $a = \mathrm{e}^{-3d} > 0$. Togliendo i valori assoluti, si ottiene infine

$$1 - 3z^2 = \frac{a}{t^3},$$

con $a \in \mathbb{R}$. Ritornando alle variabili y per cui $z = y/t$

$$1 - 3\frac{y^2}{t^2} = \frac{a}{t^3} \qquad \Longleftrightarrow \qquad ty^2 - \frac{t^3}{3} = c,$$

con $c = -a/3$, e si riottiene l'integrale primo già trovato nell'Esempio 7.12.

Equazioni riconducibili a equazioni omogenee o a variabili separabili

Consideriamo equazioni del tipo

$$y' = g(at + by + c), \tag{8.10}$$

dove $a, b \neq 0$ (altrimenti si integrano immediatamente). Posto $v = at + by$ si ottiene un'equazione per v

$$v' = a + by' = a + bg(v + c),$$

che è autonoma, dunque a variabili separabili.

Un'altra classe è data da

$$y' = g\left(\frac{at + by + c}{pt + qy + r}\right), \tag{8.11}$$

con a, b, p, q non tutti nulli. In questo caso si opera una trasformazione delle coordinate dipendenti e/o indipendenti, a seconda della posizione reciproca delle rette di equazione $at + by + c = 0$ e $pt + qy + r = 0$, come segue.

i) Se le due rette sono parallele, cioè esiste $\lambda \neq 0$ tale che $p = \lambda a$, $q = \lambda b$, si opera il cambiamento di variabile $v = at + by$ per cui

$$v' = a + by' = a + bg\left(\frac{v + c}{\lambda v + r}\right),$$

che è nuovamente autonoma, dunque a variabili separabili.

ii) Se le due rette sono incidenti, sia $(\bar{t}, \bar{y})$ il loro punto di intersezione. Poiché le due rette passano per tale punto, dovrà essere $at + by + c = a(t - \bar{t}) + b(y - \bar{y})$, $pt + qy + r = p(t - \bar{t}) + q(y - \bar{y})$. Mediante il cambiamento di coordinate, sia dipendenti che indipendenti, $(t, y) \mapsto (s, z)$ dove $s = t - \bar{t}$, $z = y - \bar{y}$ si ottiene la nuova equazione per $z = z(s)$

$$\frac{dz}{ds} = \frac{dy}{dt}\frac{dt}{ds} = g\left(\frac{as + bz}{ps + qz}\right),$$

che è un'equazione omogenea.

Esempio 8.3 Consideriamo l'equazione

$$y' = \frac{2t - 6}{y - t + 2}, \tag{8.12}$$

già affrontata nell'Esempio 7.17. Le due rette di equazione $2t - 6 = 0$ e $y - t + 2 = 0$ si intersecano nel punto $(3, 1)$; posto $s = t - 3$, $z = y - 1$ si ha

$2t-6=2s$, $y-t+2=z-s$ perciò si ottiene l'equazione (omogenea) per $z=z(s)$

$$\frac{dz}{ds}=\frac{2s}{z-s}.$$

Detto $w=z/s$ si ricava l'equazione a variabili separabili per w

$$w+sw'=\frac{2}{w-1} \qquad \Longleftrightarrow \qquad sw'=-\frac{w^2-w-2}{w-1}.$$

Gli equilibri sono $w=-1$ e $w=2$, ai quali corrispondono le soluzioni $y(t)=-t+4$ e $y(t)=2t-5$ dell'equazione originaria. Al di fuori degli equilibri si può utilizzare il metodo di separazione delle variabili, per cui

$$\int \frac{2}{3(w+1)}+\frac{1}{3(w-2)}\,dz=-\int \frac{1}{s}\,ds \qquad \Longrightarrow$$

$$\frac{2}{3}\ln|w+1|+\frac{1}{3}\ln|w-2|=-\ln|s|+a \qquad \Longrightarrow \qquad (w+1)^2(w-2)=\frac{c}{s^3},$$

con $a,c\in\mathbb{R}$. Tornando alle variabili (t,y) per le quali $w=\frac{y-1}{t-3}$ si ottiene

$$\Big(\frac{y-1}{t-3}+1\Big)^2\Big(\frac{y-1}{t-3}-2\Big)=\frac{c}{(t-3)^3} \quad \Longrightarrow \quad (y+t-4)^2(y-2t+5)=c.$$

Si osservi che si è ritrovata la primitiva $F(t,y)$ già calcolata nell'Esempio 7.17. Il quadro globale delle traiettorie è delineato in Figura 8.2.

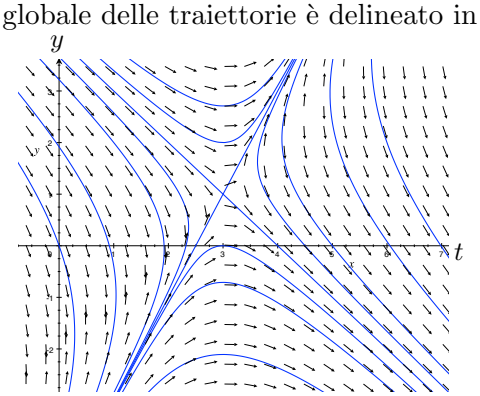


Figura 8.2: Andamento del campo vettoriale e delle traiettorie di (8.12)

Esercizio 8.4 Data l'equazione differenziale

$$y'=\frac{(y+2t-1)^2-3}{y+2t+1} \tag{8.13}$$

in $\Omega:=\big\{(t,y)\in\mathbb{R}^2:\ y+2t+1>0\big\}$, già incontrata nell'Esercizio 4.19,

a) determinare le relative soluzioni in forma implicita;

b) servirsi di a) per studiare l'intervallo massimale di esistenza del problema di Cauchy con dato iniziale $y(t_0) = y_0$ al variare di $(t_0, y_0) \in \Omega$. In particolare verificare che la soluzione $y_1(t)$ con dato iniziale $y(0) = 4$ è globalmente definita mentre la soluzione $y_2(t)$ con $y(0) = -1/2$ è globalmente definita in futuro ma non in passato;

c) utilizzare a)-b) per dimostrare l'esistenza dei limiti $\lim_{t\to\pm\infty} y_1(t)$ e calcolarli;

d) detto $]\alpha, +\infty[$ l'intervallo massimale d'esistenza di y_2, calcolare α e il $\lim_{t\to\alpha^+} y_2(t)$.

e) Per risolvere c) procedere alternativamente come segue: ricordata la soluzione particolare $\bar{y}(t) = -2t$ trovata nell'Esercizio 4.19), i) dimostrare che $\bar{y}(t) < y_1(t)$ per ogni $t \leq 0$; ii) trovare una sottosoluzione di y_1 per $t \geq 0$ della forma $w(t) = mt + 4$ per un opportuno valore di m e concludere utilizzando il criterio del confronto.

Soluzione. a) Si ha

$$z'(t) = y'(t) + 2 = \frac{(y + 2t - 1)^2 - 3}{y + 2t + 1} + 2 = \frac{(z(t) - 1)^2 - 3}{z(t) + 1} + 2 = \frac{z^2(t)}{z(t) + 1}.$$

Inoltre, se $(t, y) \in \Omega$ allora $z \in \mathcal{D} :=]-1, +\infty[$. Risolviamo l'equazione mediante il metodo di separazione delle variabili. Osserviamo anzitutto che ci sono esistenza e unicità delle soluzioni in $\mathcal{D}$. Il punto $\bar{z} = 0$ è di equilibrio (corrispondente alla soluzione $\bar{y}$) per l'equazione, dunque la funzione $\bar{z}(t) \equiv 0$ è soluzione. Per unicità le orbite non si intersecano dunque tutte le altre soluzioni sono sempre non nulle. Separando le variabili si ottiene

$$\frac{z+1}{z^2}\, dz = dt \qquad \Longrightarrow \qquad F(z) := \ln|z| - \frac{1}{z} = \int \left(\frac{1}{z} + \frac{1}{z^2}\right) dz = \int dt = t + c,$$

con $c \in \mathbb{R}$ costante di integrazione.

b) Per il punto a) le soluzioni $y(t)$ sono definite implicitamente dall'equazione $F(y(t) + 2t) = t + c$. Se dunque è possibile invertire F si ottiene una soluzione in forma esplicita. Più precisamente, fissato $y(t_0) = y_0$ studiamo il relativo problema di Cauchy. Poniamo $z_0 = y(t_0) + 2t_0 = y_0 + 2t_0$ e lavoriamo nella variabile z. Proviamo a vedere se o quando è possibile invertire $F : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$. Si ha chiaramente $F'(z) = (z + 1)/z^2$ perciò F è decrescente in $]-\infty, -1[$ mentre è crescente in $]-1, 0[$ e in $]0, +\infty[$. Il punto

-1 è di minimo relativo con $F(-1) = 1$. Si ha inoltre $\lim_{z\to\pm\infty} F(z) = +\infty$, $\lim_{z\to 0^\pm} F(z) = \mp\infty$. La funzione F non è dunque invertibile in tutto il dominio ma lo è separatamente negli intervalli $]-1, 0[$ e $]0, +\infty[$ (ricordiamo che z dovrà appartenere a $\mathcal{D}$). Osserviamo che per l'unicità se $z_0 > 0$ la corrispondente soluzione $z(t)$ con $z(t_0) = z_0$ sarà sempre positiva; per tali soluzioni è quindi possibile scrivere $z(t) = G(t+c)$ dove G è l'inversa di F ristretta a $]0, +\infty[$. Essendo $F :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ sarà $G : \mathbb{R} \to]0, +\infty[$ dunque z è globalmente definita. Tornando alla variabile y si ottiene che se $y_0 + 2t_0 > 0$ (verificata per esempio nel caso $y(0) = 4$) allora $y(t) = G(t + c) - 2t$ è soluzione globalmente definita (c è calcolabile in termini del dato iniziale). Si confronti questo risultato con quanto già visto nell'Esercizio 4.19.

Se, invece, $z_0 \in]-1, 0[$ analogamente a sopra $z(t)$ sarà sempre negativa e, per continuità, compresa in $]-1, 0[$ almeno per t in un intorno di t_0. Ne consegue che è possibile esplicitare localmente z in funzione di t, più precisamente $z(t) = H(t + c)$ dove H è l'inversa di F in $]-1, 0[$. Essendo $F :]-1, 0[\to]1, +\infty[$ si ha $H :]1, +\infty[\to]-1, 0[$, dunque z è definita solamente per i t per cui $t + c > 1$ ovvero in $]1 - c, +\infty[$. Non è poi possibile estendere z per valori di t inferiori poiché $\lim_{t\to(1-c)^+} z(t) = -1$ dunque si esce dal dominio $\mathcal{D}$. In corrispondenza si ha che per $-1 < y_0 + 2t_0 < 0$ (per esempio verificata nel caso $y(0) = -1/2$) la relativa soluzione è esprimibile come $y(t) = H(t + c) - 2t$ e può essere definita al massimo in $]1 - c, +\infty[$ che è dunque l'intervallo massimale di esistenza.

c) In questo caso si calcola facilmente c che deve verificare $4 = y(0) = G(c)$ da cui $c = F(4) = \ln 4 - 1/4$. Poiché $\lim_{t\to-\infty} H(t) = 0$ si ha

$$\lim_{t\to-\infty} y_1(t) = \lim_{t\to-\infty} H(t + \ln 4 - 1/4) - 2t = +\infty.$$

Essendo $z(t) = y(t) + 2t = H(t + c)$ e $\lim_{t\to+\infty} H(t) = +\infty$, passando al limite per $t \to +\infty$ nell'equazione differenziale si ha invece

$$\lim_{t\to+\infty} y_1'(t) = \lim_{t\to+\infty} \frac{(z(t) - 1)^2 - 3}{z(t) + 1} = \lim_{t\to+\infty} z(t)\frac{(1 - 1/z(t))^2 - 3/z^2(t)}{1 + 1/z(t)}$$

da cui $\lim_{t\to+\infty} y_1'(t) = +\infty$ e per integrazione $\lim_{t\to+\infty} y_1(t) = +\infty$.

d) Dal punto b) segue immediatamente che la soluzione y_2 è definita in $]1 - c, +\infty[$ dove c verifica $-1/2 = y(0) = H(c)$ cioè $c = F(-1/2) = 2 - \ln 2$. Si ha dunque $\alpha = \ln 2 - 1$ e facilmente

$$\lim_{t\to\alpha^+} y_2(t) = H(1) - 2\alpha = -1 - 2\alpha = 1 - 2\ln 2.$$

Si osservi che in effetti per $t \to \alpha^+$ la traiettoria $(t, y_2(t))$ tende al punto $(\alpha, -2\alpha - 1)$ appartenente alla retta $y + 2t + 1 = 0$ che coincide con la frontiera di Ω, in accordo con la teoria generale.

e) Per l'unicità delle soluzioni e poiché $\bar{y}$ è soluzione segue che se $y(t_0) > \bar{y}(t_0)$ allora $y(t) > \bar{y}(t)$ per ogni $t \in \mathbb{R}$. Da questa disequazione segue subito per confronto che

$$\lim_{t\to-\infty} y_1(t) \geq \lim_{t\to-\infty} \bar{y}(t) = +\infty.$$

Cerchiamo ora una sottosoluzione per $t \geq 0$ della forma $w(t) = mt + 4$ per qualche m. Nell'ottica di dimostrare che y_1 diverge a $+\infty$ per $t \to +\infty$ dovremo prendere $m > 0$, proprietà che assumeremo tacitamente nel seguito. Il primo tentativo è considerare w data dalla tangente alla soluzione nel punto $(t_0, y_0) = (0, 4)$. La derivata è ivi uguale a $y'(0) = \frac{(y(0)-1)^2-3}{y(0)+1} = \frac{6}{5}$ da cui segue $w(t) = \frac{6}{5}t + 4$, scelta che in seguito vedremo essere corretta.

In generale, essendo $w'(t) = m$, affinché w sia sottosoluzione per $t \geq 0$ dovrà essere

$$w'(t) \leq \frac{(w(t) + 2t - 1)^2 - 3}{w(t) + 2t + 1} \quad \Longleftrightarrow \quad m \leq \frac{((m+2)t + 3)^2 - 3}{(m+2)t + 5} \quad \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \quad (m+2)^2t^2 + (m+2)(6-m)t + (6-5m) \geq 0.$$

Quest'ultima disuguaglianza è verificata per ogni $t \geq 0$ se per esempio entrambe le eventuali radici dell'equazione di secondo grado associata sono non positive, il che è vero se $(m+2)(6-m) \geq 0$ e $6-5m \geq 0$, cioè se $m \leq 6/5$. Le scelta $m = 6/5$ (oppure $m = 1$) è dunque corretta e $w(t) = \frac{6}{5}t + 4$ è sottosoluzione con $w(0) = 4 = y_1(0)$. Per il criterio del confronto si ha $y_1(t) \geq w(t)$ per ogni $t \geq 0$ da cui segue $\lim_{t\to+\infty} y_1(t) \geq \lim_{t\to+\infty} w(t) = +\infty$. Il quadro globale del campo vettoriale nell'aperto Ω e alcune traiettorie sono delineati in Figura 8.3; in rosso è rappresentata la soluzione particolare $\bar{y}(t) = -2t$. L'analisi si può poi estendere al semipiano $\{(t, y) : \ y + 2t + 1 < 0\}$.

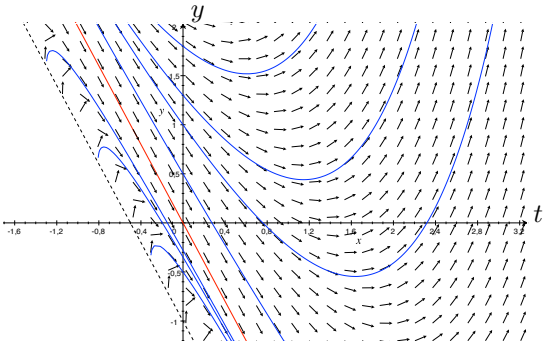


Figura 8.3: Andamento del campo vettoriale e delle traiettorie di (8.13)

Alcune classi di equazioni di ordine 2

La prima tipologia di equazioni che affronteremo è data da

$$y'' = f(t, y'), \tag{8.14}$$

dove f è una funzione continua dipendente da y' ma non esplicitamente da y. Questo tipo di equazioni, come anche tutte quelle della forma $y^{(N)} = f(t, y', \ldots, y^{(N-1)})$, possono essere "abbassate di grado" mediante la trasformazione $p = y'$, per cui da (8.14) si ottiene

$$p' = f(t, p)$$

che è un'equazione di ordine 1. Trovata la generica soluzione $p = p(t)$, per ottenere $y(t)$ basterà integrare: $y(t) = \int p(t)\, dt$.

La seconda classe di equazioni è data da

$$y'' = f(y, y'), \tag{8.15}$$

con $f : A \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ continua, che rappresenta la generica equazione autonoma del secondo ordine in forma normale. Sappiamo che questa equazione è equivalente al sistema (autonomo) del primo ordine

$$\begin{cases} y' = p \\ p' = f(y, p). \end{cases}$$

Come già visto nel capitolo precedente, tale sistema è formalmente equivalente all'equazione (detta *totale*)

$$-f(y, p)dy + pdp = 0.$$

Pensando ora y come variabile indipendente, da quest'ultima equazione si ottiene, ancora formalmente,

$$p\frac{dp}{dy} = f(y, p),$$

che può essere vista come un'equazione differenziale del primo ordine per l'incognita $p = p(y)$. Se $p = p(y)$ è l'integrale generale (sarà $p = p(y, c)$ con c generica costante), si ricava $y = y(t)$ integrando l'equazione $y' = p(y)$.

Volendo formalizzare questo metodo con precisione, supponendo di poter invertire l'equazione $y = y(t)$ e dunque di scrivere $t = t(y)$ in funzione di y si ottiene allora

$$f(y, p) = f(y, y') = y'' = \frac{d}{dt}\Big(\frac{dy}{dt}\Big) = \frac{dp}{dt} = \frac{dp}{dy}\frac{dy}{dt} = p\frac{dp}{dy}.$$

Dunque, ci si aspetta che il metodo funzioni per ottenere le soluzioni $y = y(t)$ invertibili, il che equivale, per funzioni reali di variabile reale, a soluzioni strettamente crescenti/decrescenti (al limite si può restringere la soluzione ai sottointervalli su cui è strettamente monotona).

In realtà questo metodo, come anche molti di quelli che seguiranno, viene spesso applicato senza preoccuparsi di controllare le ipotesi *a priori*; la verifica che quella trovata è effettivamente una (o la) soluzione del problema originale verrà fatta solo *a posteriori*.

Si noti infine che il medesimo ragionamento può essere esteso alla generica equazione del secondo ordine anche in forma non normale

$$F(y, y', y'') = 0,$$

ottenendo l'equazione di ordine 1 per $p = y'$

$$F\Big(y, p, p\frac{dp}{dy}\Big) = 0.$$

Esempio 8.5 Si consideri l'equazione del secondo ordine

$$y'' = \mathrm{e}^y y'$$

con le condizioni $y(0) = 0$, $y'(0) = v > 1$, già studiata nell'Esempio 6.16. In particolare, nell'Esempio 6.16 si era dimostrato che tutte le soluzioni non costanti sono strettamente monotone, quindi $p = y' \neq 0$ e si può invertire $y = y(t)$ ottenendo $t = t(y)$ per applicare il metodo sopra indicato. Per tali soluzioni si ottiene quindi l'equazione

$$p\frac{dp}{dy} = \mathrm{e}^y p \qquad \Longrightarrow \qquad \frac{dp}{dy} = \mathrm{e}^y,$$

con la condizione $p(0) = v$. Integrando tra 0 e y si ottiene

$$p(y) - p(0) = \int_0^y \frac{dp}{dy}(s)\, ds = \int_0^y \mathrm{e}^s\, ds = \mathrm{e}^y - 1,$$

da cui si ricava $p(y) = v - 1 + \mathrm{e}^y$. A questo punto ci si riduce a calcolare la soluzione dell'equazione $y' = p(y)$, problema già affrontato nell'Esempio 6.16.

Esempio 8.6 Consideriamo il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'' = (y')^2 - y \\ y(1) = -1/4,\ y'(1) = 1/2. \end{cases}$$

Il campo vettoriale $f(y, y') = (y')^2 - y$ è di classe $C^\infty(\mathbb{R}^2)$ dunque il problema ammette un'unica soluzione. Operando la sostituzione $p = y'$ si ottiene

$$p\frac{dp}{dy} = p^2 - y \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{1}{2}\frac{d(p^2)}{dy} = p^2 - y, \tag{8.16}$$

e, cambiando ulteriormente la variabile ponendo $v = p^2$, si ottiene l'equazione differenziale lineare di ordine 1 a coefficienti costanti non omogenea

$$\frac{dv}{dy} = 2v - 2y.$$

Per calcolare la soluzione generale si può utilizzare la formula (8.3), ma è più conveniente ricordare che la stessa è somma della soluzione generale dell'omogenea associata $\frac{dv}{dy} = 2v$, ovvero $v_o(y) = c\mathrm{e}^{2y}$, e di una soluzione particolare della non omogenea. Essendo la non-omogeneità $h(y) = -2y$ di tipo polinomiale, si può ricercare una soluzione della stessa forma $\bar{v}(y) = Ay + B$, per qualche $A, B \in \mathbb{R}$. Affinché questa sia soluzione dovrà essere

$$A = \frac{d\bar{v}(y)}{dy} = 2\bar{v}(y) - 2y = 2(Ay + B) - 2y \quad \Longleftrightarrow \quad 2(A-1)y + 2B - A = 0,$$

da cui $A = 1$, $B = 1/2$, cioè $\bar{v}(y) = y + 1/2$. In definitiva si ottiene $v(y) = v_o(y) + \bar{v}(y) = c\mathrm{e}^{2y} + y + 1/2$, con $c \in \mathbb{R}$. A questo punto si potrebbe tornare alla variabile p, integrare per trovare y e imporre le condizioni iniziali. Conviene invece imporre una condizione iniziale a questo livello, osservando che se $t = 1$ allora $y = -1/4$ e $p = y' = 1/2$, ovvero, quando $y = -1/4$ si ha $p = 1/2$. La condizione iniziale per $p(y)$ diventa allora $p(-1/4) = 1/2$ dunque $v(-1/4) = 1/4$. Imponendo questa condizione si ha $1/4 = c\mathrm{e}^{-1/2} + 1/4$ da cui $c = 0$ ovvero $p^2(y) = v(y) = y + 1/2$. Si avrà quindi $p(y) = \pm\sqrt{y + 1/2}$, ma essendo $p(-1/4) = 1/2$ si sceglierà il segno $+$ (questa scelta appare giustificata almeno per i t vicini a 1 essendo $y'(1) = 1/2$). Integrando infine l'equazione $y' = \sqrt{y + 1/2}$ col metodo di separazione delle variabili si ottiene

$$\int_{-1/4}^{y(t)} \frac{1}{\sqrt{z + 1/2}}\, dz = \int_1^t ds \quad \Longrightarrow \quad \left[2\sqrt{z + 1/2}\right]_{-1/4}^{y(t)} = t - 1$$

$$\Longrightarrow \quad 2\sqrt{y(t) + 1/2} - 1 = t - 1 \quad \Longrightarrow \quad y(t) = \frac{t^2}{4} - \frac{1}{2}.$$

Questa è effettivamente una soluzione dunque, per l'unicità delle soluzioni dei problemi di Cauchy verificata sopra, è *la* soluzione del problema in oggetto. Si osservi che tale soluzione è stata trovata senza validare con precisione

ciascun passaggio logico: mediante un metodo più o meno formale si è trovata la funzione $y(t) = t^2/4 - 1/2$ che a posteriori si verifica essere soluzione del problema in oggetto dunque, per unicità, la soluzione. Volendo essere più precisi, l'equazione corretta per $y(t)$ sarebbe in realtà $(y')^2 = y + 1/2$ che è un'equazione non in forma normale, alla quale corrispondono i due rami $y_-(t)$ e $y_+(t)$ soluzioni rispettivamente delle equazioni $y' = -\sqrt{y + 1/2}$ e $y' = \sqrt{y + 1/2}$, a loro volta corrispondenti alle soluzioni con $y'(t_0) < 0$ oppure $y'(t_0) > 0$ (si veda anche l'Osservazione 1.13) . Essenzialmente, finché $y'(t)$ è positiva $y(t)$ è strettamente crescente dunque invertibile e il cambio di variabili $t = t(y)$ che porta all'equazione (8.16) è pienamente giustificato, come anche la scelta di ricondursi a $y' = \sqrt{y + 1/2}$. In relazione alla soluzione $y(t) = t^2/4 - 1/2$ così trovata, ciò accade per $t > 0$ mentre per $t = 0$ si ha $y'(0) = 0$ e il metodo per risolvere le equazioni del tipo (8.15) non è più applicabile; ciò accade quando la soluzione $y(t) = t^2/4 - 1/2$ coincide con l'equilibrio $\bar{y} = -1/2$ dell'equazione (senza unicità!) $y' = \pm\sqrt{y + 1/2}$. Per $t < 0$ l'analisi deve essere modificata. Se per qualche t_1, $y(t_1) = -1/2$ e conseguentemente $y'(t_1) = 0$, dall'equazione di partenza $y'' = (y')^2 - y$ si ottiene $y''(t_1) = 1/2$ e la soluzione è strettamente convessa in t_1; ciò implica che (almeno localmente) per $t > t_1$ si avrà $y'(t) > 0$ per cui si dovrà utilizzare l'equazione $y' = \sqrt{y + 1/2}$, mentre per $t < t_1$ si avrà $y'(t) < 0$ per cui si sceglierà l'equazione $y' = -\sqrt{y + 1/2}$. Integrando quest'ultima in un intorno sinistro di t_1, sempre con dati $y(t_1) = -1/2$, si ottiene

$$2\sqrt{y(t) + 1/2} = -(t - t_1) \qquad \Longrightarrow \qquad y(t) = \frac{(t - t_1)^2}{4} - \frac{1}{2}.$$

Da ciò segue che l'equazione $(y')^2 = y + 1/2$ con dato $y(1) = -1/4$ (e compatibilmente con la condizione $y'(1) = 1/2$) ha in realtà infinite soluzioni: più precisamente per ogni $\tau \leq 0$ sono soluzioni

$$y_\tau(t) := \begin{cases} t^2/4 - 1/2 & \text{se } t > 0 \\ -1/2 & \text{se } \tau \leq t \leq 0 \\ (t - \tau)^2/4 - 1/2 & \text{se } t < \tau. \end{cases}$$

Tuttavia il problema di Cauchy iniziale ha unicità della soluzione: tra tutte le y_τ, l'unica compatibile con la condizione $y''(0) = (y'(0))^2 - y(0) = 1/2$ è quella corrispondente a $\tau = 0$ da cui si recupera (necessariamente!) la soluzione già trovata essendo $y_0(t) = t^2/4 - 1/2$. Per terminare si osservi che buona parte dell'analisi precedente poteva essere evitata: inserendo la condizione $(y')^2 = y + 1/2$ nell'equazione $y'' = (y')^2 - y$ si ricava $y'' = 1/2$

che integrata due volte conduce a $y(t) = t^2/4 + at + b$ da cui, imponendo le condizioni iniziali, si ritrova nuovamente $y(t) = t^2/4 - 1/2$.

Per esercizio, si risolva alternativamente il problema iniziale trovando un fattore integrante per la 1-forma associata al sistema 2×2 equivalente all'equazione $y'' = (y')^2 - y$ (si veda il Capitolo 7).

Esempio 8.7 Consideriamo il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'' = \dfrac{1}{y^2}\big(1 + (y')^2\big)^{3/2} \\ y(0) = 1,\ y'(0) = 0. \end{cases} \tag{8.17}$$

Il campo vettoriale $f(y, y') = (1 + (y')^2)^{3/2}/y^2$ è definito e di classe C^1 su tutto $\mathbb{R}^2$ al di fuori della retta $y = 0$, dunque il problema di Cauchy ammette un'unica soluzione. Operando la sostituzione $p = y'$ si ottiene

$$p\frac{dp}{dy} = \frac{1}{y^2}\big(1 + p^2\big)^{3/2} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \frac{1}{2}\frac{d(p^2)}{dy} = \frac{1}{y^2}\big(1 + p^2\big)^{3/2}.$$

Ponendo $v = p^2$, col metodo di separazione delle variabili si perviene a

$$\frac{1}{2}\int \frac{1}{(1+v)^{3/2}}\,dv = \int \frac{1}{y^2}\,dy \qquad \Longleftrightarrow \qquad -\frac{1}{\sqrt{1+v}} = -\frac{1}{y} + c,$$

con $c \in \mathbb{R}$. Dalle condizioni iniziali segue che quando $y = 1$ si ha $y' = 0$, ovvero $p(1) = 0$ e anche $v(1) = 0$. Imponendo questa condizioni si ottiene $c = 0$ e infine $\sqrt{1 + p^2} = y$. Sostituendo $y' = p$ si ottiene il problema di Cauchy per l'equazione differenziale in forma non normale

$$\begin{cases} \sqrt{1 + (y')^2} = y \\ y(0) = 1. \end{cases} \tag{8.18}$$

Si osservi che (8.18) ammette la soluzione banale $y(t) \equiv 1$, ma dalle condizioni iniziali $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$ e dall'equazione (8.17) segue che $y''(0) = 1$, quindi si ha $y'(t) \gtrless 0$ per $t \gtrless 0$ e vicino a 0 e in particolare $y(t) > 1$ per t vicino a 0. La soluzione $y(t) \equiv 1$ va dunque scartata e bisogna trovarne un'altra. Poiché y' può cambiare segno solo quando $y = 1$ e siccome y è localmente crescente per $t > 0$, segue facilmente che $y'(t) > 0$ per ogni $t > 0$ e dunque anche $y(t) > 1$ per gli stessi t. Analogamente, per $t < 0$ si avrà sempre $y'(t) < 0$ e $y(t) > 1$. Invertendo ora la relazione (8.18) per $t > 0$, per cui $y'(t) > 0$, si ottiene l'equazione in forma normale

$$\begin{cases} y' = \sqrt{y^2 - 1} \\ y(0) = 1, \end{cases} \tag{8.19}$$

dalla quale, per separazione delle variabili, si ricava la soluzione $y(t) = \cosh t$. Per $t < 0$ si ottiene invece l'equazione $y' = -\sqrt{y^2 - 1}$ da cui, sempre per separazione delle variabili e tenuto conto della condizione iniziale, si ricava $y(t) = \cosh(-t) = \cosh t$, grazie alla parità della funzione cosh. Si ottiene infine che la funzione $y(t) = \cosh t$ è soluzione del problema di Cauchy (8.18), e anche di (8.17), per ogni $t \in \mathbb{R}$ (si veda anche l'Esempio 8.8).

Per completezza si osservi che, al contrario di (8.17) e anche tenuto conto delle condizioni iniziali $y(0) = 1$, l'equazione (8.18) non ammette unicità delle soluzioni. Infatti, per quanto visto, a meno del segno e per soluzioni non costanti (8.18) è equivalente a (8.19), problema di Cauchy il cui campo vettoriale non è di classe C^1, né localmente lipschitziano in un intorno dei punti $(t_0, \pm 1)$ e in particolare di $(0, 1)$. Quindi ci si aspetta che (8.18) e (8.19) non abbiano unicità delle soluzioni per i problemi di Cauchy; per esempio le funzioni $y(t) \equiv 1$ e $y(t) = \cosh t$ sono entrambe soluzioni tali che $y(0) = 1$ (e verificano anche la condizione sulla derivata $y'(0) = 0$), ma ce ne sono infinite altre (quali?). In definitiva, per risolvere (8.17) ci si è ricondotti a risolvere (8.18) ma i due problemi *non* sono equivalenti (un problema analogo accadeva anche nell'Esempio 8.6): tra le infinite soluzioni di (8.18) viene selezionata come (unica!) soluzione di (8.17) quella (unica tra queste) che soddisfa $y''(0) = 1$, condizione necessaria di compatibilità imposta da (8.17). In un certo senso, passando da (8.17) a (8.18) si perdono informazioni sul comportamento della derivata seconda.

Il problema della fune inestensibile

Come applicazione dei precedenti metodi alla fisica, consideriamo il caso di una fune omogenea, inestensibile ma perfettamente flessibile, fissata ai due estremi A e B e sotto l'azione del campo gravitazionale g. Introdotto un sistema di coordinate (x, y) in cui l'asse y è verticale e con verso uguale a quello di g, da considerazioni fisiche si ottiene che la posizione d'equilibrio $y(x)$ assunta dalla fune sotto l'azione di g soddisfa l'equazione

$$y'' = \frac{\lambda g}{\kappa}\sqrt{1 + (y')^2} \qquad (\cdot)' = \frac{d}{dx},$$

dove λ è la densità lineare di massa della fune, supposta costante (fune omogenea), τ è la tensione, $\theta = \operatorname{arctg}(y/x)$ e $\kappa = \tau \cos\theta$ è essenzialmente la componente orizzontale del vettore tensione, ed è una costante che dipende dalla fune. Posto per comodità $\gamma = \lambda g/\kappa$, il campo vettoriale $f = f(y') = \gamma\sqrt{1 + (y')^2}$ è definito e di classe C^∞ in $\mathbb{R}$, e rientra sia nelle equazioni di tipo (8.14) che in quelle di tipo (8.15).

Utilizzando il primo metodo, ponendo $p(x) = y'(x)$ si ottiene l'equazione

$$p' = \gamma\sqrt{1+p^2},$$

e separando le variabili si ha

$$\int \frac{1}{\sqrt{1+p^2}}\,dp = \int \gamma\,dx \qquad \Longrightarrow \qquad \operatorname{settsenh} p = \gamma x + b,$$

dove $b \in \mathbb{R}$ e settsenh è il settore seno iperbolico, funzione inversa di senh, data da $\operatorname{settsenh} x = \ln(x+\sqrt{1+x^2})$. Invertendo la relazione si trova $p(x) = \operatorname{senh}(\gamma x + b)$ da cui

$$y(x) = \int p(x)\,dx = \frac{1}{\gamma}\cosh(\gamma x + b) + c = \frac{\kappa}{\lambda g}\cosh\Big(\frac{\lambda g}{\kappa}x + b\Big) + c, \tag{8.20}$$

con $b, c \in \mathbb{R}$. All'equilibrio la fune si dispone secondo una cosiddetta *catenaria* (cioè la funzione cosh).

Proviamo ora a utilizzare il secondo metodo: posto $p = y'$ si ottiene l'equazione

$$p\frac{dp}{dy} = \gamma\sqrt{1+p^2}$$

e separando le variabili si ha

$$\int \frac{p}{\sqrt{1+p^2}}\,dp = \int \gamma\,dy \qquad \Longrightarrow \qquad \sqrt{1+p^2} = \gamma y + \alpha, \tag{8.21}$$

con $\alpha \in \mathbb{R}$, da cui $p(y) = \pm\sqrt{(\gamma y + \alpha)^2 - 1}$. Scegliendo il segno $+$ si ottiene

$$y' = p(y) = \sqrt{(\gamma y + \alpha)^2 - 1},$$

e utilizzando ancora la separazione delle variabili

$$\int \frac{1}{\sqrt{(\gamma y + \alpha)^2 - 1}}\,dy = \int dx \qquad \Longrightarrow \qquad \frac{1}{\gamma}\operatorname{settcosh}(\gamma y + \alpha) = x + \beta,$$

dove $\beta \in \mathbb{R}$ e settcosh è il settore coseno iperbolico, funzione inversa di cosh in $[0, +\infty[$, data da $\operatorname{settcosh} x = \ln(x - \sqrt{x^2 - 1})$, $x \geq 1$. Invertendo la relazione si trova

$$y(x) = \frac{1}{\gamma}\big(\cosh(\gamma(x+\beta)) - \alpha\big),$$

equivalente a (8.21) con la posizione $b = \gamma\beta$, $c = -\alpha/\gamma$. Scegliendo il segno $-$, con calcoli analoghi si ottiene $y(x) = \frac{1}{\gamma}\cosh(-\gamma x + b) + c$, sostanzialmente equivalente alla precedente grazie alla parità della funzione cosh.

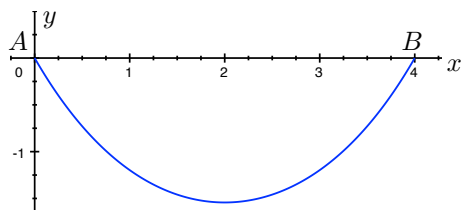


Figura 8.4: La fune (catenaria) appesa per i punti A e B

Si osservi che per trovare la soluzione finale del problema fisico, bisognerà imporre il passaggio della curva per i punti fissati A e B: non si tratterà dunque di un problema di Cauchy ma di un *problema dei due punti* o *di Dirichlet* (che si generalizza, in più dimensioni, al cosiddetto *problema al contorno*). Per esempio, se i due punti sono orizzontalmente allineati e, per facilità, posti in $A = (0, 0)$, $B = (L, 0)$ si dovrà imporre $y(0) = y(L) = 0$, cioè

$$\begin{cases} \frac{1}{\gamma}\cosh b + c = 0 \\ \frac{1}{\gamma}\cosh(\gamma L + b) + c = 0. \end{cases}$$

Sottraendo si ricava $\cosh(\gamma L + b) = \cosh b$ da cui $b = -\gamma L/2$ che sostituita nella prima equazione fornisce $c = -\cosh(-\gamma L/2)/\gamma$. In definitiva

$$y(x) = \frac{\kappa}{\lambda g}\left[\cosh\Big(\frac{\lambda g}{\kappa}\big(x - \frac{L}{2}\big)\Big) - \cosh\Big(-\frac{\lambda g L}{2\kappa}\Big)\right],$$

il cui grafico è rappresentato in Figura 8.4. Conoscendo la lunghezza $\ell \geq L$ della corda, è possibile trovare anche κ (o, meglio, γ) in funzione di ℓ. Il modo più rapido è il seguente: la lunghezza di una curva cartesiana rettificabile $y : [a, b] \to \mathbb{R}$ è data da

$$\ell = \int_a^b \sqrt{1 + (y'(x))^2}\, dx,$$

e utilizzando l'equazione differenziale e la forma della soluzione si ottiene

$$\ell = \frac{1}{\gamma}\int_0^L y''(x)\, dx = \frac{y'(L) - y'(0)}{\gamma} = \frac{2}{\gamma}\operatorname{senh}\frac{\gamma L}{2}.$$

Si perviene dunque all'equazione $\ell = \frac{2}{\gamma}\operatorname{senh}(\frac{L}{2}\gamma)$ nell'incognita γ. La funzione $h(\gamma) := \frac{2}{\gamma}\operatorname{senh}(\frac{L}{2}\gamma)$ mappa $\mathbb{R}^+$ in $]L, +\infty[$ ed è ivi strettamente crescente, dunque per ogni $\ell > L$ (che è un ovvio limite fisico) esiste un unico $\gamma = h^{-1}(\ell) > 0$ tale che $\ell = h(\gamma)$. Si ottiene infine anche κ, essendo $\kappa = \lambda g/\gamma$.

Alcune classi di equazioni in forma non normale

Più precisamente considereremo due classi di equazioni in forma non normale le cui soluzioni possono essere trovate in forma parametrica. La prima è

$$y = g(y'), \tag{8.22}$$

dove g è una funzione continua. Se g è globalmente invertibile l'equazione equivale a $y' = g^{-1}(y)$ che è un'equazione di ordine 1 in forma normale e autonoma, dunque a variabili separabili. In generale, se g non è invertibile è possibile utilizzare la seguente strategia: si opera un cambiamento di variabile indipendente $t \mapsto s(t)$ dove $s = y'(t)$, per cui $y = g(y') = g(s)$, dunque $\frac{dy}{ds} = g'(s)$ e

$$\frac{dt}{ds} = \frac{dt}{dy}\frac{dy}{ds} = \frac{1}{y'(t)}g'(s) = \frac{g'(s)}{s},$$

e in definitiva

$$\begin{cases} t = \displaystyle\int \frac{g'(s)}{s}\, ds \\ y = g(s), \end{cases} \tag{8.23}$$

che fornisce la soluzione generale in forma parametrica $s \mapsto (t(s), y(s))$. Se poi è possibile invertire la relazione $t = t(s)$ ottenendo $s = s(t)$, sostituendo nella seconda equazione si avrà la soluzione $y = y(s(t))$ in funzione di t.

Si osservi che la posizione $s = y'(t)$ definisce effettivamente una trasformazione di variabile se y' è invertibile, cioè se y' è strettamente monotona; per soluzioni due volte derivabili ciò equivale alla stretta convessità/concavità. Inoltre l'inversa dovrà anche essere derivabile.

Esempio 8.8 Si consideri l'equazione

$$y = \sqrt{1 + (y')^2} \tag{8.24}$$

già trovata in (8.18) dell'Esempio 8.7, e in (8.21) (prendendo $\gamma = 1$ e $\alpha = 0$) nell'esempio della fune inestensibile. Applicando il metodo sopra indicato con $g(s) = \sqrt{1+s^2}$, si ha $g'(s) = \frac{s}{\sqrt{1+s^2}}$ e si ottiene la soluzione in forma parametrica

$$\begin{cases} t = \displaystyle\int \frac{g'(s)}{s}\, ds = \int \frac{1}{\sqrt{1+s^2}}\, ds = \operatorname{settsenh} s + c \\ y = g(s) = \sqrt{1+s^2}. \end{cases}$$

In questo caso si può invertire la prima equazione ottenendo $s = \operatorname{senh}(t-c)$ che inserita nella seconda fornisce la soluzione $y = y(t)$

$$y(t) = \sqrt{1 + \operatorname{senh}^2(t-c)} = \cosh(t-c).$$

Si osservi che con questo metodo non si ottengono tutte le soluzioni di (8.24), per esempio non si ottiene la soluzione $\bar{y}(t) \equiv 1$ per alcun valore di c. Ciò è dovuto al fatto che $\bar{y}'(t) = 0$ e in questo caso la sostituzione utilizzata $s = \bar{y}'(t)$ perde significato.

L'altra classe che può essere trattata con metodi simili è costituita da equazioni della forma

$$t = g(y'), \tag{8.25}$$

dove g è sempre una funzione continua. Come prima, se g è globalmente invertibile l'equazione equivale a $y' = g^{-1}(t)$ la cui soluzione generale è $y(t) = \int g^{-1}(t)\,dt$. Se g non è invertibile, mediante il cambiamento di variabile indipendente $t \mapsto s(t)$ dove $s = y'(t)$ si ottiene $t = g(y') = g(s)$, dunque $\frac{dt}{ds} = g'(s)$ e

$$\frac{dy}{ds} = \frac{dy}{dt}\frac{dt}{ds} = sg'(s),$$

e in definitiva

$$\begin{cases} t = g(s) \\ y = \displaystyle\int sg'(s)\,ds = sg(s) - \int g(s)\,ds = sg(s) - G(s) + c, \end{cases} \tag{8.26}$$

dove G è una primitiva di g e $c \in \mathbb{R}$. Anche in questo caso si ottiene la soluzione generale in forma parametrica $s \mapsto (t(s), y(s))$.

Esempio 8.9 Considerata l'equazione

$$t = \frac{1}{1 + (y')^2},$$

essendo $g(s) = \frac{1}{1+s^2}$ con primitiva $G(s) = \operatorname{arctg} s$ si ottiene la soluzione generale in forma parametrica

$$\begin{cases} t = \dfrac{1}{1+s^2} \\ y = \dfrac{s}{1+s^2} - \operatorname{arctg} s + c. \end{cases}$$

Non è possibile invertire globalmente $t = t(s)$, ma lo si può fare separatamente per $s < 0$ oppure $s > 0$ ottenendo $s = \pm\sqrt{\frac{1-t}{t}}$ che sostituita nella seconda equazione fornisce

$$y(t) = \pm\left(\sqrt{t - t^2} - \operatorname{arctg}\sqrt{\frac{1-t}{t}}\right) + c.$$

Al medesimo risultato si poteva pervenire direttamente dall'equazione differenziale, ponendola in forma normale (separatamente per $y' > 0$ e $y' < 0$) e integrando:

$$y' = \pm\sqrt{\frac{1-t}{t}} \qquad \Longrightarrow \qquad y(t) = \pm\int\sqrt{\frac{1-t}{t}}\,dt.$$

Per esercizio, si calcoli l'integrale e si verifichi che si ottiene la medesima formula per la soluzione (trattasi di un *integrale binomio*).

Il problema della brachistòcrona

È il problema di determinare tra tutte le curve regolari che congiungono due punti dati A e B non allineati orizzontalmente né verticalmente, quella lungo la quale una massa puntiforme soggetta unicamente alla forza di gravità e con velocità iniziale nulla copre il tragitto nel più breve tempo possibile. Tale curva viene detta "brachistòcrona" (dal greco: βραχιστοσ (brachistos) *brevissimo*, e χρονοσ (chronos) *tempo*). Questo problema è stato posto e risolto da Giacomo Bernoulli nel 1696. A tal fine introduciamo un sistema di coordinate cartesiane con l'asse delle ascisse orizzontale e quello delle ordinate orientato nella direzione del campo gravitazionale, come in Figura 8.5. I punti A, B avranno coordinate $A = (0, 0)$, $B = (x_1, y_1)$, con $x_1, y_1 > 0$. Ci restringeremo a cercare la soluzione del problema all'interno della classe delle sole curve regolari cartesiane del tipo $y = y(x)$. Introducendo, per il momento, la parametrizzazione d'arco $(x(s), y(s))$, da considerazioni fisiche si ottiene che la velocità nel punto $(x(s), y(s))$ è uguale a $v(s) = \sqrt{2gy(s)}$, dove g è l'accelerazione di gravità, e il tempo T per percorrere la curva, supponendo che la sua lunghezza sia S, è

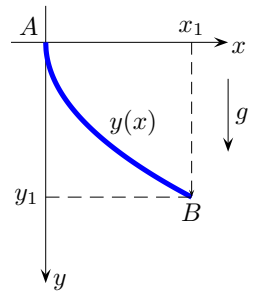


Figura 8.5: Il problema del tempo minimo

$$T = \int_0^S \frac{1}{v(s)}\,ds.$$

Si osservi che l'integrale è improprio nell'estremo 0. Tornando alla parametrizzazione cartesiana, essendo $ds = \sqrt{1 + (y'(x))^2}\, dx$ si ottiene

$$T = \int_0^{x_1} \sqrt{\frac{1 + (y'(x))^2}{2gy(x)}}\, dx.$$

Modulo la costante $1/\sqrt{2g}$, il problema è equivalente a cercare il

$$\min \left\{ \int_0^{x_1} \sqrt{\frac{1 + (y'(x))^2}{y(x)}}\, dx : \; y \in C^1([0, x_1]),\, y(0) = 0,\, y(x_1) = y_1 \right\},$$

o, meglio, a individuarne il punto (in questo caso la curva) di minimo. Si tratta di un *problema del calcolo delle variazioni* o *variazionale*, affrontabile con metodi variazionali. Si può dimostrare che sotto opportune ipotesi (per le quali rimandiamo a un testo dedicato alla trattazione del calcolo delle variazioni) le curve estremanti $y(x)$ per il funzionale integrale

$$F(y) = \int_a^b f(y(x), y'(x))\, dx, \quad y \in C^1([a, b]),\, y(a) = y_a,\, y(b) = y_b,$$

con $f = f(y, \xi)$ differenziabile, soddisfano la seguente condizione necessaria, detta *condizione di du Bois-Reymond*

$$f\big(y(x), y'(x)\big) - y'(x) \frac{\partial f}{\partial \xi}\big(y(x), y'(x)\big) = c, \tag{8.27}$$

per ogni x, con c costante. Se y è di classe C^2, tale condizione deriva direttamente dalle equazioni di Eulero-Lagrange, ben note dal corso di Meccanica Razionale. Si ricorda che nel caso in cui $f = f(x, y, \xi)$ le curve estremanti per il funzionale F soddisfano le condizioni di Eulero-Lagrange

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial \xi}(x, y(x), y'(x)) \right) - \frac{\partial f}{\partial y}(x, y(x), y'(x)) = 0. \tag{8.28}$$

Se ora f non dipende da x e $y(x)$ è una curva che soddisfa (8.28), derivando ulteriormente il primo membro di (8.27) (y è supposta di classe C^2) si ottiene

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}\Big(f(y, y') - y' \frac{\partial f}{\partial \xi}(y, y') \Big) &= \frac{\partial f}{\partial y} y' + \frac{\partial f}{\partial \xi} y'' - y'' \frac{\partial f}{\partial \xi} - y' \frac{d}{dx}\Big(\frac{\partial f}{\partial \xi}(y, y') \Big) \\ &= -y' \left[\frac{d}{dx}\Big(\frac{\partial f}{\partial \xi}(y, y') \Big) - \frac{\partial f}{\partial y}(y, y') \right] = 0, \end{aligned}$$

da cui segue (8.27). Nel caso in considerazione $f(y,\xi) = \sqrt{(1+\xi^2)/y}$ per cui $\partial_\xi f(y,\xi) = \xi/\sqrt{y(1+\xi^2)}$ e la condizione necessaria diventa

$$\frac{\sqrt{1+(y')^2}}{\sqrt{y}} - \frac{(y')^2}{\sqrt{y}\sqrt{1+(y')^2}} = c \qquad \Longleftrightarrow \qquad \frac{1}{\sqrt{y}\sqrt{1+(y')^2}} = c$$

che, elevando al quadrato, è riscrivibile nella forma

$$y = \frac{a}{1+(y')^2}, \tag{8.29}$$

dove $a = 1/c^2$. Si tratta di un'equazione differenziale di ordine 1 in forma non normale del tipo (8.22), con $g(s) = a/(1+s^2)$. Utilizzando il metodo di risoluzione, posto $s = y'(x)$ si ottiene una soluzione in forma parametrica

$$\begin{cases} x = \displaystyle\int \frac{g'(s)}{s}\,ds = -2a\int \frac{1}{(1+s^2)^2}\,ds \\ y = g(s) = \dfrac{a}{1+s^2}. \end{cases}$$

Posto $s = \operatorname{ctg}\tau$ per cui $ds = -(1+\operatorname{ctg}^2\tau)d\tau$ e successivamente $\theta = 2\tau$ si ha

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{(1+s^2)^2}\,ds &= -\int \frac{1}{1+\operatorname{ctg}^2\tau}\,d\tau = -\int \operatorname{sen}^2\tau\,d\tau \\ &= -\int \frac{1-\cos(2\tau)}{2}\,d\tau = -\int \frac{1-\cos\theta}{4}\,d\theta = -\frac{1}{4}(\theta - \operatorname{sen}\theta) + b, \end{aligned}$$

con $b \in \mathbb{R}$. Essendo $\frac{1}{1+s^2} = \frac{1}{1+\operatorname{ctg}^2(\theta/2)} = \operatorname{sen}^2\frac{\theta}{2} = \frac{1-\cos\theta}{2}$ si ha infine

$$\begin{cases} x(\theta) = R(\theta - \operatorname{sen}\theta) + k \\ y(\theta) = R(1-\cos\theta), \end{cases}$$

dove si è posto $R = a/2$, $k \in \mathbb{R}$ arbitrario. Tale curva parametrica, ben nota fin dal XVI secolo, è detta *cicloide* (si veda la Figura 8.6).

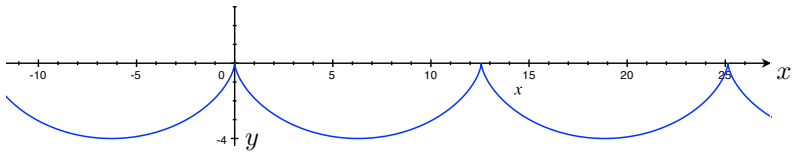


Figura 8.6: La cicloide

Geometricamente descrive la traiettoria di un punto P solidale con una circonferenza di raggio R che rotola su un piano senza strisciare; θ è la

misura in radianti dell'angolo che il diametro passante per P forma col semiasse positivo delle y, mentre k dipende dalla posizione iniziale di P.

Le costanti k e R si individuano imponendo il passaggio della curva per A e B. La coordinata $y(\theta)$ si annulla per $\theta = 2h\pi$, $h \in \mathbb{Z}$, e poiché y è inizialmente 0 si sceglierà di fare variare $\theta \in [0, +\infty[$ (in realtà, da considerazioni fisiche basta $\theta \in [0, \pi]$), in modo tale che $y(0) = 0$. Affinché sia poi $x(0) = 0$ dev'essere anche $k = 0$. Il raggio R viene invece determinato dal passaggio per B, ovvero da x_1, y_1 (la relazione che intercorre tra R e i due parametri non è elementarmente risolubile).

Potendo invertire $x = x(\theta)$ (almeno per $\theta \in [0, \pi]$) si otterrebbe $y = y(x)$. Si osservi che la funzione $h(\theta) = \theta - \operatorname{sen}\theta$ è invertibile come funzione da $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$, perciò si avrà

$$y = y(x) = R\big[1 - \cos(h^{-1}(x/R))\big],$$

dove però l'inversa h^{-1} non è esprimibile in termini delle funzioni elementari. È invece possibile risolvere θ in funzione di y, infatti $\theta = \arccos(1 - y/R)$ per $y \in [0, 2R]$, ottenendo la rappresentazione cartesiana

$$x = x(y) = R \arccos \frac{R - y}{R} - \sqrt{y(2R - y)}. \tag{8.30}$$

In realtà, posto $a = 2R$ l'equazione (8.29) poteva essere esplicitata rispetto alla variabile y' ottenendo $y' = \pm\sqrt{(2R - y)/y}$ che, scegliendo per esempio il segno "+" e separando le variabili, conduce nuovamente a (8.30).

Si osservi che in realtà non si è ancora dimostrato che la curva trovata sia un punto di minimo: ciò può essere dimostrato successivamente con un'analisi aggiuntiva.

Terminiamo lo studio di questa sezione presentando una proprietà interessante della cicloide. Utilizzando la forma parametrica è possibile calcolare il tempo di percorrenza da A a B lungo la cicloide, dato da

$$T_1 = \int_0^{\theta_1} \sqrt{\frac{(x'(\theta))^2 + (y'(\theta))^2}{2gy(\theta)}}\, d\theta = \int_0^{\theta_1} \sqrt{\frac{R^2(2 - 2\cos\theta)}{2gR(1 - \cos\theta)}}\, d\theta = \theta_1 \sqrt{\frac{R}{g}},$$

dove $\theta_1 = \arccos(1 - y_1/R)$. In particolare, il tempo per raggiungere il punto più basso della cicloide V partendo da A, ottenuto in corrispondenza di $y_1 = 2R$ dunque $\theta_1 = \pi$, è $T = \pi\sqrt{R/g}$. È da notare che T è il medesimo tempo che si impiegherebbe per raggiungere V partendo con velocità nulla da un qualsiasi altro punto Q dell'arco AV della cicloide (si veda la Figura 8.7). Infatti, fissato $Q = (x_0, y_0)$ sulla cicloide tale che $\theta_0 = \arccos(1 - y_0/R)$, in

questo caso la velocità è data da $v = \sqrt{2g(y - y_0)}$ per cui il tempo di percorrenza è

$$T_0 = \int_{\theta_0}^{\pi} \sqrt{\frac{R^2(2 - 2\cos\theta)}{2gR(\cos\theta_0 - \cos\theta)}}\, d\theta = \sqrt{\frac{R}{g}} \int_{\theta_0}^{\pi} \sqrt{\frac{1 - \cos\theta}{\cos\theta_0 - \cos\theta}}\, d\theta.$$

Ricordando che $\cos\theta = 2\cos^2(\theta/2) - 1$ e $\sqrt{1 - \cos\theta} = \sqrt{2}\,\mathrm{sen}(\theta/2)$ per $\theta \in [0, \pi]$, con la trasformazione $z = \cos(\theta/2)$ e posto $z_0 = \cos(\theta_0/2)$ si ha

$$\begin{aligned}
\int_{\theta_0}^{\pi} \sqrt{\frac{1 - \cos\theta}{\cos\theta_0 - \cos\theta}}\, d\theta &= \int_{\theta_0}^{\pi} \frac{\sqrt{2}\,\mathrm{sen}(\theta/2)}{\sqrt{1 + \cos\theta_0 - 2\cos^2(\theta/2)}}\, d\theta \\
&= -2\sqrt{2} \int_{z_0}^{0} \frac{1}{\sqrt{1 + \cos\theta_0 - 2z^2}}\, dz = 2 \int_{0}^{z_0} \frac{1}{\sqrt{(1 + \cos\theta_0)/2 - z^2}}\, dz \\
&= 2\Big[\,\mathrm{arcsen}\, \frac{z}{\sqrt{(1 + \cos\theta_0)/2}}\Big]_0^{z_0} = 2\,\mathrm{arcsen}\, 1 = \pi,
\end{aligned}$$

e in definitiva $T_0 = T$. Questa proprietà si esprime dicendo che la cicloide è una curva *tautòcrona* (sempre dal greco: το αυτο (to ayto) *il medesimo*, e χρονοσ (chronos) *tempo*), e grazie a questa Huygens ha potuto costruire pendoli cicloidali isocroni, ovvero per i quali il periodo di oscillazione non dipende dall'ampiezza dell'oscillazione stessa. Si noti che in realtà il pendolo nonlineare (7.6) non è mai isocrono; il suo periodo di oscillazione, dato dalla formula (7.11), varia con α, che dipende dall'ampiezza dell'oscillazione.

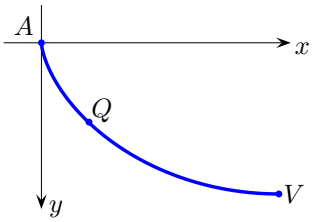


Figura 8.7: La cicloide è una curva tautòcrona

Equazioni di Eulero

Terminiamo questo capitolo trattando il caso delle equazioni di Eulero, che sono equazioni lineari di ordine n del tipo

$$t^n y^{(n)} + c_{n-1} t^{n-1} y^{(n-1)} + \ldots + c_1 t y' + c_0 y = g(t), \tag{8.31}$$

con $c_0, \ldots, c_{n-1}$ costanti fissate. Iniziamo a considerare il caso omogeneo

$$t^n y^{(n)} + c_{n-1} t^{n-1} y^{(n-1)} + \ldots + c_1 t y' + c_0 y = 0. \tag{8.32}$$

Sappiamo che ogni equazione di ordine n è equivalente a un sistema di n equazioni di ordine 1; in particolare, essendo l'equazione lineare, tale sarà

anche il sistema. La trattazione dei sistemi lineari verrà affrontata nel prossimo capitolo dove si vedrà che la generica soluzione di (8.32) si può scrivere come combinazione di n soluzioni linearmente indipendenti. Come trovarle? Proviamo a cercarle della forma $y(t) = t^\lambda$ per qualche $\lambda \in \mathbb{R}$. Imponendo che una tale funzione sia soluzione si ottiene un'equazione del tipo

$$t^\lambda P(\lambda) = 0, \tag{8.33}$$

dove P è un polinomio di grado n. Affinché tale equazione sia identicamente soddisfatta λ dovrà essere una radice di P. Se le radici $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ sono tutte reali e distinte si ottengono n soluzioni $y_1(t) = t^{\lambda_1}, \dots, y_n(t) = t^{\lambda_n}$ linearmente indipendenti, cioè una base dello spazio vettoriale delle soluzioni di (8.32). Se λ_k ha molteplicità algebrica p_k oltre alla soluzione $y_k(t) = t^{\lambda_k}$ saranno soluzioni anche le funzioni $y_{k,h}(t) = t^{\lambda_k}(\ln t)^h$, con $1 \le h \le p_k - 1$.

Esempio 8.10 Consideriamo l'equazione di ordine 2

$$t^2 y'' + c_1 t y' + c_0 y = 0,$$

con $c_1, c_0 \in \mathbb{R}$ arbitrari. Presa $y(t) = t^\lambda$ si ha $y'(t) = \lambda t^{\lambda-1}$, $y''(t) = \lambda(\lambda-1)t^{\lambda-2}$, e imponendo che $y(t)$ sia soluzione si ottiene

$$t^\lambda\big[\lambda(\lambda-1) + c_1\lambda + c_0\big] = 0 \quad \iff \quad \lambda^2 + (c_1 - 1)\lambda + c_0 = 0.$$

Per esempio, data l'equazione $t^2y'' + 2ty' - 2y = 0$, si ottengono le due radici $\lambda_1 = 1$ e $\lambda_2 = -2$, perciò si trovano due soluzioni $y_1(t) = t$ e $y_2(t) = t^{-2}$, linearmente indipendenti.

Come secondo caso, presa l'equazione $t^2y'' - 3ty' + 4y = 0$ si ottiene l'equazione $P(\lambda) = \lambda^2 - 4\lambda + 4 = 0$ che ha un'unica soluzione di molteplicità 2 data da $\lambda = 2$ che genera la soluzione $y_1(t) = t^2$. Si può verificare direttamente che un'altra soluzione, linearmente indipendente dalla prima, è data da $y_2(t) = t^2 \ln t$. Ciò apparirà chiaro dalla successiva analisi.

Passiamo ora a considerare il caso generale non omogeneo (8.31). Per risolverlo si utilizzeranno le sostituzioni $t = \mathrm{e}^s$ per $t > 0$ e $t = -\mathrm{e}^s$ per $t < 0$. Per esempio, supponiamo che $t > 0$; definita $u(s) = y(\mathrm{e}^s)$ per cui $y(t) = u(\ln t)$, si ha

$$\frac{dy}{dt} = \frac{du}{ds}\frac{ds}{dt} = \frac{1}{t}\frac{du}{ds} \quad \text{da cui} \quad t\frac{dy}{dt} = \frac{du}{ds},$$

$$\begin{aligned}\frac{d^2y}{dt^2} &= \frac{d}{dt}\Big(\frac{1}{t}\frac{du}{ds}\Big) = \frac{1}{t}\frac{d}{dt}\Big(\frac{du}{ds}\Big) - \frac{1}{t^2}\frac{du}{ds} \\ &= \frac{1}{t}\frac{d^2u}{ds^2}\frac{dt}{ds} - \frac{1}{t^2}\frac{du}{ds} = \frac{1}{t^2}\left(\frac{d^2u}{ds^2} - \frac{du}{ds}\right) = \frac{1}{t^2}D(D-1)u,\end{aligned}$$

dove per comodità si è introdotto l'operatore differenziale $D = \frac{d}{ds}$. Continuando con le derivate successive si ottiene

$$\begin{aligned}\frac{d^3y}{dt^3} &= \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{t^2}\left(\frac{d^2u}{ds^2} - \frac{du}{ds}\right)\right) = \frac{1}{t^2}\frac{d}{dt}\left(\frac{d^2u}{ds^2} - \frac{du}{ds}\right) - \frac{2}{t^3}\left(\frac{d^2u}{ds^2} - \frac{du}{ds}\right)\\ &= \frac{1}{t^3}\left(\frac{d^3u}{ds^3} - \frac{d^2u}{ds^2}\right) - \frac{2}{t^3}\left(\frac{d^2u}{ds^2} - \frac{du}{ds}\right)\\ &= \frac{1}{t^3}\left(\frac{d^3u}{ds^3} - 3\frac{d^2u}{ds^2} + 2\frac{du}{ds}\right) = \frac{1}{t^3}D(D-1)(D-2)u.\end{aligned}$$

In generale si può dimostrare che per $k \geq 1$ vale

$$t^k\frac{d^ky}{dt^k} = D(D-1)\cdots(D-k+1)u. \tag{8.34}$$

Sostituendo questa relazione per $1 \leq k \leq n$ in (8.31) si ottiene un'equazione lineare a coefficienti costanti che può essere risolta con i metodi del prossimo capitolo (e talvolta col metodo per simiglianza).

Esempio 8.11 Consideriamo il problema di Cauchy

$$\begin{cases} t^2y'' - ty' + y = 2t \\ y(1) = 0,\ y'(1) = 1. \end{cases}$$

Posto $t = \mathrm{e}^s$ per $t > 0$, si ottiene l'equazione differenziale per $u(s) = y(\mathrm{e}^s)$

$$D(D-1)u - Du + u = D^2u - 2Du + u = 2\mathrm{e}^s \quad \text{cioè} \quad u'' - 2u' + u = 2\mathrm{e}^s.$$

Risolviamo l'equazione omogenea associata $u'' - 2u' + u = 0$ il cui polinomio caratteristico è $P(\lambda) = \lambda^2 - 2\lambda + 1$ che ammette l'unica radice $\lambda = 1$. Dalla teoria segue che l'equazione omogenea ammette le due soluzioni linearmente indipendenti $u_1(s) = \mathrm{e}^s$ e $u_2(t) = s\mathrm{e}^s$. Per risolvere il problema non omogeneo utilizziamo il metodo per simiglianza cercando una soluzione del tipo $\bar{u}(s) = as^2\mathrm{e}^s$, per qualche a. Imponendo che tale funzione sia soluzione si ricava $a = 1$; la generica soluzione è dunque data da

$$u(s) = a_1\mathrm{e}^s + a_2s\mathrm{e}^s + s^2\mathrm{e}^s,$$

al variare di $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$. Essendo $y(t) = u(\ln t)$ e $ty'(t) = u'(\ln t)$ si ottiene $0 = y(1) = u(0)$ e $1 = y'(1) = u'(0)$; imponendo queste condizioni iniziali si trova $a_1 = 0$, $a_2 = 1$ e in definitiva $u(s) = s\mathrm{e}^s + s^2\mathrm{e}^s$. Tornando alle variabili t si ottiene la soluzione cercata per $t > 0$

$$y(t) = u(\ln t) = t\ln t + t\ln^2 t.$$

Si osservi che $\lim_{t\to 0^+} y(t) = 0$, quindi è possibile estendere la soluzione per continuità in $t = 0$ ma non è possibile farlo in maniera C^1. Infatti $y'(t) = 1+3\ln t+\ln^2 t$ quindi $\lim_{t\to 0^+} y'(t) = +\infty$. (nella variabile s, invece, non ci sono problemi!). L'intervallo massimale d'esistenza è dunque $]0, +\infty[$.

Volendo comunque cercare una soluzione di $t^2y'' - ty' + y = 2t$ definita per $t < 0$, si utilizza la sostituzione $t = -\mathrm{e}^s$ per cui $s = \ln(-t) = \ln|t|$. In ogni caso si ha $\frac{ds}{dt} = \frac{1}{t}$ perciò (8.34) continua a valere anche per $t < 0$. Se ne deduce che l'equazione soddisfatta da $u(s) = y(-\mathrm{e}^s)$ è

$$u'' - 2u' + u = -2\mathrm{e}^s.$$

Procedendo come sopra si ottiene che la soluzione generale è della forma

$$u(s) = a_1\mathrm{e}^s + a_2 s\mathrm{e}^s - s^2\mathrm{e}^s,$$

con $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$, e tornando alla variabile t si ottiene

$$y(t) = u(\ln(-t)) = -a_1 t - a_2 t\ln(-t) + t\ln^2(-t) = a_1|t| + a_2|t|\ln|t| + t\ln^2|t|,$$

che è la medesima espressione che si ottiene per $t > 0$, dunque è valida per ogni $t \neq 0$. È interessante notare che l'equazione è risolta dalla soluzione trovata $y = y(t)$ anche in $t = 0$ ma nel seguente senso "generalizzato"

$$\lim_{t\to 0}\big(t^2y''(t) - ty'(t) + y(t)\big) = \lim_{t\to 0} 2t = 0,$$

(verificarlo per esercizio). Più in generale, esistono estensioni del concetto di soluzione per un'equazione differenziale lineare per le quali quella trovata è soluzione su tutto $\mathbb{R}$.

Osservazione 8.12 Si può verificare che il polinomio caratteristico dell'equazione relativa a u è proprio il polinomio P che si trova anche in (8.33). Risolvere l'equazione (8.32) equivale a trovare le soluzioni dell'equazione omogenea associata per u, la quale è a coefficienti costanti. Dalla teoria nota, tali soluzioni sono combinazioni delle funzioni $\mathrm{e}^{\lambda_k s}$, dove λ_k varia tra tutte le radici del polinomio P (nel caso ce ne sia una complessa $\lambda_k = \alpha_k + i\omega_k$ in relazione si ottengono le soluzioni $\mathrm{e}^{\alpha_k s}\cos(\omega_k s)$, $\mathrm{e}^{\alpha_k s}\operatorname{sen}(\omega_k s)$). Se inoltre la radice λ_k è multipla di ordine p_k saranno soluzioni anche le funzioni $s^h\mathrm{e}^{\lambda_k s}$ per $1 \le h \le p_k - 1$. Si noti che tali funzioni corrispondono alle soluzioni $y(t)$ della forma $(\ln t)^h t^{\lambda_k}$. Ciò giustifica l'analisi svolta nel caso omogeneo.

Capitolo 9

Sistemi lineari

In questo capitolo verrà affrontato lo studio dei sistemi lineari di equazioni differenziali. In particolare tratteremo approfonditamente i sistemi omogenei fino ad arrivare alla dimostrazione del teorema fondamentale della variazione delle costanti. In seguito ci limiteremo ai sistemi lineari a coefficienti costanti omogenei e non omogenei, caso in cui la soluzione è spesso calcolabile. Vedremo infine l'applicazione dei metodi introdotti alle equazioni lineari di ordine n a coefficienti costanti. Per approfondimenti del caso generale dei sistemi a coefficienti non costanti si rimanda ai testi in letteratura.

Nozioni e risultati di base sulle equazioni lineari

Sia dato un sistema lineare di equazioni differenziali del tipo

$$y' = A(t)y + b(t), \tag{9.1}$$

dove $A : I \to \mathcal{M}(n, \mathbb{R})$, $b : I \to \mathbb{R}^n$ sono funzioni continue. Il *sistema omogeneo associato* a (9.1) è

$$z' = A(t)z, \tag{9.2}$$

mentre (9.1) con $b(t) \neq 0$ si dice sistema *non omogeneo*. Per queste equazioni saremo come sempre interessati al problema di Cauchy associato

$$\begin{cases} y' = A(t)y + b(t) \\ y(t_0) = y_0. \end{cases} \tag{9.3}$$

Per facilità e per non appesantire ulteriormente la scrittura, in tutto il capitolo utilizzeremo la convenzione di "confondere" i vettori riga con i vettori colonna, ovvero confonderemo la notazione funzionale di $A(t)y$, intesa

come applicazione lineare $A(t)$ da $\mathbb{R}^n$ in $\mathbb{R}^n$ che agisce sul vettore (riga) $y = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$, con la notazione matriciale $A(t)y$ dove ora $A(t)$ è interpretata come matrice (che rappresenta la precedente applicazione lineare avendo scelto la base canonica sia nel dominio che nel codominio) e $A(t)y$ è il prodotto matriciale di $A(t)$ e y. In quest'ultimo caso sarebbe corretto scrivere $A(t)y^T$, dove y^T indica il trasposto di y cioè il vettore colonna $(y_1, \dots, y_n)^T$ con i medesimi coefficienti di y. Allo stesso modo dovremmo scrivere $(y^T)'$ al posto di y' e $b(t)^T$ al posto di $b(t)$. Come già detto, per non appesantire la notazione si deciderà di non scrivere la ^{T} di $(\cdot)^T$; la situazione sarà comunque chiara dal contesto.

Posto $A(t) = (a_{ij}(t))_{i,j=1,\dots,n}$, il sistema (9.1) è dato esplicitamente da

$$y_k' = \sum_{j=1}^{n} a_{kj}(t) y_j + b_k(t), \qquad k = 1, \dots, n,$$

ovvero, in forma matriciale, da

$$\begin{pmatrix} y_1' \\ \vdots \\ y_n' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}(t) & \cdots & a_{1n}(t) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}(t) & \cdots & a_{nn}(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1(t) \\ \vdots \\ b_n(t) \end{pmatrix}.$$

Per il Corollario 4.16 tutti i problemi di Cauchy (9.3) hanno esistenza e unicità globali delle soluzioni. Le soluzioni massimali saranno quindi definite su tutto I. Di conseguenza, in tutto il capitolo e anche dove non specificato, con "soluzione" si intenderà sempre "soluzione massimale" o eventualmente l'unico prolungamento massimale della soluzione in considerazione.

Dai risultati classici sulle applicazioni lineari tra spazi vettoriali su un campo $\mathcal{K}$ (per noi sarà $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$), argomento dell'algebra lineare, segue che:

- l'insieme $\mathcal{S}$ delle soluzioni (massimali) di (9.2) ha una struttura di $\mathcal{K}$-spazio vettoriale, e può essere pensato come sottospazio di $C^1(I, \mathcal{K}^n)$;
- la generica soluzione $y(t)$ dell'equazione non omogenea (9.1) si può scrivere nella forma $y(t) = z(t) + \overline{y}(t)$, cioè come somma della generica soluzione $z(t)$ dell'equazione omogenea associata (9.2) e di una qualsiasi fissata soluzione $\overline{y}(t)$ dell'equazione non omogenea (9.1).

In definitiva, basterà saper risolvere i sistemi lineari omogenei e trovare dei metodi per ottenere almeno una soluzione particolare di (9.1). Il primo problema verrà affrontato nella prossima sezione, il secondo verrà risolto, almeno dal punto di vista teorico, dal Teorema della variazione delle costanti. Nel seguito faremo la scelta $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ma gran parte delle considerazioni varranno anche nel caso $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

Sistemi lineari omogenei

In questa sezione vogliamo studiare le proprietà e lo spazio vettoriale $\mathcal{S}$ delle soluzioni (massimali) di un generico sistema lineare omogeneo

$$y' = A(t)y. \tag{9.4}$$

Anzitutto si ha il seguente risultato

Proposizione 9.1 *$\mathcal{S}$ è una spazio vettoriale di dimensione n.*

Dimostrazione Fissato $t_0 \in I$, consideriamo la *mappa di valutazione*

$$\begin{aligned} \delta_{t_0} : \mathcal{S} &\to \mathbb{R}^n \\ y(\cdot) &\mapsto y(t_0), \end{aligned}$$

che a ogni soluzione $y(\cdot)$ associa il valore che assume in t_0. Tale applicazione è banalmente lineare. Inoltre, per l'unicità delle soluzioni (massimali) dei problemi di Cauchy, per ogni $y_0 \in \mathbb{R}^n$ esiste un'unica soluzione di (9.4) tale che $y(t_0) = y_0$, ovvero esiste un'unica $y \in \mathcal{S}$ tale che $\delta_{t_0} y = y_0$. L'applicazione δ_{t_0} è allora biiettiva, dunque isomorfismo tra spazi vettoriali. Di conseguenza $\dim \mathcal{S} = \dim \mathbb{R}^n = n$. □

Per ottenere la generica soluzione y di (9.4) è allora sufficiente individuare n soluzioni linearmente indipendenti $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ in $\mathcal{S}$, per cui sarà

$$y = c_1\varphi_1 + \ldots + c_n\varphi_n,$$

per qualche $c_1, c_2, \ldots, c_n \in \mathbb{R}$. Ricordiamo che in questa caso la lineare indipendenza è intesa in senso funzionale, come nella seguente definizione.

Definizione 9.2 *Le funzioni $\varphi_1, \ldots, \varphi_p$ di $\mathcal{S}$ si dicono* linearmente indipendenti *se sono linearmente indipendenti come elementi dello spazio $C^1(I, \mathbb{R}^n)$, cioè se $c_1\varphi_1 + \ldots + c_p\varphi_p = 0$ in $C^1(I, \mathbb{R}^n)$ implica $c_1 = \ldots = c_p = 0$.*

Dire che $c_1\varphi_1 + \ldots + c_p\varphi_p = 0$ in $C^1(I, \mathbb{R}^n)$ significa dire che tale somma è nulla come funzione cioè che $c_1\varphi_1(t) + \ldots + c_p\varphi_p(t) = 0$ per ogni $t \in I$.

Proposizione 9.3 *Date $\varphi_1, \ldots, \varphi_p \in \mathcal{S}$, cioè p soluzioni dell'equazione omogenea $y' = A(t)y$, le seguenti affermazioni sono equivalenti:*

i) $\varphi_1, \ldots, \varphi_p$ sono linearmente indipendenti in $\mathcal{S}$;

ii) esiste $t_0 \in I$ tale che $\varphi_1(t_0), \ldots, \varphi_p(t_0)$ sono vettori linearmente indipendenti in $\mathbb{R}^n$;

iii) per ogni $t \in I$ i vettori $\varphi_1(t), \ldots, \varphi_p(t)$ sono linearmente indipendenti in $\mathbb{R}^n$.

DIMOSTRAZIONE Banalmente iii) implica ii). Dimostriamo che ii) implica i) (analogamente iii) implica i)). Supponiamo quindi che esista $t_0 \in I$ tale che i vettori $\varphi_1(t_0), \ldots, \varphi_p(t_0)$ siano linearmente indipendenti in $\mathbb{R}^n$. Presa una combinazione lineare $c_1\varphi_1 + \ldots + c_p\varphi_p = 0$ nulla in $\mathcal{S}$, per definizione si avrà $c_1\varphi_1(t) + \ldots + c_p\varphi_p(t) = 0$ per ogni $t \in I$, in particolare per $t = t_0$. Per l'ipotesi ii) segue allora che $c_1 = \ldots = c_p = 0$, da cui i).

Verifichiamo infine che i) implica iii) (analogamente i) implica ii)). Supponiamo che valga i) e che per assurdo non valga iii). Allora esiste $t_0 \in I$ per cui $\varphi_1(t_0), \ldots, \varphi_p(t_0)$ sono linearmente dipendenti, cioè esistono $c_1, \ldots, c_p$ non tutti nulli tali che $c_1\varphi_1(t_0) + \ldots + c_p\varphi_p(t_0) = 0$. In relazione a questi c_k, poniamo $y = \sum_{k=1}^p c_k\varphi_k$. Essendo $\mathcal{S}$ spazio vettoriale si ha $y \in \mathcal{S}$, da cui segue che y è soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = A(t)y \\ y(t_0) = 0. \end{cases}$$

Poiché anche la funzione nulla è soluzione di tale problema, per unicità si ha $0 = y = \sum_{k=1}^p c_k\varphi_k$ con $c_1, \ldots, c_p$ non tutti nulli, assurdo per la lineare indipendenza dei φ_k come elementi di $\mathcal{S}$. □

Come corollario si deduce che per trovare una base di $\mathcal{S}$ basta trovare n soluzioni che siano linearmente indipendenti in un punto di I.

Corollario 9.4 *$\{\varphi_k\}_{k=1}^n$ è base di $\mathcal{S}$ se e solo se esiste $t_0 \in I$ tale che $\{\varphi_k(t_0)\}_{k=1}^n$ è base di $\mathbb{R}^n$.*

In particolare, fissato $t_0 \in I$ (per esempio $t_0 = 0$ se $0 \in I$) per trovare una base di $\mathcal{S}$ è sufficiente risolvere n problemi di Cauchy per l'equazione $y' = A(t)y$, $y(t_0) = y_0$, con y_0 uguale successivamente a n vettori linearmente indipendenti $v_1, \ldots, v_n$ di $\mathbb{R}^n$, per esempio i vettori e_k della base canonica.

Supponiamo ora che $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ siano linearmente indipendenti, dunque base di $\mathcal{S}$; allora per ogni $y \in \mathcal{S}$ esistono $c_1, \ldots, c_n \in \mathbb{R}$, tali che $y = c_1\varphi_1 + \ldots + c_n\varphi_n$. Ciascuna funzione φ_k è a valori in $\mathbb{R}^n$, dunque avrà n componenti $\varphi_k = (\varphi_{1k}, \ldots, \varphi_{nk})$ e analogamente sarà $y = (y_1, \ldots, y_n)$. In forma di vettori colonna, si ottiene la seguente scrittura matriciale:

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} \varphi_{11} \\ \vdots \\ \varphi_{n1} \end{pmatrix} + \ldots + c_n \begin{pmatrix} \varphi_{1n} \\ \vdots \\ \varphi_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varphi_{11} & \cdots & \varphi_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \varphi_{n1} & \cdots & \varphi_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} =: \Phi(t)c.$$

In forma compatta scriveremo $y(t) = \Phi(t)c$ dove $\Phi(t)$ è la matrice sopra introdotta, le cui colonne sono date dai vettori della base di $\mathcal{S}$, mentre c è il vettore di $\mathbb{R}^n$ di coordinate $(c_1, \ldots, c_n)$. Motivati da questo discorso, si definisce la matrice soluzione come segue.

Definizione 9.5 *Si dice* matrice soluzione *associata a* $y' = A(t)y$ *una qualsiasi matrice*

$$\Phi(t) = \left(\varphi_1(t) \;\middle|\; \cdots \;\middle|\; \varphi_n(t) \right), \tag{9.5}$$

dove le colonne $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ *sono soluzioni di* $y' = A(t)y$*, cioè elementi di* $\mathcal{S}$*. Se in più* $\det \Phi(t) \neq 0$ *per ogni* $t \in I$ *(cioè se* $\Phi(t)$ *è invertibile per ogni* t*)* Φ *si dice* matrice fondamentale *o* risolvente *del sistema lineare.*

Per quanto visto in precedenza, la condizione $\det \Phi(t) \neq 0$ per ogni $t \in I$ è ridondante. Infatti, basta che tale condizione valga per un solo t.

Proposizione 9.6 *Per una matrice soluzione* $\Phi(t)$ *sono equivalenti:*

- *per ogni* $t \in I$ *si ha* $\det \Phi(t) \neq 0$*;*
- *esiste* $t_0 \in I$ *tale che* $\det \Phi(t_0) \neq 0$*.*

Quindi $\Phi(t)$ *è matrice fondamentale se e solo se è invertibile almeno per un (quindi per tutti)* $t \in I$*.*

Dimostrazione Alla luce della Proposizione 9.3 si ha che $\det \Phi(t) \neq 0$ per ogni t se e solo se $\Phi(t)$ è invertibile per ogni t se e solo se le colonne di $\Phi(t)$ sono n soluzioni linearmente indipendenti per ogni t se e solo se esiste un t_0 tale che le colonne siano linearmente indipendenti se e solo se $\det \Phi(t_0) \neq 0$. □

È possibile caratterizzare le matrici soluzione mediante un'equazione (sistema) di equazioni differenziali in forma matriciale come segue dalla prossima proposizione.

Proposizione 9.7 *Le seguenti affermazioni sono equivalenti:*

- $\Phi(t)$ *è matrice soluzione;*
- $\Phi(t)$ *è soluzione dell'equazione differenziale in forma matriciale*

  $$Y' = A(t)Y$$

  dove $Y \in \mathcal{M}(n, \mathbb{R}) \cong \mathbb{R}^{n^2}$*;*

- *per ogni $c \in \mathbb{R}^n$ la funzione $\Phi(t)c$ è soluzione dell'equazione $y' = A(t)y$.*

DIMOSTRAZIONE Preliminarmente osserviamo che la mappa

$$\begin{aligned} \mathcal{M}(n,q) \times \mathcal{M}(q,m) &\to \mathcal{M}(n,m) \\ (A,B) &\mapsto AB, \end{aligned}$$

è bilineare. Dotato $\mathcal{M}(n,q)$ della topologia di $\mathbb{R}^{nq}$, per il teorema di differenziabilità delle funzioni composte e delle applicazioni bilineari, se $t \mapsto A(t)$, e $t \mapsto B(t)$ sono derivabili, si ha

$$\big(A(t)B(t)\big)' = A(t)'B(t) + A(t)B(t)'. \tag{9.6}$$

Questo fatto verrà usato spesso nel seguito.

Tornando all'enunciato della proposizione, dette $\varphi_1(t), \dots, \varphi_n(t)$ le colonne di $\Phi(t)$ si osserva che la k-esima colonna di $A(t)\Phi(t)$ si ottiene moltiplicando $A(t)$ per la k-esima colonna di $\Phi(t)$ che è $\varphi_k(t)$, dunque coincide con $A(t)\varphi_k(t)$. Inoltre la k-esima colonna di $\Phi'(t)$ è $\varphi_k'(t)$. In definitiva

$$\Phi'(t) = A(t)\Phi(t) \quad \Longleftrightarrow \quad \varphi_k' = A(t)\varphi_k \text{ per ogni } k = 1, \dots, n,$$

che dimostra l'equivalenza delle prime due asserzioni. Preso $c \in \mathbb{R}^n$ si ha poi che

$$\begin{aligned} (\Phi(t)c)' = A(t)(\Phi(t)c) \ \ \forall c \in \mathbb{R}^n \quad &\Longleftrightarrow \quad \Phi'(t)c = (A(t)\Phi(t))c \ \ \forall c \in \mathbb{R}^n \\ &\Longleftrightarrow \quad \Phi'(t) = A(t)\Phi(t), \end{aligned}$$

che conclude la dimostrazione. □

Vale anche il seguente risultato che afferma che l'insieme delle matrici fondamentali è stabile per moltiplicazione a destra con matrici invertibili.

Proposizione 9.8 *Se $\Phi(t)$ è matrice fondamentale e $B \in GL(n,\mathbb{R})$ è una matrice invertibile, allora $\Phi(t)B$ è ancora una matrice fondamentale.*

DIMOSTRAZIONE Infatti, se Φ è matrice risolvente si ha

$$(\Phi(t)B)' = \Phi'(t)B = (A(t)\Phi(t))B = A(t)(\Phi(t)B)$$

dunque $\Phi(t)B$ soddisfa l'equazione matriciale $Y' = A(t)Y$ e per la Proposizione 9.7 è matrice soluzione. Inoltre $\det(\Phi(t)B) = \det \Phi(t) \cdot \det B \neq 0$, dunque è anche matrice fondamentale. □

Dalle osservazioni sopra si può concludere che la generica soluzione y dell'equazione lineare omogenea $y' = A(t)y$ si può scrivere nella forma $y(t) = \Phi(t)c$ al variare di $c \in \mathbb{R}^n$. Più precisamente vale il seguente risultato.

Proposizione 9.9 *L'insieme $\mathcal{S}$ delle soluzioni dell'equazione lineare omogenea $y' = A(t)y$ può essere rappresentato come $\mathcal{S} = \{\Phi(t)c : \ c \in \mathbb{R}^n\}$, dove $\Phi(t)$ è una qualsiasi fissata matrice fondamentale associata all'equazione.*

Dimostrazione Fissata una matrice fondamentale $\Phi(t)$ da quanto visto sopra si ha che $\{\Phi(t)c : \ c \in \mathbb{R}^n\} \subseteq \mathcal{S}$. Resta da dimostrare che ogni soluzione è rappresentabile nella forma $\Phi(t)c$ per qualche c. Fissata una soluzione y tale che, diciamo, $y(t_0) = y_0$, sia $c = \Phi(t_0)^{-1}y_0$. La funzione $\Phi(t)c$ è una soluzione tale che $\Phi(t_0)c = \Phi(t_0)\Phi(t_0)^{-1}y_0 = y_0$ quindi, per l'unicità delle soluzioni del problema di Cauchy, deve coincidere con $y(t)$. $\square$

Sistemi lineari non omogenei

Studiata la struttura delle soluzioni di un sistema lineare omogeneo e compresa la rappresentazione delle relative soluzioni in termini della matrice fondamentale, è possibile risolvere, almeno in linea teorica, anche il problema non omogeneo (9.1).

Teorema 9.10 (di Lagrange, della variazione delle costanti) *Il problema di Cauchy per il sistema lineare non omogeneo*

$$\begin{cases} y' = A(t)y + b(t) \\ y(t_0) = y_0, \end{cases} \tag{9.7}$$

con $A : I \to \mathcal{M}(n, \mathbb{R})$, $b : I \to \mathbb{R}^n$ funzioni continue e $t_0 \in I$, ammette come unica soluzione la funzione

$$y(t) = \Phi(t)\left[\Phi(t_0)^{-1}y_0 + \int_{t_0}^{t} \Phi(s)^{-1}b(s)\,ds\right], \tag{9.8}$$

dove $\Phi(t)$ è una qualsiasi matrice fondamentale relativa al sistema omogeneo associato.

Dimostrazione Da quanto appena visto, la generica soluzione dell'equazione omogenea associata $z' = A(t)z$ è del tipo $z(t) = \Phi(t)c$, dove $\Phi(t)$ è una qualsiasi matrice fondamentale associata e c è un generico elemento (costante) di $\mathbb{R}^n$. L'idea di Lagrange è stata quella di cercare una soluzione dell'equazione non omogenea della forma $y(t) = \Phi(t)c(t)$ con $c(t)$ funzione derivabile (le costanti che variano!). Anzitutto dovrà essere $y_0 = y(t_0) = \Phi(t_0)c(t_0)$ da cui, grazie all'invertibilità di $\Phi(t_0)$, si ottiene $c(t_0) = \Phi(t_0)^{-1}y_0$. Imponendo che una tale funzione $y(t)$ sia soluzione dell'equazione non omogenea, per la Proposizione 9.7 si ottiene

$$y'(t) = A(t)y(t) + b(t) \quad \Longleftrightarrow \quad (\Phi(t)c(t))' = A(t)(\Phi(t)c(t)) + b(t) \quad \Longleftrightarrow$$

$$\iff \quad \Phi(t)'c(t) + \Phi(t)c'(t) = (A(t)\Phi(t))c(t) + b(t) \quad \iff$$
$$\iff \quad (A(t)\Phi(t))c(t) + \Phi(t)c'(t) = (A(t)\Phi(t))c(t) + b(t)$$

da cui si ricava $\Phi(t)c'(t) = b(t)$. $\Phi(t)$ è invertibile, essendo matrice fondamentale, perciò $c'(t) = \Phi(t)^{-1}b(t)$ e integrando tra t_0 e t

$$c(t) - c(t_0) = \int_{t_0}^{t} c'(s)\,ds = \int_{t_0}^{t} \Phi(s)^{-1}b(s)\,ds,$$

e in definitiva

$$y(t) = \Phi(t)c(t) = \Phi(t)\left[\Phi(t_0)^{-1}y_0 + \int_{t_0}^{t} \Phi(s)^{-1}b(s)\,ds\right],$$

cioè la tesi. □

Osservazione 9.11 Ricordando che un'applicazione lineare $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ commuta con l'operatore di integrazione, cioè vale

$$A\int_a^b f(s)\,ds = \int_a^b Af(s)\,ds,$$

per ogni funzione integrabile $f : [a, b] \to \mathbb{R}^n$, la formula (9.8) si può scrivere nella forma

$$y(t) = \Phi(t)\Phi(t_0)^{-1}y_0 + \int_{t_0}^{t} \Phi(t)\Phi(s)^{-1}b(s)\,ds \tag{9.9}$$

$$= R(t, t_0)y_0 + \int_{t_0}^{t} R(t, s)b(s)\,ds, \tag{9.10}$$

dove si è posto $R(t, s) := \Phi(t)\Phi(s)^{-1}$. Si noti che per la Proposizione 9.8 e per ogni fissato $s \in I$ la matrice $R(t, s)$ è matrice fondamentale associata a $y' = A(t)y$ e soddisfa $R(s, s) = I$. In particolare, la funzione $t \mapsto R(t, s)$ è l'unica soluzione del problema di Cauchy per il sistema in forma matriciale

$$\begin{cases} Y' = A(t)Y \\ Y(s) = I. \end{cases}$$

In definitiva, per risolvere il problema di Cauchy per un sistema di equazioni differenziali lineari è sufficiente calcolare $R(t, s)$ (o in generale una qualsiasi matrice risolvente $\Phi(t)$) e l'integrale in (9.10). Vedremo come farlo nel caso di un sistema a coefficienti costanti.

Sistemi lineari a coefficienti costanti

In questa sezione studieremo il caso di un sistema di equazioni differenziali lineari a coefficienti costanti del tipo

$$y' = Ay + b(t), \tag{9.11}$$

dove $A \in \mathcal{M}(n, \mathbb{R})$ e $b : I \to \mathbb{R}^n$ è una funzione continua. Dalla sezione precedente sappiamo che per ottenere una soluzione tramite la formula della variazione delle costanti è sufficiente risolvere il problema lineare omogeneo associato

$$z' = Az, \tag{9.12}$$

del quale si vuole calcolare la matrice $R(t, s)$ soluzione di

$$\begin{cases} Y' = AY \\ Y(s) = I. \end{cases} \tag{9.13}$$

Tale sistema è autonomo e per l'Osservazione 1.8 la sua soluzione coincide con la traslata temporale di una quantità s della soluzione del problema di Cauchy tale che $Y(0) = I$. In termini della matrice $R(t, s)$ ciò significa che $R(t, s) = R(t - s, 0)$. Sarà quindi sufficiente risolvere il problema di Cauchy

$$\begin{cases} Y' = AY \\ Y(0) = I, \end{cases} \tag{9.14}$$

la cui soluzione $R(t, 0)$ si indicherà, per ragioni che saranno chiare in seguito, con e^{tA}. In particolare, per le osservazioni fatte (9.10) diventa

$$\begin{aligned} y(t) &= R(t - t_0, 0)y_0 + \int_{t_0}^{t} R(t - s, 0)b(s)\, ds \\ &= \mathrm{e}^{(t-t_0)A}y_0 + \int_{t_0}^{t} \mathrm{e}^{(t-s)A}b(s)\, ds. \end{aligned} \tag{9.15}$$

Si noti l'analogia tra (9.15), (9.8) e (8.5); quest'ultima, nel caso in cui $a(t) = a$ è costante, conduce a $A(t) = a(t - t_0)$ e alla formula

$$y(t) = \mathrm{e}^{a(t-t_0)}y_0 + \int_{t_0}^{t} \mathrm{e}^{a(t-s)}b(s)\, ds,$$

che è proprio (9.15) nel caso particolare $n = 1$. Passiamo ora a studiare la struttura della soluzione del problema di Cauchy per l'equazione (9.14). Per

la (globale) lipschitzianità del campo vettoriale si può applicare il Teorema di Cauchy-Lipschitz. La soluzione, definita globalmente in $\mathbb{R}$, si può quindi ottenere, almeno localmente in un intorno di $t_0 = 0$, come limite uniforme delle relative iterate di Picard:

$$\begin{cases} Y_0(t) = I \\ Y_{k+1}(t) = Y_0 + \displaystyle\int_0^t AY_k(s)\,ds. \end{cases}$$

Per il Teorema di Cauchy-Lipschitz, esiste un intervallo $[-\varepsilon, \varepsilon]$ sul quale $Y_k(t)$ converge uniformemente alla soluzione di (9.14). Dalla dimostrazione del teorema, si ha $\varepsilon = \min\{\alpha, R/M\}$ dove, in questo caso, α e R possono essere presi arbitrari e $M = \max\{||AY|| : \ Y \in B[I, R]\}$. Si può dimostrare che, indipendentemente dalla scelta di α, R, possibilmente anche grandi, ε è maggiorato da $1/\|A\|$ (tuttavia si ricordi che la soluzione massimale di (9.14) è definita in $\mathbb{R}$). Calcoliamo i primi termini della successione: poiché A commuta con l'integrale si ha

$$Y_1(t) = I + \int_0^t AY_0(s)\,ds = I + A\int_0^t ds = I + tA,$$
$$Y_2(t) = I + \int_0^t AY_1(s)\,ds = I + \int_0^t (A + sA^2)\,ds = I + tA + \frac{(tA)^2}{2},$$

e per induzione

$$Y_k(t) = I + tA + \frac{(tA)^2}{2!} + \ldots + \frac{(tA)^k}{k!} = p_k(tA),$$

dove si definisce $p_k(B) = I + B + \ldots + \frac{B^k}{k!}$ per una generica $B \in \mathcal{M}(n, \mathbb{R})$. Per il Teorema di Cauchy-Lipschitz si ha che

$$R(t, 0) = \lim_{k\to+\infty} p_k(tA) = \lim_{k\to+\infty} \Big(I + tA + \frac{(tA)^2}{2!} + \ldots + \frac{(tA)^k}{k!}\Big),$$

uniformemente in $[-\varepsilon, \varepsilon]$. In analogia con le serie di potenze reali, ciò suggerisce di introdurre il simbolo e^{tA} ponendo

$$\mathrm{e}^{tA} = \lim_{k\to+\infty} p_k(tA) = \lim_{k\to+\infty} \Big(I + tA + \frac{(tA)^2}{2!} + \ldots + \frac{(tA)^k}{k!}\Big), \tag{9.16}$$

per cui $R(t, 0) = \mathrm{e}^{tA}$. Si è quindi trovata la soluzione di (9.14) in $[-\varepsilon, \varepsilon]$. Cosa succede fuori da questo intervallo? Verificheremo che il limite sopra

introdotto esiste per ogni t e definisce la soluzione $Y(t) = \mathrm{e}^{tA}$ globalmente in $\mathbb{R}$. L'analisi potrebbe essere svolta direttamente, ma converrà studiare il problema più in astratto, introducendo il concetto di *esponenziale di una matrice*. Ciò permetterà di identificare la norma più adatta per provare la convergenza (9.16), nonché di calcolare esplicitamente, in certi casi, la soluzione stessa.

Esponenziale di una matrice

Motivati dall'analisi precedente, per ogni $k \in \mathbb{N}$ definiamo la matrice $n \times n$

$$p_k(A) = \sum_{h=0}^{k} \frac{A^h}{h!}, \tag{9.17}$$

dove per convenzione si pone $A^0 = I$. Vogliamo dimostrare che la successione di matrici $(p_k(A))_{k\in\mathbb{N}}$ converge in $\big(\mathcal{M}(n,\mathbb{R}), \|\cdot\|\big)$ dotato della norma degli operatori (si veda (A.3) in Appendice). Poiché tale spazio è completo rispetto alla norma scelta, è sufficiente dimostrare che la successione è di Cauchy; presi $k > h$, essendo $\|A^i\| \le \|A\|^i$ (proprietà che giustifica la scelta di questa norma; si veda il Teorema A.29 in Appendice) si ha

$$\begin{aligned}\|p_k(A) - p_h(A)\| = \Big\| \sum_{i=h+1}^{k} \frac{A^i}{i!} \Big\| &\le \sum_{i=h+1}^{k} \frac{\|A^i\|}{i!} \\ &\le \sum_{i=h+1}^{k} \frac{\|A\|^i}{i!} = \big|p_k(\|A\|) - p_h(\|A\|)\big|.\end{aligned}$$

Poiché la serie esponenziale $\mathrm{e}^x = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{x^i}{i!}$ converge per ogni $x \in \mathbb{R}$, in particolare per $x = \|A\|$, la successione $p_k(\|A\|)$ è di Cauchy ed è possibile rendere la differenza $\big|p_k(\|A\|) - p_h(\|A\|)\big|$ arbitrariamente piccola pur di prendere k, h sufficientemente grandi. Ciò dimostra che $(p_k(A))_{k\in\mathbb{N}}$ è di Cauchy, dunque converge nella norma degli operatori. Si pone per definizione

$$\mathrm{e}^A = \lim_{k\to+\infty} p_k(A) = \lim_{k\to+\infty} \sum_{h=0}^{k} \frac{A^h}{h!} =: \sum_{h=0}^{\infty} \frac{A^h}{h!}, \tag{9.18}$$

detta *matrice esponenziale di A*.

A questo punto si può risolvere definitivamente il problema (9.14). Infatti, se si dimostra che la successione delle iterate di Picard converge uniformemente in un intervallo I contenente t_0 (non necessariamente uguale all'intervallo $[t_0 - \delta, t_0 + \delta]$ del Teorema di Cauchy-Lipschitz), allora la funzione

limite è soluzione dell'equazione differenziale in I (si veda l'Esercizio 2.11). Fissato $T > 0$, sia $|t| \leq T$; per la successione delle iterate di Picard vale

$$\begin{aligned}\|Y_k(t) - Y_h(t)\| = \|p_k(tA) - p_h(tA)\| &\leq \sum_{i=h+1}^{k} \frac{\|(tA)^i\|}{i!} \\ &\leq \sum_{i=h+1}^{k} \frac{\|tA\|^i}{i!} \leq \sum_{i=h+1}^{k} \frac{(T\|A\|)^i}{i!},\end{aligned}$$

che, analogamente a sopra, può essere reso piccolo a piacere pur di prendere k, h sufficientemente grandi, uniformemente per $|t| \leq T$. La successione di funzioni (Y_k) è di Cauchy nello spazio $\big(C\big([-T,T], \mathcal{M}(n,\mathbb{R})\big), \|\cdot\|_\infty\big)$ che è normato completo, dunque converge uniformemente. Dall'arbitrarietà di $T > 0$ la funzione $Y(t) = \mathrm{e}^{tA}$ è allora soluzione di (9.14) in tutto $\mathbb{R}$.

Si noti che grazie alla Proposizione 9.7 la funzione $t \mapsto \mathrm{e}^{tA}$ da $\mathbb{R}$ in $\mathcal{M}(n,\mathbb{R})$ è soluzione dell'equazione differenziale $Y' = AY$ in forma matriciale ovvero si ha $\frac{d}{dt}\mathrm{e}^{tA} = A\mathrm{e}^{tA}$ che è anche uguale a $\mathrm{e}^{tA}A$, visto che e^{tA} e A commutano (perché?). Questo risultato può essere ottenuto in maniera indipendente andando a studiare direttamente la derivabilità della funzione $t \mapsto \mathrm{e}^{tA}$. Analogamente si può anche dimostrare direttamente che la funzione $y(t) = \mathrm{e}^{tA}y_0$ è soluzione di (9.14) senza fare uso delle iterate di Picard e del Teorema di Cauchy-Lipschitz (si vedano gli approfondimenti al capitolo).

Come conseguenza di (9.15) si ha che $y(t) = \mathrm{e}^{tA}y_0$ è la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = Ay \\ y(0) = y_0. \end{cases} \tag{9.19}$$

Osservazione 9.12 Sia $y(t) = \mathrm{e}^{tA}y_0$ la soluzione di (9.19). È facile verificare che la successione delle iterate di Picard relative al problema con dati $y(t_1) = y_1$ è data da $p_k((t-t_1)A)y_1$, pertanto converge alla relativa soluzione $\tilde{y}(t)$. In particolare, preso $y_1 = \mathrm{e}^{t_1A}y_0$ si ha che $\tilde{y}(t)$ e $y(t)$ sono entrambe soluzioni che valgono y_1 al tempo t_1, quindi per unicità devono coincidere. Ne discende che

$$\big[p_k((t-t_1)A)y_1 - p_k(tA)y_0\big] \to \mathrm{e}^{(t-t_1)A}y_1 - \mathrm{e}^{tA}y_0 = 0,$$

da cui segue $\mathrm{e}^{(t-t_1)A}\mathrm{e}^{t_1A}y_0 = \mathrm{e}^{tA}y_0$. Posto $t_2 = t - t_1$, dall'arbitrarietà di y_0 segue che $\mathrm{e}^{t_2A}\mathrm{e}^{t_1A} = \mathrm{e}^{(t_2+t_1)A}$, che generalizza la ben nota proprietà per gli esponenziali reali. Tra breve vedremo che questa proprietà si può estendere, sotto opportune ipotesi, a una classe più ampia di matrici.

Proposizione 9.13 *Date $A, B \in \mathcal{M}(n)$ valgono le seguenti proprietà:*

i) $\mathrm{e}^0 = I$, $\mathrm{e}^{\lambda I} = \mathrm{e}^\lambda I$;

ii) se A e B commutano, *ovvero $AB = BA$, allora* $\mathrm{e}^{A+B} = \mathrm{e}^A \mathrm{e}^B = \mathrm{e}^B \mathrm{e}^A$;

iii) e^A *è invertibile e vale* $(\mathrm{e}^A)^{-1} = \mathrm{e}^{-A}$;

iv) se A e B sono simili, cioè esiste $P \in GL(n)$ tale che $A = P^{-1}BP$ allora $\mathrm{e}^A = P^{-1}\mathrm{e}^B P$.

Dimostrazione i) segue banalmente dalla definizione; ii) si dimostra come l'analoga proprietà per l'esponenziale reale definito tramite la sua serie di potenze. Se A e B commutano vale l'analogo della formula di Newton per lo sviluppo del binomio:

$$(A+B)^m = \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} A^{m-k} B^k.$$

Si dimostri questa formula per esercizio, utilizzando il principio di induzione e individuando con precisione dove l'ipotesi di commutatività viene utilizzata. A questo punto si ha

$$\begin{aligned}
\mathrm{e}^{A+B} &= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(A+B)^m}{m!} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} A^{m-k} B^k \\
&= \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{m} \frac{A^{m-k}}{(m-k)!} \frac{B^k}{k!} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{A^m}{m!} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{B^k}{k!} = \mathrm{e}^A \mathrm{e}^B,
\end{aligned}$$

dove si è anche usato il prodotto di Cauchy di due serie.

iii) Poiché A commuta con $-A$ si ha $I = \mathrm{e}^{A-A} = \mathrm{e}^A \mathrm{e}^{-A}$ da cui la tesi.

iv) Per ogni $k \in \mathbb{N}$ si ha

$$\begin{aligned}
p_k(A) &= I + A + \ldots + \frac{A^k}{k!} = P^{-1}IP + P^{-1}BP + \ldots + \frac{(P^{-1}BP)^k}{k!} \\
&= P^{-1}IP + P^{-1}BP + \ldots + P^{-1}\frac{B^k}{k!}P \\
&= P^{-1}\Big(I + B + \ldots + \frac{B^k}{k!}\Big)P = P^{-1}p_k(B)P,
\end{aligned}$$

e poiché la moltiplicazione a sinistra o a destra per una matrice è un'applicazione continua da $\mathcal{M}(n)$ in sé nella norma degli operatori, passando al limite per $k \to +\infty$ si ha la tesi. $\square$

Calcolo della matrice esponenziale

In questa sezione affronteremo il problema del calcolo esplicito di e^{tA}. Giungeremo al risultato principale attraverso una serie di casi intermedi.

Matrici diagonali a blocchi. Sia $A = \mathrm{diag}(A_1, A_2, \dots, A_p) = \bigoplus_{k=1}^{p} A_k$ con A_k matrice quadrata di ordine ν_k, cioè del tipo

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & & & \\ & A_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_p \end{pmatrix}.$$

Poiché A è somma diretta delle A_k si riconosce facilmente che per $i \in \mathbb{N}$

$$A^i = \begin{pmatrix} A_1^i & & & \\ & A_2^i & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_p^i \end{pmatrix},$$

cioè $A^i = \mathrm{diag}(A_1^i, A_2^i, \dots, A_p^i) = \bigoplus_{k=1}^{p} A_k^i$ per ogni $i \in \mathbb{N}$, da cui segue che $p_h(A) = \mathrm{diag}(p_h(A_1), p_h(A_2), \dots, p_h(A_p))$ perciò

$$\begin{aligned} \mathrm{e}^A = \lim_{h\to+\infty} p_h(A) &= \lim_{h\to+\infty} \mathrm{diag}(p_h(A_1), p_h(A_2), \dots, p_h(A_p)) \\ &= \mathrm{diag}(\mathrm{e}^{A_1}, \mathrm{e}^{A_2}, \dots, \mathrm{e}^{A_p}) = \bigoplus_{k=1}^{p} \mathrm{e}^{A_k}, \end{aligned}$$

cioè $\mathrm{e}^{\mathrm{diag}(A_1, A_2, \dots, A_p)} = \mathrm{diag}(\mathrm{e}^{A_1}, \mathrm{e}^{A_2}, \dots, \mathrm{e}^{A_p})$. In particolare si riottiene la formula $\mathrm{e}^{\lambda I} = \mathrm{e}^{\lambda} I$. Più in generale se $A_k = \lambda_k I_{\nu_k}$ dove I_{ν_k} è la matrice identità di ordine ν_k si ha $\mathrm{e}^A = \mathrm{diag}(\mathrm{e}^{\lambda_1} I_{\nu_1}, \mathrm{e}^{\lambda_2} I_{\nu_2}, \dots, \mathrm{e}^{\lambda_p} I_{\nu_p})$.

Con lo stesso procedimento si dimostra che se $A = \mathrm{diag}(A_1, A_2, \dots, A_p)$ e $t \in \mathbb{R}$ si ha $\mathrm{e}^{tA} = \mathrm{diag}(\mathrm{e}^{tA_1}, \mathrm{e}^{tA_2}, \dots, \mathrm{e}^{tA_p})$.

Matrice di rotazione J. Sia

$$J = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

che rappresenta una matrice di rotazione di un angolo di ampiezza $\pi/2$ in senso antiorario. Si osserva che

$$J^1 = J, \qquad J^2 = -I, \qquad J^3 = -J, \qquad J^4 = I, \qquad J^5 = J,$$

quindi le potenze di J si ripetono a cicli di 4. Ne discende che

$$\begin{aligned}
\mathrm{e}^{tJ} &= I + tJ + \frac{t^2}{2!}J^2 + \frac{t^3}{3!}J^3 + \ldots = I + tJ - \frac{t^2}{2!}I - \frac{t^3}{3!}J + \ldots \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -t \\ t & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -t^2/2! & 0 \\ 0 & -t^2/2! \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & t^3/3! \\ -t^3/3! & 0 \end{pmatrix} + \ldots \\
&= \begin{pmatrix} 1 - \dfrac{t^2}{2!} + \dfrac{t^4}{4!} + \ldots & -\Big(t - \dfrac{t^3}{3!} + \dfrac{t^5}{5!} - \ldots\Big) \\ t - \dfrac{t^3}{3!} + \dfrac{t^5}{5!} - \ldots & 1 - \dfrac{t^2}{2!} + \dfrac{t^4}{4!} + \ldots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos t & -\operatorname{sen} t \\ \operatorname{sen} t & \cos t \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

In particolare, l'unica soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = Jy \\ y(0) = \overline{y} = (\overline{y}_1, \overline{y}_2) \end{cases} \qquad \text{ovvero} \qquad \begin{cases} y_1' = -y_2 \\ y_2' = y_1 \\ (y_1(0), y_2(0)) = (\overline{y}_1, \overline{y}_2) \end{cases}$$

è data da

$$y(t) = \mathrm{e}^{tJ}\overline{y} \quad \text{cioè} \quad \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos t & -\operatorname{sen} t \\ \operatorname{sen} t & \cos t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \overline{y}_1 \\ \overline{y}_2 \end{pmatrix},$$

e in definitiva

$$\begin{cases} y_1(t) = \overline{y}_1 \cos t - \overline{y}_2 \operatorname{sen} t \\ y_2(t) = \overline{y}_1 \operatorname{sen} t + \overline{y}_2 \cos t. \end{cases}$$

Più in generale, se $\omega \in \mathbb{R}$ la soluzione di

$$\begin{cases} y' = (\omega J)y = \begin{pmatrix} 0 & -\omega \\ \omega & 0 \end{pmatrix} y \\ y(0) = \overline{y} = (\overline{y}_1, \overline{y}_2) \end{cases}$$

è data da $y(t) = \mathrm{e}^{t(\omega J)}\overline{y} = \mathrm{e}^{(t\omega)J}\overline{y}$ cioè

$$\begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\omega t) & -\operatorname{sen}(\omega t) \\ \operatorname{sen}(\omega t) & \cos(\omega t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \overline{y}_1 \\ \overline{y}_2 \end{pmatrix}.$$

Matrici della forma $\alpha I + \omega J$. Più precisamente

$$\alpha I + \omega J = \begin{pmatrix} \alpha & -\omega \\ \omega & \alpha \end{pmatrix}.$$

Poiché la matrice identità e i suoi multipli commutano con ogni matrice, per ii) della Proposizione 9.13 si ottiene

$$\mathrm{e}^{t(\alpha I+\omega J)} = \mathrm{e}^{t\alpha I}\mathrm{e}^{t\omega J} = (\mathrm{e}^{t\alpha} I)\mathrm{e}^{t\omega J} = \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{\alpha t}\cos(\omega t) & -\mathrm{e}^{\alpha t}\operatorname{sen}(\omega t) \\ \mathrm{e}^{\alpha t}\operatorname{sen}(\omega t) & \mathrm{e}^{\alpha t}\cos(\omega t) \end{pmatrix},$$

perciò l'unica soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = (\alpha I + \omega J)y \\ y(0) = \overline{y} = (\overline{y}_1, \overline{y}_2) \end{cases} \qquad \text{ovvero} \qquad \begin{cases} y_1' = \alpha y_1 - \omega y_2 \\ y_2' = \omega y_1 + \alpha y_2 \\ (y_1(0), y_2(0)) = (\overline{y}_1, \overline{y}_2) \end{cases}$$

è data da $y(t) = \mathrm{e}^{t(\alpha I+\omega J)}\overline{y}$ cioè

$$\begin{cases} y_1(t) = \overline{y}_1\mathrm{e}^{\alpha t}\cos(\omega t) - \overline{y}_2\mathrm{e}^{\alpha t}\operatorname{sen}(\omega t) \\ y_2(t) = \overline{y}_1\mathrm{e}^{\alpha t}\operatorname{sen}(\omega t) + \overline{y}_2\mathrm{e}^{\alpha t}\cos(\omega t). \end{cases}$$

Matrici diagonalizzabili. Sia A una matrice diagonalizzabile, cioè tale che esiste P matrice invertibile con $P^{-1}AP = D$ dove $D = \operatorname{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ e $\lambda_k \in \mathbb{R}$ per $k = 1, \dots, n$. Ciò significa anche che i λ_k sono gli autovalori di A e che le colonne di P sono, ordinatamente, autovalori associati. In generale ricordiamo che se un'applicazione lineare $\mathcal{B} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ è rappresentata da una matrice B nella base $(v_1, \dots, v_n)$ di $\mathbb{R}^n$, in un'altra base $(w_1, \dots, w_n)$ viene rappresentata dalla matrice $P^{-1}BP$ dove la k-esima colonna di P è formata dai coefficienti del k-esimo elemento w_k della nuova base rispetto alla base $(v_1, \dots, v_n)$; P verrà detta *matrice del cambio di base* da $(v_1, \dots, v_n)$ a $(w_1, \dots, w_n)$. Dato ora il sistema lineare di equazioni differenziali $y' = Ay$, dalla relazione sopra si ha $y' = PDP^{-1}y$ e applicando la matrice P^{-1} ad ambo i membri $(P^{-1}y)' = D(P^{-1}y)$. Ciò suggerisce di introdurre le nuove variabili $z = P^{-1}y$ tali che $z' = Dz$. Si ottiene così un sistema di n equazioni disaccoppiate $z_k' = \lambda_k z_k$, $k = 1, \dots, n$, la cui soluzione generale è del tipo $z_k(t) = \overline{z}_k\mathrm{e}^{\lambda_k t}$, ovvero $z(t) = \operatorname{diag}(\mathrm{e}^{\lambda_1 t}, \dots, \mathrm{e}^{\lambda_n t})\overline{z}$. La soluzione $y(t)$ si otterrà invertendo la trasformazione: $y(t) = Pz(t)$. In termini della matrice esponenziale si ha $y(t) = \mathrm{e}^{tA}y_0$ dove

$$\mathrm{e}^{tA} = \mathrm{e}^{PtDP^{-1}} = P\mathrm{e}^{t\operatorname{diag}(\lambda_1,\dots,\lambda_n)}P^{-1} = P\operatorname{diag}(\mathrm{e}^{\lambda_1 t}, \dots, \mathrm{e}^{\lambda_n t})P^{-1}.$$

In definitiva, se la matrice A è diagonalizzabile, al fine di calcolare e^{tA} è sufficiente calcolarne gli autovalori, per ottenere e^{tD}, e una base di autovettori le cui colonne formeranno P. Infine occorrerà invertire la matrice P.

Quest'approccio mostra che la base canonica e le funzioni incognite $y(t)$ non sono le migliori per studiare il problema: in generale l'idea è quella di trovare un'altra base in cui il sistema si semplifichi, come nel caso appena visto delle nuove incognite $z(t)$. L'esempio considerato, unito al fatto che ogni matrice è triangolarizzabile (almeno in campo complesso), suggerisce che gli autovalori della matrice giochino un ruolo fondamentale.

Matrici 2×2 con autovalori complessi. Sia A matrice 2×2 con un autovalore complesso $\lambda = \alpha + i\omega$, dove si suppone $\omega > 0$. Poiché la matrice è reale, il coniugato $\overline{\lambda} = \alpha - i\omega$ è l'altro suo autovalore. Inoltre, se v è autovettore (complesso, ovvero $v \in \mathbb{C}^2$) relativo a λ allora il vettore coniugato $\overline{v}$ è autovettore relativo a $\overline{\lambda}$. Avendo gli autovalori distinti, A è diagonalizzabile in campo complesso; più precisamente, preso un autovettore v relativo a λ e detta $P \in GL(n, \mathbb{C})$ la matrice le cui colonne sono date dalle coordinate di v e $\overline{v}$, si ha che

$$P^{-1}AP = D := \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \overline{\lambda} \end{pmatrix}.$$

D ha coefficienti complessi; volendo una rappresentazione reale, bisognerà trovare un'altra forma canonica per A. A tal fine, al posto della base $\{v, \overline{v}\}$ (di $\mathbb{C}^2$) basta prendere la base (di $\mathbb{R}^2$) formata dai vettori $\{\Im v, \Re v\}$. Per trovare la matrice che rappresenta A in questa base è sufficiente vedere come si trasforma D passando dalla base $\{v, \overline{v}\}$ alla base $\{\Im v, \Re v\}$. Essendo

$$\Im v = \frac{v - \overline{v}}{2i} = -\frac{i}{2}v + \frac{i}{2}\overline{v}, \quad \Re v = \frac{v + \overline{v}}{2} = \frac{1}{2}v + \frac{1}{2}\overline{v},$$

la matrice di trasformazione dalla base $\{v, \overline{v}\}$ alla base $\{\Im v, \Re v\}$, le cui colonne sono le coordinate dei vettori di $\{\Im v, \Re v\}$ nella base $\{v, \overline{v}\}$, è data da

$$Q = \begin{pmatrix} -i/2 & 1/2 \\ i/2 & 1/2 \end{pmatrix} \text{ con inversa data da } Q^{-1} = \begin{pmatrix} i & -i \\ 1 & 1 \end{pmatrix},$$

e svolgendo i conti si ottiene

$$(PQ)^{-1}A(PQ) = Q^{-1}DQ = \begin{pmatrix} \alpha & -\omega \\ \omega & \alpha \end{pmatrix} = \alpha I + \omega J.$$

Posto $R = PQ$ la matrice di trasformazione dalla base canonica nella base $\{\Im v, \Re v\}$, per quanto visto in precedenza la matrice esponenziale e^{tA} sarà

$$\mathrm{e}^{tA} = R\mathrm{e}^{t(\alpha I + \omega J)}R^{-1} = R \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{\alpha t}\cos(\omega t) & -\mathrm{e}^{\alpha t}\operatorname{sen}(\omega t) \\ \mathrm{e}^{\alpha t}\operatorname{sen}(\omega t) & \mathrm{e}^{\alpha t}\cos(\omega t) \end{pmatrix} R^{-1}.$$

In particolare, le componenti della generica soluzione $y(t)$ del sistema lineare $y' = Ay$, data da $y(t) = \mathrm{e}^{tA}y_0$, saranno opportune combinazioni lineari delle funzioni $\mathrm{e}^{t\alpha}\cos(\omega t)$, $\mathrm{e}^{t\alpha}\operatorname{sen}(\omega t)$, dove $\lambda = \alpha \pm i\omega$ sono gli autovalori complessi della matrice A.

Matrici semisemplici. Con matrice semisemplice intendiamo una matrice $A \in \mathcal{M}(n, \mathbb{R})$ a coefficienti reali e diagonalizzabile in campo complesso, ovvero pensata come $A \in \mathcal{M}(n, \mathbb{C})$. Poiché se A ammette un autovalore λ ammette anche $\overline{\lambda}$ come altro autovalore, siano $\rho_1, \dots, \rho_r$ gli autovalori reali (non necessariamente distinti, contati con la loro relativa molteplicità algebrica) e $\lambda_1, \overline{\lambda_1}, \dots, \lambda_s, \overline{\lambda_s}$, con $\lambda_h = \alpha_h + i\omega_h$, le coppie complesse non reali di autovalore-autovalore coniugato (anche queste non necessariamente distinte), con $n = r + 2s$. Essendo A diagonalizzabile in campo complesso, è possibile trovare una base di $\mathbb{C}^2$ formata da autovettori $\{w_1, \dots, w_r, v_1, \overline{v_1}, \dots, v_s, \overline{v_s}\}$, con w_k autovettore relativo a ρ_k, $k = 1, \dots, r$, e v_h autovalore relativo a λ_h, $h = 1, \dots, s$. In questa base si ha

$$P^{-1}AP = \operatorname{diag}(\rho_1, \dots, \rho_r, \lambda_1, \overline{\lambda_1}, \dots, \lambda_s, \overline{\lambda_s}),$$

dove P è la relativa matrice del cambiamento di base. Estendendo quanto visto nel caso precedente, nella base $\{w_1, \dots, w_r, \Im v_1, \Re v_1, \dots, \Im v_s, \Re v_s\}$ di $\mathbb{R}^2$ l'applicazione lineare associata ad A verrà rappresentata dalla matrice diagonale a blocchi

$$R^{-1}AR = \operatorname{diag}(\rho_1, \dots, \rho_r, Z_1, \dots, Z_s) =: S,$$

dove R è la relativa matrice del cambio di base e

$$Z_h = \alpha_h I + \omega_h J = \begin{pmatrix} \alpha_h & -\omega_h \\ \omega_h & \alpha_h \end{pmatrix}, \ h = 1, \dots, s.$$

Essendo

$$\mathrm{e}^{tS} = \operatorname{diag}(\mathrm{e}^{t\rho_1}, \dots, \mathrm{e}^{t\rho_r}, \mathrm{e}^{tZ_1}, \dots, \mathrm{e}^{tZ_s}),$$

con

$$\mathrm{e}^{tZ_h} = \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{\alpha_h t}\cos(\omega_h t) & -\mathrm{e}^{\alpha_h t}\operatorname{sen}(\omega_h t) \\ \mathrm{e}^{\alpha_h t}\operatorname{sen}(\omega_h t) & \mathrm{e}^{\alpha_h t}\cos(\omega_h t) \end{pmatrix},$$

le componenti della soluzione generale del sistema lineare $y' = Ay$, data da $y(t) = \mathrm{e}^{tA}y_0 = R\mathrm{e}^{tS}R^{-1}y_0$, saranno combinazioni lineari delle funzioni

$$\mathrm{e}^{\rho_k t}, \quad \mathrm{e}^{\alpha_h t}\cos(\omega_h t), \quad \mathrm{e}^{\alpha_h t}\operatorname{sen}(\omega_h t),$$

dove ρ_k varia tra tutti gli autovalori reali di A e $\lambda_h = \alpha_h + i\omega_h$ varia tra tutti gli autovalori complessi e non reali di A.

Inizieremo ora ad affrontare il caso di una matrice A non necessariamente semisemplice.

Matrici della forma $S + N$ con S semisemplice, N nilpotente.

Sia data una matrice della forma $A = S + N$ con S matrice semisemplice e N matrice nilpotente, cioè tale che $N^\nu = 0$ per qualche $\nu \geq 1$. Supporremo anche che S e N commutino, ovvero che $SN = NS$: questa proprietà sarà fondamentale per poter utilizzare ii) della Proposizione 9.13. Poiché se $N^\nu = 0$ si ha anche $N^j = 0$ per ogni $j \geq \nu$, la matrice esponenziale di tN si semplifica notevolmente, essendo

$$\mathrm{e}^{tN} = I + tN + \frac{t^2N^2}{2!} + \ldots = I + tN + \frac{t^2N^2}{2!} + \ldots + \frac{t^{\nu-1}N^{\nu-1}}{(\nu-1)!},$$

quindi i coefficienti di e^{tN} sono polinomi in t di grado minore o uguale a $\nu - 1$. Per la proprietà ii) della Proposizione 9.13 si ha

$$\mathrm{e}^{tA} = \mathrm{e}^{t(S+N)} = \mathrm{e}^{tS}\mathrm{e}^{tN}.$$

La matrice e^{tS} si può calcolare come nel caso precedente, trovando una base che la diagonalizza; e^{tN} per quanto appena osservato ha i coefficienti che sono polinomi in t di grado minore o uguale e $\nu - 1$ dove ν è l'indice di nilpotenza di N. In definitiva si può concludere che le componenti della soluzione generale del sistema lineare $y' = Ay$, data da $y(t) = \mathrm{e}^{tA}y_0$, sono combinazioni lineari delle funzioni

$$t^j\mathrm{e}^{\rho_k t}, \quad t^j\mathrm{e}^{\alpha_h t}\cos(\omega_h t), \quad t^j\mathrm{e}^{\alpha_h t}\operatorname{sen}(\omega_h t), \tag{9.20}$$

dove ρ_k varia tra tutti gli autovalori reali di A, $\lambda_h = \alpha_h + i\omega_h$ varia tra tutti quelli complessi non reali, e j varia tra 0 e $\nu - 1$. Ovviamente non tutte le combinazioni lineari di tali funzioni sono soluzioni del sistema: ciò dipenderà dalla particolare forma della matrice A.

Più precisamente, vedremo che in (9.20) compaiono potenze di t a esponente non nullo solamente in relazione ad autovalori *difettosi*.

Esempio 9.14 Calcoliamo la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} x' = x \\ y' = x + y \\ x(0) = 1,\ y(0) = -1. \end{cases}$$

Il sistema è lineare a coefficienti costanti e può essere scritto nella forma

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} =: A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Si osservi che A si decompone banalmente come

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} =: S + N,$$

dove $S = I$ commuta banalmente con N, la quale è nilpotente di ordine 2. Si ha dunque $\mathrm{e}^{tN} = I + tN$ da cui $\mathrm{e}^{tA} = \mathrm{e}^{tI}\mathrm{e}^{tN} = \mathrm{e}^t(I + tN)$. La soluzione è dunque data da

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \mathrm{e}^{tA} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \mathrm{e}^t \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ t & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathrm{e}^t \\ (t-1)\mathrm{e}^t \end{pmatrix}.$$

In questo caso il sistema poteva essere risolto più facilmente osservando che la prima equazione è disaccoppiata dalla seconda. Si risolve quindi $x' = x$, $x(0) = 1$, con soluzione $x(t) = \mathrm{e}^t$ e la si inserisce nella seconda equazione ottenendo il problema di Cauchy per l'equazione *non omogenea* $y' = y + \mathrm{e}^t$, $y(0) = -1$. La generica soluzione dell'omogenea associata è $z(t) = c\mathrm{e}^t$, $c \in \mathbb{R}$, mentre una soluzione particolare si trova col metodo per simiglianza ed è $\overline{y}(t) = t\mathrm{e}^t$. In conclusione, la generica soluzione è data da $y(t) = c\mathrm{e}^t + t\mathrm{e}^t$ e imponendo le condizioni iniziali si trova $c = -1$, riottenendo il risultato già trovato.

Caso generale: decomposizione $S + N$.

La situazione del caso precedente è in realtà generale, nel senso che ogni matrice A può essere decomposta nella somma di una matrice semisemplice e di una nilpotente che commutano. Per ottenere tale decomposizione introduciamo dei concetti di algebra lineare, alcuni dei quali dovrebbero già essere ben noti. Data una matrice $A \in \mathcal{M}(n, \mathbb{R})$ (ma si potrebbe benissimo prendere $A \in \mathcal{M}(n, \mathbb{C})$) e detto $\lambda \in \mathbb{C}$ un suo autovalore si chiama *autospazio relativo all'autovalore* λ il sottospazio lineare di $\mathbb{C}^n$ (non banale) $\ker(A - \lambda I)$. I suoi elementi non nulli vengono chiamati *autovettori relativi a* λ e la sua dimensione viene chiamata *molteplicità geometrica di* λ e indicata con ν_λ^g. Detta $\nu = \nu_\lambda$ la *molteplicità algebrica di* λ, ovvero la molteplicità di λ come radice di $p_A(t) = \det(A - tI)$, *polinomio caratteristico associato a* A, si introduce poi l'*autospazio generalizzato relativo a* λ definito da $E_\lambda := \ker(A - \lambda I)^\nu$; i suoi elementi non nulli vengono detti *autovettori*

generalizzati relativi a λ. Si può dimostrare che $\nu_\lambda = \dim\ker(A-\lambda I)^{\nu_\lambda}$; inoltre, detti $\lambda_1,\ldots,\lambda_p$ gli autovalori distinti di A di molteplicità algebrica, rispettivamente, $\nu_1,\ldots,\nu_p$, con $\nu_1+\ldots+\nu_p=n$, e detti $E_1,\ldots,E_p$ i relativi autospazi generalizzati, si ha

$$\mathbb{C}^n = \bigoplus_{k=1}^{p} \ker(A-\lambda_k I)^{\nu_k} = \bigoplus_{k=1}^{p} E_k.$$

Sia $\mathcal{A}$ l'applicazione lineare da $\mathbb{C}^n$ in sé, rappresentata nella base canonica dalla matrice A. Essenzialmente la scelta di una base $\mathcal{B}$ di $\mathbb{C}^n$ ottenuta come unione di basi di ciascun E_k "diagonalizza la parte semisemplice di $\mathcal{A}$" nel senso fornito dal seguente teorema, del quale ometteremo la dimostrazione.

Teorema 9.15 (di decomposizione $S+N$) *Data $A\in\mathcal{M}(n,\mathbb{C})$ è possibile trovare una base di $\mathbb{C}^n$ nella quale la matrice A si rappresenta con*

$$P^{-1}AP = D+N, \tag{9.21}$$

con D uguale alla matrice diagonale degli autovalori, ciascuno ripetuto tante volte quante la rispettiva molteplicità algebrica, N nilpotente che commuta con D. In particolare, se $A\in\mathcal{M}(n,\mathbb{R})$ siano $\rho_1,\ldots,\rho_r$ gli autovalori reali distinti, di molteplicità algebrica rispettivamente $\nu_1,\ldots,\nu_r$, e siano $\lambda_1,\overline{\lambda_1},\ldots,\lambda_s,\overline{\lambda_s}$ le coppie complesse non reali di autovalore-autovalore coniugato, ciascun $\lambda_h=\alpha_h+i\omega_h$ ($\omega_h>0$) di molteplicità algebrica μ_h (sarà dunque $\nu_1+\ldots+\nu_r+2(\mu_1+\ldots+\mu_s)=n$). Allora

i) per ogni autovalore reale ρ_k è possibile scegliere una base $\mathcal{B}_k$ del corrispondente autospazio generalizzato formata da vettori reali;

ii) scelta per ogni autovalore λ_h una base $\mathcal{B}'_h$ del corrispondente autospazio generalizzato, l'insieme $\overline{\mathcal{B}'_h}$ dei vettori coniugati di $\mathcal{B}'_h$ costituisce una base dell'autospazio generalizzato corrispondente a $\overline{\lambda_h}$;

iii) l'insieme

$$\mathcal{B} = \Big(\bigcup_{k=1}^{r}\mathcal{B}_k\Big)\cup\Big(\bigcup_{h=1}^{s}\mathcal{B}'_h\Big)\cup\Big(\bigcup_{h=1}^{s}\overline{\mathcal{B}'_h}\Big)$$

è una base di $\mathbb{C}^n$; detta P la matrice del cambiamento di base si ha

$$P^{-1}AP = D+N, \tag{9.22}$$

con $D=\operatorname{diag}(\rho_1 I_{\nu_1},\ldots,\rho_r I_{\nu_r},\lambda_1 I_{\mu_1},\ldots,\lambda_s I_{\mu_s},\overline{\lambda_1} I_{\mu_1},\ldots,\overline{\lambda_s} I_{\mu_s})$ (dove I_j è la matrice identità $j\times j$) e N è nilpotente;

iv) *D e N commutano, cioè $DN = ND$;*

v) *N è diagonale a blocchi: $N = \mathrm{diag}(N_1, \dots, N_r, N_1', \dots, N_s', N_1'', \dots, N_s'')$ dove N_k è matrice $\nu_k \times \nu_k$ nilpotente di ordine $\le \nu_k$, $k = 1, \dots, r$, N_h' e N_h'' sono matrici $\mu_h \times \mu_h$ nilpotenti di ordine $\le \mu_h$, $h = 1, \dots, s$.*

Volendo una rappresentazione reale, si prenda la base $\mathcal{B}^*$ di $\mathbb{C}^n$ (ma anche di $\mathbb{R}^n$ visto che i vettori sono reali) ottenuta da $\mathcal{B}$ sostituendo alle coppie $(v, \overline{v})$ i vettori $(\Im v, \Re v)$. Allora

vi) *detta Q la matrice di trasformazione dalla base canonica alla base $\mathcal{B}^*$ si ha*

$$Q^{-1}AQ = S + N \tag{9.23}$$

dove $S = \mathrm{diag}(\rho_1 I_{\nu_1}, \dots, \rho_r I_{\nu_r}, \Sigma_1, \dots, \Sigma_s)$, N è nilpotente reale, e

$$\Sigma_h = \mathrm{diag}\Big(\begin{pmatrix} \alpha_h & -\omega_h \\ \omega_h & \alpha_h \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} \alpha_h & -\omega_h \\ \omega_h & \alpha_h \end{pmatrix} \Big)$$

è composta da μ_h blocchi uguali tra loro, $h = 1, \dots, s$;

vii) *S e N commutano, cioè $SN = NS$;*

viii) *N è diagonali a blocchi: $N = \mathrm{diag}(N_1, \dots, N_r, M_1, \dots, M_s)$ dove N_k è matrice reale $\nu_k \times \nu_k$ nilpotente di ordine $\le \nu_k$, $k = 1, \dots, r$, M_h è matrice $2\mu_h \times 2\mu_h$ nilpotente di ordine $\le \mu_h$, $h = 1, \dots, s$.*

Dimostrazione Omessa.

Il teorema afferma che ogni matrice A è simile a una matrice somma di una matrice semisemplice (o addirittura diagonale) e di una nilpotente che commutano. In realtà A stessa gode della medesima proprietà. Supponendo infatti che valga (9.22), si ha

$$A = P(D + N)P^{-1} = PDP^{-1} + PNP^{-1} =: S' + N'.$$

La matrice S' è diagonalizzabile essendo simile alla matrice diagonale D; N' è nilpotente dello stesso ordine di N, infatti se $N^k = 0$ si ha $(N')^k = PN^kP^{-1} = 0$. Infine le due matrici commutano: $S'N' = PDNP^{-1} = PNDP^{-1} = N'S'$. Analogamente, se vale (9.23) si ha $A = S' + N'$ con $S' = QSQ^{-1}$ e $N' = QNQ^{-1}$ che soddisfano le medesime proprietà.

Il teorema sostanzialmente afferma che la base $\mathcal{B}$ diagonalizza S' e trasforma N' in una matrice diagonale a blocchi, ciascun blocco corrispondente

a un autovalore; ciò ha un'immediata applicazione alla risoluzione dei sistemi lineari di equazioni differenziali a coefficienti costanti, come si vedrà tra breve. Poiché $N^i = \mathrm{diag}(N_1^i, \dots, N_r^i, M_1^i, \dots, M_s^i)$ dal teorema discende che l'indice di nilpotenza di N è il massimo degli indici di nilpotenza dei blocchi da cui è formata. Inoltre

$$\begin{aligned} \mathrm{e}^{t(S+N)} = \mathrm{e}^{tS}\mathrm{e}^{tN} &= \mathrm{diag}(\mathrm{e}^{t\rho_1} I_{\nu_1}, \dots, \mathrm{e}^{t\rho_r} I_{\nu_r}, \mathrm{e}^{t\Sigma_1}, \dots, \mathrm{e}^{t\Sigma_s}) \cdot \\ &\qquad \cdot \mathrm{diag}(\mathrm{e}^{tN_1}, \dots, \mathrm{e}^{tN_r}, \mathrm{e}^{tM_1}, \dots, \mathrm{e}^{tM_s}) \\ &= \mathrm{diag}(\mathrm{e}^{t\rho_1}\mathrm{e}^{tN_1}, \dots, \mathrm{e}^{t\rho_r}\mathrm{e}^{tN_r}, \mathrm{e}^{t\Sigma_1}\mathrm{e}^{tM_1}, \dots, \mathrm{e}^{t\Sigma_s}\mathrm{e}^{tM_s}), \end{aligned}$$

da cui si deduce che ciascun blocco nilpotente influenza esclusivamente il blocco dell'autovalore a cui è associato. Essendo $\mathrm{e}^{tA} = Q\mathrm{e}^{t(S+N)}Q^{-1}$, in definitiva si può concludere che nel caso di una generica matrice A le componenti della soluzione generale del sistema lineare $y' = Ay$, data da $y(t) = \mathrm{e}^{tA}y_0$, sono combinazioni lineari delle funzioni

$$t^j \mathrm{e}^{\rho_k t}, \quad t^j \mathrm{e}^{\alpha_h t}\cos(\omega_h t), \quad t^j \mathrm{e}^{\alpha_h t}\,\mathrm{sen}(\omega_h t), \tag{9.24}$$

dove ρ_k varia tra tutti gli autovalori reali di A, $\lambda_h = \alpha_h + i\omega_h$ varia tra tutti quelli complessi non reali e, fissato un autovalore ρ_k oppure λ_h, l'indice j varia tra 0 e $\sigma - 1$, dove σ è l'indice di nilpotenza del blocco nilpotente associato all'autovalore fissato.

Si osservi che $\ker(A - \lambda I) \subseteq \ker(A - \lambda I)^{\nu_\lambda}$ da cui $1 \le \nu_\lambda^g \le \nu_\lambda \le n$. L'autovalore λ si dice *difettoso* se $\nu_\lambda^g < \nu_\lambda$. Se λ non è difettoso, cioè se $\nu_\lambda^g = \nu_\lambda$, i due autospazi sopra coincidono, dunque è possibile trovare una base di E_λ formata da autovettori associati a λ. Ciò fa sì che il relativo blocco nilpotente relativo a λ in N (del tipo N_k, N_h' o N_h'' a seconda dei casi) sia identicamente nullo. Se ne deduce che in (9.24) compaiono potenze di t non nulle relativamente ai soli autovalori difettosi.

Si noti infine che se l'autovalore λ è algebricamente semplice, cioè $\nu_\lambda = 1$, segue anche $\nu_\lambda^g = 1$ ovvero λ è geometricamente semplice, in particolare non è difettoso.

Esempi ed esercizi

In generale, dal punto di vista operativo per risolvere il sistema $y' = Ay$ si può procedere come segue

- si calcolano gli autovalori di A;
- si trova una base $\mathcal{B}$ di $\mathbb{C}^n$ formata da autovettori generalizzati; in tale base vale (9.22) (se si vuole la forma reale si prende la base $\mathcal{B}^*$ e si utilizza (9.23));

- si ha $A = S' + N'$ dove $S' = PDP^{-1}$ e $N' = PNP^{-1}$, con S' semisemplice e N' nilpotente che commutano. La matrice S' è facilmente calcolabile una volta trovati gli autovalori e la base di autovettori generalizzati (da cui P); per calcolare N' conviene osservare che $N' = A - S' = A - PDP^{-1}$ (un procedimento analogo si può fare partendo da (9.23));
- a questo punto si trova $\mathrm{e}^{tA} = \mathrm{e}^{tS'}\mathrm{e}^{tN'}$ dove $\mathrm{e}^{tS'} = P\mathrm{e}^{tD}P^{-1}$, di facile computo perché D è diagonale, mentre $\mathrm{e}^{tN'}$ si calcola velocemente perché N' è nilpotente.

Esempio 9.16 Consideriamo il sistema lineare $y' = Ay$ dove

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

La matrice è triangolare e si riconoscono subito gli autovalori $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = 1$, $\lambda_3 = -2$, algebricamente semplici quindi non difettosi. Allora A è diagonalizzabile in una qualsiasi base formata da autovettori. Si ha

$$\ker(A - \lambda_1 I) = \ker \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \mathrm{span}\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rangle =: \mathrm{span}\langle v_1 \rangle,$$

$$\ker(A - \lambda_2 I) = \ker \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} = \mathrm{span}\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \rangle =: \mathrm{span}\langle v_2 \rangle,$$

$$\ker(A - \lambda_3 I) = \ker \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \mathrm{span}\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle =: \mathrm{span}\langle v_3 \rangle.$$

Considerata la matrice del cambio di base P

$$P = \left(\begin{array}{c|c|c} v_1 & v_2 & v_3 \end{array} \right) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

le cui colonne sono date dai coefficienti dei tre autovettori trovati (che sono linearmente indipendenti perché relativi ad autovalori distinti), si ha $P^{-1}AP = D := \mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = \mathrm{diag}(-1, 1, -2)$ e

(9.25)

$$\mathrm{e}^{tA} = P\mathrm{e}^{tD}P^{-1} = P \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{-t} & 0 & 0 \\ 0 & \mathrm{e}^{t} & 0 \\ 0 & 0 & \mathrm{e}^{-2t} \end{pmatrix} P^{-1} = \left(\begin{array}{c|c|c} \mathrm{e}^{-t}v_1 & \mathrm{e}^{t}v_2 & \mathrm{e}^{-2t}v_3 \end{array} \right) P^{-1}.$$

Infine si trova facilmente l'inversa di P

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

da cui segue

$$\mathrm{e}^{tA} = \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{-t} & \mathrm{e}^{t} & 0 \\ 0 & 2\mathrm{e}^{t} & 0 \\ 0 & 0 & \mathrm{e}^{-2t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{-t} & (\mathrm{e}^{t} - \mathrm{e}^{-t})/2 & 0 \\ 0 & \mathrm{e}^{t} & 0 \\ 0 & 0 & \mathrm{e}^{-2t} \end{pmatrix}.$$

La soluzione del sistema $y' = Ay$ con dato iniziale $y(0) = (\overline{y}_1, \overline{y}_2, \overline{y}_3)$ è dunque $y(t) = \mathrm{e}^{tA} y(0)$ cioè

$$\begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ y_3(t) \end{pmatrix} = \mathrm{e}^{tA} \begin{pmatrix} \overline{y}_1 \\ \overline{y}_2 \\ \overline{y}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\overline{y}_1 - \overline{y}_2/2)\mathrm{e}^{-t} + \overline{y}_2 \mathrm{e}^{t}/2 \\ \overline{y}_2 \mathrm{e}^{t} \\ \overline{y}_3 \mathrm{e}^{-2t} \end{pmatrix}.$$

Si noti che anche questa volta per risolvere il sistema sarebbe stato più semplice risolvere la seconda e la terza equazione ovvero, rispettivamente, $y_2' = y_2$, $y_3' = -2y_3$, con soluzioni date da $y_2(t) = \overline{y}_2 \mathrm{e}^{t}$, $y_3(t) = \overline{y}_3 \mathrm{e}^{-2t}$, quindi inserirle nella prima equazione ottenendo $y_1' = -y_1 + \overline{y}_2 \mathrm{e}^{t}$, e risolvere quest'ultima, per esempio col metodo per simiglianza.

Osserviamo come la soluzione poteva anche essere dedotta dalla seguente Proposizione, tratta da [3].

Proposizione 9.17 *Dato $v \in \mathbb{R}^n$ vettore non nullo, la funzione $y(t) = \mathrm{e}^{\lambda t} v$ è soluzione del sistema lineare $y' = Ay$ se e solo se λ è autovalore di A e v è un autovettore associato.*

Dimostrazione Si ha

$$y'(t) - Ay(t) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \lambda \mathrm{e}^{\lambda t} v - A \mathrm{e}^{\lambda t} v = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \mathrm{e}^{\lambda t} \big[(\lambda I - A) v \big] = 0,$$

da cui facilmente la tesi. □

Dalla Proposizione 9.17 segue che se $v_1, \ldots, v_n$ sono n autovettori linearmente indipendenti (quindi una base) relativi agli autovalori $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$, allora

$$\Phi(t) = \left(\mathrm{e}^{\lambda_1 t} v_1 \;\middle|\; \cdots \;\middle|\; \mathrm{e}^{\lambda_n t} v_n \right)$$

è una matrice fondamentale. Già questa è sufficiente per trovare la soluzione generale di $y' = Ay$, ma volendo comunque calcolare la matrice esponenziale e^{tA} basta trovare quella che coincide con la matrice identità per $t = 0$. Essendo

$$\Phi(0) = \left(v_1 \;\middle|\; \cdots \;\middle|\; v_n \right) =: P,$$

sarà dunque $\mathrm{e}^{tA} = \Phi(t)\Phi(0)^{-1}$. Scritto in altri termini

$$\mathrm{e}^{tA} = \Phi(t)P^{-1} = P\mathrm{diag}(\mathrm{e}^{\lambda_1 t}, \ldots, \mathrm{e}^{\lambda_n t})P^{-1} = P\mathrm{e}^{tD}P^{-1},$$

dove $D = \mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$. Si è così riottenuta la formula per la matrice esponenziale di una matrice diagonalizzabile, e si è ulteriormente chiarito il calcolo effettuato in (9.25).

Esempio 9.18 Consideriamo ora il sistema lineare $y' = Ay$ dove

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

La matrice è triangolare con autovalori $\lambda_1 = -1$, di molteplicità algebrica $\nu_1 = 2$, e $\lambda_2 = 1$ algebricamente (quindi anche geometricamente) semplice, cioè $\nu_2 = \nu_2^g = 1$. L'autospazio associato è

$$\ker(A - \lambda_2 I) = \ker \begin{pmatrix} -2 & 1 & -2 \\ 0 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \mathrm{span}\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle =: \mathrm{span}\langle v_3 \rangle,$$

Calcoliamo la molteplicità algebrica del primo autovalore: poiché la matrice

$$A - \lambda_1 I = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

ha rango 2 si ha $\nu_1^g = \dim\ker(A - \lambda_1 I) = n - \mathrm{rank}(A - \lambda_1 I) = 1$, dunque il primo autovalore è difettoso. Bisogna quindi trovare una base dell'autospazio generalizzato associato, che avrà dimensione $\nu_1 = 2$:

$$\ker(A - \lambda_1 I)^2 = \ker \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} = \mathrm{span}\langle e_1, e_2 \rangle =: \mathrm{span}\langle v_1, v_2 \rangle,$$

dove gli e_i sono i vettori della base canonica. Nella base $\{v_1, v_2, v_3\}$ la parte semisemplice di A viene diagonalizzata; più precisamente $A = S + N$ e $P^{-1}SP = D := \operatorname{diag}(\lambda_1, \lambda_1, \lambda_2) = \operatorname{diag}(-1, -1, 1)$, dove P è la matrice le cui colonne sono date dai coefficienti dei tre autovettori generalizzati trovati, ovvero

$$P = \left(v_1 \,\middle|\, v_2 \,\middle|\, v_3 \right) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ con inversa } P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Si ha dunque

$$\begin{aligned} S = PDP^{-1} &= \left(\lambda_1 v_1 \,\middle|\, \lambda_1 v_2 \,\middle|\, \lambda_2 v_3 \right) P^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

per cui

$$N = A - S = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Essendo N nilpotente di ordine 2 si ha

$$\mathrm{e}^{tN} = I + tN = \begin{pmatrix} 1 & t & -2t \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

mentre

$$\begin{aligned} \mathrm{e}^{tS} = P\mathrm{e}^{tD}P^{-1} &= \left(\mathrm{e}^{\lambda_1 t} v_1 \,\middle|\, \mathrm{e}^{\lambda_1 t} v_2 \,\middle|\, \mathrm{e}^{\lambda_2 t} v_3 \right) P^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{-t} & 0 & 0 \\ 0 & \mathrm{e}^{-t} & 2\mathrm{e}^{t} \\ 0 & 0 & \mathrm{e}^{t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{-t} & 0 & 0 \\ 0 & \mathrm{e}^{-t} & 2(\mathrm{e}^{t} - \mathrm{e}^{-t}) \\ 0 & 0 & \mathrm{e}^{t} \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

e in definitiva, poiché S e N commutano, si ottiene

$$\mathrm{e}^{tA} = \mathrm{e}^{tS}\mathrm{e}^{tN} = \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{-t} & t\mathrm{e}^{-t} & -2t\mathrm{e}^{-t} \\ 0 & \mathrm{e}^{-t} & 2(\mathrm{e}^{t} - \mathrm{e}^{-t}) \\ 0 & 0 & \mathrm{e}^{t} \end{pmatrix}.$$

La soluzione generale del sistema $y' = Ay$ è come sempre data da $y(t) = \mathrm{e}^{tA}y(0)$ al variare di $y_0 \in \mathbb{R}^3$.

È importante notare che A poteva essere scomposta "a occhio" nel seguente modo:

$$A = \tilde{S} + \tilde{N} := \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

dove $\tilde{S}$ è semisemplice (diagonale) e $\tilde{N}$ è nilpotente di ordine 3. Si potrebbe allora pensare che valga $\mathrm{e}^{tA} = \mathrm{e}^{t\tilde{S}}\mathrm{e}^{t\tilde{N}}$ ma questa relazione è falsa, come si può verificare svolgendo i calcoli. Tutto ciò si deve al fatto che $\tilde{S}$ e $\tilde{N}$ *non* commutano (lo si verifichi per esercizio) e in effetti $\mathrm{e}^{t(\tilde{S}+\tilde{N})} \neq \mathrm{e}^{t\tilde{S}}\mathrm{e}^{t\tilde{N}}$.

Inoltre, si osservi che anche in questo caso per risolvere il sistema (triangolare) è possibile risolvere prima la terza equazione che è disaccoppiata con le altre due, inserire la sua soluzione nella seconda, ottenendo un'equazione lineare non omogenea, e infine inserire le soluzioni di queste due nella prima equazione dando luogo ancora a un'equazione lineare non omogenea.

Alternativamente si poteva anche procedere come segue: una volta calcolate le molteplicità algebrica e geometrica degli autovalori, si può subito dedurre che la soluzione sarà combinazione lineare delle tre funzioni e^{-t}, $t\mathrm{e}^{-t}$, e^{t}. Non tutte le loro combinazioni lineari sono soluzioni: per individuare quelle che lo sono basta imporre la condizione di essere soluzione del sistema. Esemplificando, siano

$$\begin{cases} y_1(t) = a_1\mathrm{e}^{-t} + b_1 t\mathrm{e}^{-t} + c_1\mathrm{e}^{t} \\ y_2(t) = a_2\mathrm{e}^{-t} + b_2 t\mathrm{e}^{-t} + c_2\mathrm{e}^{t} \\ y_3(t) = a_3\mathrm{e}^{-t} + b_3 t\mathrm{e}^{-t} + c_3\mathrm{e}^{t}, \end{cases}$$

per opportune costanti $a_i, b_i, c_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, \ldots, 3$. Essendo

$$\begin{cases} y_1'(t) = (b_1 - a_1)\mathrm{e}^{-t} - b_1 t\mathrm{e}^{-t} + c_1\mathrm{e}^{t} \\ y_2'(t) = (b_2 - a_2)\mathrm{e}^{-t} - b_2 t\mathrm{e}^{-t} + c_2\mathrm{e}^{t} \\ y_3'(t) = (b_3 - a_3)\mathrm{e}^{-t} - b_3 t\mathrm{e}^{-t} + c_3\mathrm{e}^{t}, \end{cases}$$

imponendo la condizione di essere soluzione, cioè

$$\begin{cases} y_1'(t) = -y_1(t) + y_2(t) - 2y_3(t) \\ y_2'(t) = -y_2(t) + 4y_3(t) \\ y_3'(t) = y_3(t), \end{cases}$$

si perviene a un sistema lineare nelle incognite a_i, b_i, c_i, $i = 1, \dots, 3$. Più precisamente, la terza equazione diventa

$$(b_3 - a_3)\mathrm{e}^{-t} - b_3 t\mathrm{e}^{-t} + c_3\mathrm{e}^{t} = a_3\mathrm{e}^{-t} + b_3 t\mathrm{e}^{-t} + c_3\mathrm{e}^{t} \quad \forall\, t$$

$$\iff \qquad (2a_3 - b_3)\mathrm{e}^{-t} + 2b_3 t\mathrm{e}^{-t} = 0 \quad \forall\, t,$$

che è verificata se e solo se $2a_3 - b_3 = 0$, $b_3 = 0$, cioè $a_3 = b_3 = 0$. Si ritrova il fatto che la terza componente della soluzione è della forma $y_3(t) = c_3\mathrm{e}^{t}$. Tenendo conto delle relazioni trovate, la seconda si traduce in

$$(b_2 - a_2)\mathrm{e}^{-t} - b_2 t\mathrm{e}^{-t} + c_2\mathrm{e}^{t} = -(a_2\mathrm{e}^{-t} + b_2 t\mathrm{e}^{-t} + c_2\mathrm{e}^{t}) + 4c_3\mathrm{e}^{t} \quad \forall\, t$$

$$\iff \qquad b_2\mathrm{e}^{-t} + (2c_2 - 4c_3)\mathrm{e}^{t} = 0 \quad \forall\, t,$$

che è verificata se e solo se $b_2 = 0$ e $2c_2 - 4c_3 = 0$, ovvero $c_2 = 2c_3$. La seconda componente della soluzione sarà della forma $y_2(t) = a_2\mathrm{e}^{-t} + 2c_3\mathrm{e}^{t}$. La prima equazione diventa

$$(b_1 - a_1)\mathrm{e}^{-t} - b_1 t\mathrm{e}^{-t} + c_1\mathrm{e}^{t} = -(a_1\mathrm{e}^{-t} + b_1 t\mathrm{e}^{-t} + c_1\mathrm{e}^{t}) + a_2\mathrm{e}^{-t} + 2c_3\mathrm{e}^{t} - 2c_3\mathrm{e}^{t} \quad \forall\, t$$

$$\iff \qquad (b_1 - a_2)\mathrm{e}^{-t} + 2c_1\mathrm{e}^{t} = 0 \quad \forall\, t,$$

da cui segue $b_1 = a_2$, $c_1 = 0$, e la prima componente della soluzione è della forma $y_1(t) = a_1\mathrm{e}^{-t} + a_2 t\mathrm{e}^{-t}$. Ricapitolando

$$\begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ y_3(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1\mathrm{e}^{-t} + a_2 t\mathrm{e}^{-t} \\ a_2\mathrm{e}^{-t} + 2c_3\mathrm{e}^{t} \\ c_3\mathrm{e}^{t} \end{pmatrix},$$

dunque la soluzione dipende da tre costanti arbitrarie, $a_1, a_2, c_3 \in \mathbb{R}$, in accordo col fatto che l'insieme delle soluzioni è uno spazio lineare di dimensione 3. Le relazioni che intercorrono tra questi parametri e le condizioni iniziali $y(0) = (\overline{y}_1, \overline{y}_2, \overline{y}_3)$ sono date da $a_1 = \overline{y}_1$, $c_3 = \overline{y}_3$ e $a_2 = \overline{y}_2 - 2\overline{y}_3$.

Esempio 9.19 Consideriamo il sistema $y' = Ay$ dove

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Il polinomio caratteristico è $p_A(\lambda) = \lambda^2 - 2\lambda + 2$ con radici $\lambda_1 = 1 + i$ e $\lambda_2 = \overline{\lambda_1} = 1 - i$. La matrice A è chiaramente diagonalizzabile in $\mathbb{C}$. Calcoliamo una base di autovettori; si ha

$$A - \lambda_1 I = \begin{pmatrix} 2 - i & -5 \\ 1 & -2 - i \end{pmatrix},$$

e un autovalore associato a λ_1 è un $v_1 = (z_1, z_2)$ non nullo, con $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, tale che $(A - \lambda_1 I)v_1 = 0$, cioè

$$\begin{cases} (2-i)z_1 - 5z_2 = 0 \\ z_1 - (2+i)z_2 = 0, \end{cases}$$

per esempio $v_1 = (2+i, 1)$. Come autovalore relativo a λ_2 basta prendere il coniugato di v_1. In definitiva

$$\ker(A - \lambda_1 I) = \operatorname{span}\langle v_1 \rangle = \operatorname{span}\langle (2+i, 1) \rangle,$$

$$\ker(A - \lambda_2 I) = \operatorname{span}\langle \overline{v_1} \rangle = \operatorname{span}\langle (2-i, 1) \rangle.$$

Nella base $\{v_1, \overline{v_1}\}$ la matrice A si diagonalizza; più precisamente, detta P la matrice del cambiamento di base, ovvero

$$P = \begin{pmatrix} 2+i & 2-i \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ con inversa } P^{-1} = \frac{1}{2i}\begin{pmatrix} 1 & -2+i \\ -1 & 2+i \end{pmatrix},$$

si ha $P^{-1}AP = D := \operatorname{diag}(\lambda_1, \overline{\lambda_1}) = \operatorname{diag}(1+i, 1-i)$. Volendo una forma canonica reale, basta sostituire alla base $\{v_1, \overline{v_1}\}$ la base di $\mathbb{R}^2$ data da $\{\Im v_1, \Re v_1\} = \{(1,0), (2,1)\}$. Introdotta la matrice Q le cui colonne sono date dai coefficienti di questa nuova base, cioè

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ con inversa } Q^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

ed essendo $\lambda_1 = 1 + i = \alpha + i\omega$, si ha

$$Q^{-1}AQ = \alpha I + \omega J = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},$$

da cui si deduce

$$\begin{aligned} \mathrm{e}^{tA} = Q\mathrm{e}^{t(\alpha I + \omega J)}Q^{-1} &= \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \mathrm{e}^t\cos t & -\mathrm{e}^t \operatorname{sen} t \\ \mathrm{e}^t \operatorname{sen} t & \mathrm{e}^t \cos t \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \mathrm{e}^t(\cos t + 2\operatorname{sen} t) & -5\mathrm{e}^t \operatorname{sen} t \\ \mathrm{e}^t \operatorname{sen} t & \mathrm{e}^t(\cos t - 2\operatorname{sen} t) \end{pmatrix}. \end{aligned} \tag{9.26}$$

La soluzione è come sempre data da $y(t) = \mathrm{e}^{tA}y(0)$.

È interessante osservare come in realtà, per ottenere e^{tA}, non sia necessario passare attraverso la forma canonica reale $\alpha I + \omega J$ di A, ma è sufficiente quella diagonale complessa. In effetti, tutta la teoria svolta per matrici a

coefficienti in $\mathbb{R}$ può essere estesa facilmente alle matrici A a coefficienti in $\mathbb{C}$. In particolare, è possibile definire la matrice esponenziale e^A come in (9.18), ottenendo questa volta una matrice in $\mathcal{M}(n,\mathbb{C})$, e provare che la soluzione del sistema $y' = Ay$ è della forma $y(t) = \mathrm{e}^{tA}y(0)$. Il vantaggio di prendere (o considerare) le matrici in $\mathcal{M}(n,\mathbb{C})$ sta nel fatto che nella decomposizione canonica $P^{-1}AP = S + N$ la matrice S è sempre diagonale e questo semplifica l'analisi. Se in particolare $A \in \mathcal{M}(n,\mathbb{R})$, la si può comunque considerare come matrice in $\mathcal{M}(n,\mathbb{C})$ e calcolare $\mathrm{e}^A \in \mathcal{M}(n,\mathbb{C})$ in senso complesso. Poiché A ha in realtà coefficienti reali, il limite in (9.18), pensato in $\mathcal{M}(n,\mathbb{C})$ oppure in $\mathcal{M}(n,\mathbb{R})$, dà sempre lo stesso risultato, dunque sarà $\mathrm{e}^A \in \mathcal{M}(n,\mathbb{R})$ e lo stesso accadrà per e^{tA}. Nel presente esempio si ha

$$\begin{aligned}
\mathrm{e}^{tA} = P\mathrm{e}^{tD}P^{-1} &= \left(\mathrm{e}^{\lambda_1 t}v_1 \;\middle|\; \mathrm{e}^{\overline{\lambda_1}t}\overline{v_1}\right)P^{-1} \\
&= \frac{1}{2i}\begin{pmatrix} (2+i)\mathrm{e}^{\lambda_1 t} & (2-i)\mathrm{e}^{\overline{\lambda_1}t} \\ \mathrm{e}^{\lambda_1 t} & \mathrm{e}^{\overline{\lambda_1}t} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -2+i \\ -1 & 2+i \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{2i}\begin{pmatrix} (2+i)\mathrm{e}^{\lambda_1 t} - (2-i)\mathrm{e}^{\overline{\lambda_1}t} & -5\mathrm{e}^{\lambda_1 t} + 5\mathrm{e}^{\overline{\lambda_1}t} \\ \mathrm{e}^{\lambda_1 t} - \mathrm{e}^{\overline{\lambda_1}t} & (-2+i)\mathrm{e}^{\lambda_1 t} + (2+i)\mathrm{e}^{\overline{\lambda_1}t} \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

A prima vista e^{tA} non sembrerebbe reale, ma in realtà lo è: per verificarlo basta utilizzare la formula di Eulero $\mathrm{e}^{\alpha+i\beta} = \mathrm{e}^{\alpha}(\cos\beta + i\operatorname{sen}\beta)$ come anche le formule $\operatorname{sen}\beta = (\mathrm{e}^{i\beta} - \mathrm{e}^{-i\beta})/(2i)$, $\cos\beta = (\mathrm{e}^{i\beta} + \mathrm{e}^{-i\beta})/2$. Per esempio, l'elemento di posto $(2,1)$ della matrice e^{tA} è

$$\frac{\mathrm{e}^{\lambda_1 t} - \mathrm{e}^{\overline{\lambda_1}t}}{2i} = \frac{\mathrm{e}^{(1+i)t} - \mathrm{e}^{(1-i)t}}{2i} = \mathrm{e}^t\frac{\mathrm{e}^{it} - \mathrm{e}^{-it}}{2i} = \mathrm{e}^t\operatorname{sen} t,$$

quello di posto $(1,1)$ è invece

$$\frac{(2+i)\mathrm{e}^{\lambda_1 t} - (2-i)\mathrm{e}^{\overline{\lambda_1}t}}{2i} = \mathrm{e}^t\Big[\frac{\mathrm{e}^{it} + \mathrm{e}^{-it}}{2} + 2\frac{\mathrm{e}^{it} - \mathrm{e}^{-it}}{2i}\Big] = \mathrm{e}^t(\cos t + 2\operatorname{sen} t).$$

In modo analogo si verifica (farlo per esercizio) che anche gli altri elementi coincidono con quelli già trovati in (9.26).

Esistono dei casi in cui il calcolo di e^{tA} si può semplificare. Ne vedremo alcuni.

Esempio 9.20 Per matrici $A \in \mathcal{M}(n, \mathbb{R})$ triangolari superiori (ma anche inferiori) con un unico autovalore λ, del tipo

$$A = \begin{pmatrix} \lambda & * & \cdots & * \\ 0 & \lambda & * & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & * \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda \end{pmatrix} =: \lambda I + N,$$

si osserva che N è nilpotente di ordine al più uguale a n, mentre la matrice semisemplice $S = \lambda I$ commuta con N, essendo multipla dell'identità. Detto $\nu \leq n$ l'indice di nilpotenza, si avrà dunque facilmente

$$\mathrm{e}^{tA} = \mathrm{e}^{tI}\mathrm{e}^{tN} = \mathrm{e}^{t}\Big(I + tN + \ldots + \frac{t^{\nu-1}N^{\nu-1}}{(\nu-1)!}\Big).$$

Si sottolinea che questo calcolo *non* vale se A, pur essendo triangolare, ammette più di un autovalore (si veda l'osservazione a p. 205 nell'Esempio 9.18).

Esempio 9.21 Nel caso in cui A non è triangolare ma ammette un unico autovalore il calcolo di e^{tA} viene semplificato. Mostreremo ciò col seguente esempio: si consideri il sistema $y' = Ay$ dove

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Il polinomio caratteristico è $p_A(\lambda) = (\lambda - 2)^2$ con l'unica radice (e autovalore di A) $\lambda = 2$. Per il Teorema di Cayley-Hamilton vale $p_A(A) = (A - 2I)^2 = 0$ e siccome A può essere scritta nella forma

$$A = 2I + (A - 2I),$$

si è trovata una decomposizione di A nella somma di una matrice semisemplice (multipla dell'identità) $S = 2I$, che commuta con tutte le matrici, e di una nilpotente $N = A - 2I$ di ordine di nilpotenza uguale a 2. Si ha dunque

$$N = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \implies \mathrm{e}^{tN} = I + tN = \begin{pmatrix} 1-t & -t \\ t & 1+t \end{pmatrix},$$

da cui segue facilmente

$$\mathrm{e}^{tA} = \mathrm{e}^{2tI}\mathrm{e}^{tN} = \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{2t}(1-t) & -t\mathrm{e}^{2t} \\ t\mathrm{e}^{2t} & \mathrm{e}^{2t}(1+t) \end{pmatrix}.$$

Esempio 9.22 Si consideri infine il problema di Cauchy per il sistema lineare a coefficienti costanti non omogeneo

$$\begin{cases} y' = Ay + b(t) \\ y(0) = y_0, \end{cases} \tag{9.27}$$

dove

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}, \quad b(t) = \begin{pmatrix} t\mathrm{e}^{-3t} \\ t\mathrm{e}^{-3t} \end{pmatrix} = t\mathrm{e}^{-3t}(e_1 + e_2), \quad y_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = e_1 + e_2,$$

dove e_1, e_2 sono i vettori della base canonica. La soluzione è fornita dalla formula (9.15), una volta calcolata e^{tA} ovvero la soluzione generale $z(t) = \mathrm{e}^{tA}c$ dell'equazione omogenea associata $z' = Az$. Il polinomio caratteristico di A è $p_A(\lambda) = (\lambda - 3)^2$ dunque, procedendo come nell'Esempio 9.21, si ha $\mathrm{e}^{tA} = \mathrm{e}^{3t}\mathrm{e}^{tN}$ dove $N = A - 3I$ è nilpotente di ordine 2. Si ha

$$N = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}, \text{ da cui } \mathrm{e}^{tN} = I + tN = \begin{pmatrix} 1+2t & -t \\ 4t & 1-2t \end{pmatrix},$$

e infine

$$\mathrm{e}^{tA} = \mathrm{e}^{3t} \begin{pmatrix} 1+2t & -t \\ 4t & 1-2t \end{pmatrix}.$$

Dalla formula (9.15) si ottiene che la soluzione del problema di Cauchy è

$$\begin{aligned} y(t) &= \mathrm{e}^{tA}y_0 + \int_0^t \mathrm{e}^{(t-s)A}b(s)\,ds \\ &= \mathrm{e}^{tA}y_0 + \Big(\int_0^t s\mathrm{e}^{3t-6s}(1+t-s)\,ds\Big)e_1 + \Big(\int_0^t s\mathrm{e}^{3t-6s}(1+2(t-s))\,ds\Big)e_2. \end{aligned}$$

A questo punto basta calcolare gli integrali (farlo per esercizio).

Alternativamente, si osservi che la non-omogeneità in (9.27) è del tipo polinomio per funzione esponenziale. Analogamente al metodo per simiglianza per le equazioni lineari a coefficienti costanti di ordine N, si può ricercare una soluzione particolare della stessa forma, ovvero del tipo

$$\overline{y}(t) = \begin{pmatrix} \overline{y}_1(t) \\ \overline{y}_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (at+b)\mathrm{e}^{-3t} \\ (ct+d)\mathrm{e}^{-3t} \end{pmatrix}.$$

Imponendo che $\overline{y}(t)$ sia soluzione si ottiene il sistema

$$\begin{cases} (a - 3(at+b))\mathrm{e}^{-3t} = 5(at+b)\mathrm{e}^{-3t} - (ct+d)\mathrm{e}^{-3t} + t\mathrm{e}^{-3t} \\ (c - 3(ct+d))\mathrm{e}^{-3t} = 4(at+b)\mathrm{e}^{-3t} + (ct+d)\mathrm{e}^{-3t} + t\mathrm{e}^{-3t} \end{cases} \quad \forall\, t$$

$$\iff \quad \begin{cases} (8a - c + 1)t + (8b - a - d) = 0 \\ (4a + 4c + 1)t + (4b - c + 4d) = 0 \end{cases} \quad \forall\, t,$$

e per il principio di identità dei polinomi si ottiene il sistema lineare

$$\begin{cases} 8a - c + 1 = 0 \\ 8b - a - d = 0 \\ 4a + 4c + 1 = 0 \\ 4b - c + 4d = 0, \end{cases}$$

la cui soluzione è $a = -5/36$, $b = -1/54$, $c = -1/9$, $d = -1/108$. Si ricava una soluzione particolare dell'equazione differenziale in (9.27) data da

$$\overline{y}(t) = \begin{pmatrix} -(5t/36 + 1/54)\mathrm{e}^{-3t} \\ -(t/9 + 1/108)\mathrm{e}^{-3t} \end{pmatrix},$$

mentre la soluzione generale, somma della generica soluzione dell'omogenea e di $\overline{y}(t)$, è $y(t) = \mathrm{e}^{tA}c + \overline{y}(t)$ al variare di $c \in \mathbb{R}^2$. Imponendo la condizione iniziale si ottiene

$$y_0 = c + \begin{pmatrix} -1/54 \\ -1/108 \end{pmatrix} \quad \Longrightarrow \quad c = y_0 - \begin{pmatrix} -1/54 \\ -1/108 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 55/54 \\ 109/108 \end{pmatrix},$$

da cui si ricava la soluzione del problema di Cauchy (9.27)

$$y(t) = \mathrm{e}^{tA} \begin{pmatrix} 55/54 \\ 109/108 \end{pmatrix} + \overline{y}(t).$$

Forma canonica di Jordan

Con riferimento al Teorema 9.15 di decomposizione $S + N$, una volta scelta una base $\mathcal{B}$ formata da autovettori generalizzati di A, detta P la matrice del cambiamento di base, si ha (9.22) cioè $P^{-1}AP = D + N$ con D diagonale e N nilpotente che commuta con D. Ciò è vero per *qualsiasi* scelta della base $\mathcal{B}$ ovvero per qualsiasi scelta della base $\mathcal{B}_k$ nell'autospazio generalizzato relativo a ciascun autovalore di A. In altri termini, cambiando la base di qualche autospazio generalizzato, nella decomposizione $P^{-1}AP = D + N$ la matrice D rimane sempre la stessa (ovviamente a meno di permutazioni degli autovalori), mentre N può cambiare. Risulta chiara l'importanza di determinare una base $\mathcal{B}$ nella quale la forma di N sia "la più semplice possibile" o almeno abbia una struttura molto semplice. Per esempio, ciò

si ottiene considerando la cosiddetta forma canonica di Jordan di A, della quale daremo alcuni cenni rimandando ai testi di algebra lineare per gli approfondimenti e le dimostrazioni.

Diciamo *blocco elementare di Jordan* di ordine k la matrice quadrata $k \times k$ della forma

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & \ddots & & \vdots \\ 0 & 1 & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

ovvero la matrice tutta nulla tranne sulla sottodiagonale principale dove ha tutti gli elementi uguali a 1. Si osservi che ogni blocco elementare di Jordan è una matrice nilpotente di ordine di nilpotenza uguale alla dimensione, cioè k. Se $k = 1$ il blocco elementare è la matrice 1×1 nulla. In alcuni testi come sottoblocco si considera la matrice che ha 1 sulla sopradiagonale principale. I due approcci sono equivalenti, modulo la permutazione che manda la base $\{v_1, \ldots, v_n\}$ nella base $\{v_n, \ldots, v_1\}$.

Si può dimostrare che per ciascun autovalore λ_k di A è possibile scegliere una base $\mathcal{B}_k$ nell'autospazio generalizzato $E_k = \ker(A - \lambda_k)^{\nu_k}$ tale che il relativo blocco nilpotente N_k nella matrice N soddisfi le seguenti proprietà:

- N_k è diagonale a blocchi;
- il numero di blocchi coincide con la molteplicità geometrica ν_k^g di λ_k, in particolare N_k è nulla se λ_k non è difettoso;
- la dimensione dei blocchi è non crescente, di conseguenza l'indice di nilpotenza di N_k è uguale al massimo della dimensione di tali blocchi;
- ciascun sottoblocco è un blocco elementare di Jordan.

La matrice $\mathcal{J}$ che rappresenta A nella base $\mathcal{B} = \cup_k \mathcal{B}_k$ si dice *forma canonica di Jordan di A*: più precisamente, detti $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ gli autovalori distinti di molteplicità algebrica $\nu_1, \ldots, \nu_p$, nella base $\mathcal{B}$ si avrà

$$\mathcal{J} = P^{-1}AP = D + N,$$

con $D = \mathrm{diag}(\lambda_1 I_{\nu_1}, \ldots, \lambda_p I_{\nu_p})$ e $N = \mathrm{diag}(N_1, \ldots, N_p)$ dove ciascuna N_k è una matrice $\nu_k \times \nu_k$ che soddisfa le proprietà elencate sopra. Tale decomposizione è essenzialmente unica, a meno dell'ordine dei sottoblocchi di ciascun N_k; inoltre si può dimostrare che due matrici sono simili se e solo se hanno la medesima forma canonica di Jordan.

Osservazione 9.23 Esiste una precisa procedura per calcolare la base $\mathcal{B}_k$ di ciascun E_k e in particolare per determinare la successione delle dimensioni dei sottoblocchi di Jordan del relativo N_k. Per la trattazione completa rimandiamo ai testi di algebra lineare. Si può comunque dimostrare che nei casi $n = 2$ e $n = 3$ la forma canonica di Jordan di A è univocamente determinata dalle sole molteplicità algebriche e geometriche degli autovalori. Infatti, consideriamo il caso $n = 2$ cioè A matrice 2×2. Distinguiamo vari casi a seconda degli autovalori:

1. se A ha due autovalori distinti $\lambda_1 \neq \lambda_2$, allora la matrice è diagonalizzabile. In particolari i blocchi di Jordan di N relativi a ciascun autovalore hanno dimensione 1, dunque sono nulli, perciò la forma canonica di Jordan di A è
$$\mathcal{J} = D + N = \begin{pmatrix} \boxed{\lambda_1} & 0 \\ 0 & \boxed{\lambda_2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \boxed{0} & 0 \\ 0 & \boxed{0} \end{pmatrix};$$

2. se A ha un unico autovalore λ_1 non difettoso; allora $\nu_1^g = \nu_1 = 2$ e il relativo blocco di Jordan di N è costituito da $\nu_1^g = 2$ sottoblocchi di ordine 1 (nulli), perciò la forma canonica di Jordan di A è
$$\mathcal{J} = D + N = \left(\boxed{\begin{matrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_1 \end{matrix}} \right) + \left(\boxed{\begin{matrix} \boxed{0} & 0 \\ 0 & \boxed{0} \end{matrix}} \right);$$

3. se A ha un unico autovalore λ_1 difettoso $1 = \nu_1^g < \nu_1 = 2$ e il relativo blocco di Jordan di N è costituito da un unico sottoblocco di ordine 2, perciò
$$\mathcal{J} = D + N = \left(\boxed{\begin{matrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_1 \end{matrix}} \right) + \left(\boxed{\begin{matrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{matrix}} \right).$$

Consideriamo ora il caso di A matrice 3×3. Anche qui ci sono vari casi:

1. se A ha tre autovalori distinti $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$, allora la matrice è diagonalizzabile, e i blocchi di Jordan di N sono di ordine 1, perciò
$$\mathcal{J} = D + N = \begin{pmatrix} \boxed{\lambda_1} & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{\lambda_2} & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{\lambda_3} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \boxed{0} & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{0} & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{0} \end{pmatrix};$$

2. se A ha solo due autovalori distinti $\lambda_1 \neq \lambda_2 = \lambda_3$ con λ_2 non difettoso allora il blocco di N relativo a λ_1 e nullo e quello relativo a λ_2 è costituito da due sottoblocchi nulli, quindi

$$\mathcal{J} = D + N = \begin{pmatrix} \boxed{\lambda_1} & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \boxed{0} & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{0} & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{0} \end{pmatrix};$$

3. se A ha solo due autovalori distinti $\lambda_1 \neq \lambda_2 = \lambda_3$ con λ_2 difettoso allora il blocco di N relativo a λ_1 e nullo e quello relativo a λ_2 è costituito da un unico sottoblocco, quindi

$$\mathcal{J} = D + N = \begin{pmatrix} \boxed{\lambda_1} & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \boxed{0} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix};$$

4. se A ha un unico autovalore λ_1 non difettoso allora $\nu_1^g = \nu_1 = 3$ e N è formata da un unico blocco costituito da $\nu_1^g = 3$ sottoblocchi nulli, perciò

$$\mathcal{J} = D + N = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \boxed{0} & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{0} & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{0} \end{pmatrix};$$

5. se A ha un unico autovalore λ_1 difettoso con $2 = \nu_1^g < \nu_1 = 3$ allora N è formata da un unico blocco costituito da $\nu_1^g = 2$ sottoblocchi, necessariamente di dimensione 2 e 1 rispettivamente, perciò

$$\mathcal{J} = D + N = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{0} \end{pmatrix};$$

6. infine, se A ha un unico autovalore λ_1 difettoso con $1 = \nu_1^g < \nu_1 = 3$, N è formata da un unico sottoblocco di Jordan di ordine 3 e si ha

$$\mathcal{J} = D + N = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Si noti che per $n \geq 4$ le molteplicità algebriche e geometriche degli autovalori non sono sufficienti per caratterizzare la forma canonica di Jordan. Per esempio, se A è di ordine 4 con un unico autovalore λ_1 difettoso tale che $2 = \nu_1^g < \nu_1 = 4$, allora N è formata da un unico blocco costituito da due sottoblocchi. Ci sono allora due possibili casi: due sottoblocchi di dimensione 2, oppure un sottoblocco di dimensione 3 e uno di dimensione 1. Le forme di N compatibili con le molteplicità sono dunque

$$N = \left(\begin{array}{|cc|cc|} \hline 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline \end{array}\right) \quad \text{oppure} \quad N = \left(\begin{array}{|ccc|c|} \hline 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & \boxed{0} \\ \hline \end{array}\right).$$

Esercizi

Esercizio 9.24 a) Calcolare la matrice fondamentale e^{tA} nei seguenti casi

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 0 & -3 & 2 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 4 & -2 & 9 \\ 2 & -2 & 6 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

b) Nel primo caso, dati $b(t) = (2\mathrm{e}^t, 0, 0)^T$ e $y_0 = (2, -1, 0)^T$, trovare la soluzione del problema di Cauchy $y' = Ay + b(t)$, $y(0) = y_0$; c) nel secondo caso, risolvere il problema di Cauchy $y' = Ay + b$, $y(1) = y_1$, dove $y_1 = (0, 0, -2)^T$ e $b = (2, 0, 2)^T$; d) nel terzo caso, calcolare la soluzione del problema di Cauchy $y' = Ay$, $y(2) = (1, 0, 1)^T$.

Esercizio 9.25 Data la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & -3 \end{pmatrix}$$

a) calcolare la matrice fondamentale e^{tA} e utilizzarla per trovare la generica soluzione del sistema di equazioni differenziali $y' = Ay$;

b) dato $b = (0, 1, 0, 1)^T$ calcolare esplicitamente la soluzione del problema di Cauchy $y' = Ay + b$, $y(0) = 0$.

Esercizio 9.26 Data la matrice

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & 5 & -3 \end{pmatrix}$$

a) calcolare la matrice fondamentale e^{tA};

b) risolvere il problema di Cauchy $y' = Ay + b(t)$, $y(0) = (0, 0, 0)$ dove $b(t) = (\mathrm{e}^{-2t}, -\mathrm{e}^{-2t}, -\mathrm{e}^{-2t})$.

Esercizio 9.27 Data la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

a) verificare che A si può decomporre "a occhio" nella somma di una matrice diagonale D e di una triangolare superiore nilpotente N. Sfruttare i risultati sui sistemi lineari di equazioni differenziali per dimostrare, *senza fare calcoli*, che D e N non possono commutare;

b) calcolare la matrice e^{tA} e utilizzarla per trovare la soluzione y del problema di Cauchy $y' = Ay + b$, $y_0 = (1, 1, -1)$ dove $b = (2, 0, 2)$.

Esercizio 9.28 Data la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2+a & -1+a+2a^2 & a \\ 1 & 4 & a \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

dove $a \in \mathbb{R}$ è un parametro,

a) calcolare la matrice fondamentale e^{tA} nei casi $a = 0$ e $a = 1$;

b) nel caso $a = 0$ risolvere il problema di Cauchy $y' = Ay$, $y(0) = (2, -1, 1)$;

c) dire se è possibile trovare a affinché: i) ogni soluzione di $y' = Ay$ sia globalmente limitata; ii) ogni soluzione di $y' = Ay$ sia limitata in futuro.

Esercizio 9.29 Data la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2a-1 & 4+a \\ 0 & 2a & 0 \\ -a & 2-a & -a^2 \end{pmatrix}$$

a) determinare i valori del parametro $a \in \mathbb{R}$ per i quali il sistema lineare $y' = Ay$ può ammettere soluzioni periodiche non banali;

b) in relazione ai valori a determinati, trovare l'integrale generale dell'equazione $y' = Ay$ e verificare che effettivamente esistono soluzioni periodiche;

c) trovare l'integrale generale dell'equazione $y' = Ay$ relativamente alla scelta $a = -1$.

Esercizio 9.30 Data la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \\ -10 & -10 & -4 \end{pmatrix}$$

a) calcolare la matrice fondamentale e^{tA};

b) dimostrare che al variare di $\bar{y}$ il problema di Cauchy $y' = Ay$, $y(0) = \bar{y}$ ammette sempre un'unica soluzione globalmente definita e globalmente limitata in futuro. Cosa si può dire della limitatezza in passato?

Si consideri ora l'equazione $y' = Ay + b(t)$ dove $b : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ è una funzione continua. Discutere l'esistenza globale delle soluzioni. Dimostrare che

c) se b è costante tutte le soluzioni sono globalmente limitate in futuro;

d) esistono funzioni b non costanti ma limitate per le quali le soluzioni non sono globalmente limitate in futuro.

Esercizio 9.31 Data la matrice

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 4 & 2 \\ 1 & -1 & -2 \\ -2 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

a) calcolare la matrice fondamentale e^{tA} e utilizzarla per trovare la generica soluzione y del problema di Cauchy $y' = Ay$, $y(0) = y_0$;

b) verificare che tutte le soluzioni sono limitate in futuro;

c) detta $A_\varepsilon = A + \varepsilon I$ con $\varepsilon \in \mathbb{R}$, sia y_ε la soluzione del problema di Cauchy $y' = A_\varepsilon y$ col medesimo dato iniziale. Dimostrare direttamente tramite la formula esplicita per le soluzioni e *senza utilizzare i risultati del Capitolo 5* che $y_\varepsilon \to y$ uniformemente su ogni intervallo $[-T, T]$;

d) è vero che per ogni $\varepsilon \in \mathbb{R}$ sufficientemente piccolo tutte le soluzioni y_ε sono limitate in futuro? In caso negativo, esistono degli ε non nulli per cui tutte le soluzioni y_ε sono limitate in futuro?

e) Fare l'analogo del punto c) nel caso in cui $A_\varepsilon = A + \varepsilon B$ e B è una matrice che commuta con A;

f) (difficile) in generale, detta y_B la soluzione del problema di Cauchy $y' = By$ col medesimo dato iniziale, dimostrare (sempre senza utilizzare i risultati del Capitolo 5) che

$$\lim_{B \to A} y_B(t) = y_A(t)$$

uniformemente sui compatti (la convergenza di B ad A è intesa nella norma degli operatori, la differenza rispetto al punto e) è che B può non commutare con A).

Equazioni di ordine n a coefficienti costanti

In questa sezione si vuole applicare la teoria appena svolta al caso della generica equazione differenziale lineare di ordine n a coefficienti costanti, del tipo

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \ldots + a_1 y' + a_0 y = h(t), \tag{9.28}$$

dove $a_k \in \mathbb{R}$, $k = 0, \ldots, n-1$, e $h : I \to \mathbb{R}$ è una fissata funzione continua. Posto $z_1 = y$, $z_2 = y'$, $\ldots$, $z_n = y^{(n-1)}$, è già noto che (9.28) è equivalente al sistema

$$\begin{cases} z_1' = z_2 \\ z_2' = z_3 \\ \vdots \\ z_{n-1}' = z_n \\ z_n' = -a_{n-1}z_n - \ldots - a_1 z_2 - a_0 z_1 + h(t), \end{cases} \tag{9.29}$$

che è un sistema lineare a coefficienti costanti non omogeneo. Indicato con $z = (z_1, \ldots, z_n)$, (9.29) si può scrivere nella forma matriciale $z' = Az + b(t)$,

dove

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & \cdots & \cdots & -a_{n-1} \end{pmatrix}, \qquad b(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ h(t) \end{pmatrix}. \tag{9.30}$$

A è la cosiddetta *matrice compagna del polinomio caratteristico* $q(\lambda) := \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \ldots + a_1\lambda + a_0$. L'equazione

$$q(\lambda) = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \ldots + a_1\lambda + a_0 = 0 \tag{9.31}$$

viene detta *equazione caratteristica* associata a (9.28).

Equazioni omogenee

Abbiamo visto che la soluzione generale di $z' = Az + b(t)$ si ottiene mediante la formula della variazione delle costanti (9.15), una volta trovata la soluzione generale del sistema omogeneo associato che è del tipo trattato nella sezione precedente. Studiamo quindi la generica soluzione dell'equazione omogenea $z' = Az$ con A matrice della forma (9.30). Si verifica (per esempio per induzione) che $p_A(\lambda) = (-1)^n q(\lambda)$ dunque gli autovalori di A sono tutti e soli gli zeri di q. La molteplicità geometrica di uno di tali zeri $\lambda \in \mathbb{C}$ è per definizione la dimensione del

$$\ker(A - \lambda I) = \ker \begin{pmatrix} -\lambda & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 & 0 & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & -\lambda & 1 \\ -a_0 & -a_1 & \cdots & \cdots & -a_{n-1} - \lambda \end{pmatrix}.$$

Il minore ottenuto cancellando la prima colonna e l'ultima riga ha determinante 1, dunque $\operatorname{rank}(A - \lambda I) = n - 1$ perciò $\nu_\lambda^g = \dim \ker(A - \lambda I) = 1$; più precisamente sia $v = (v_1, \ldots, v_n)$ un autovettore associato, cioè tale che soddisfi l'equazione $\ker(A - \lambda I)v = 0$ ovvero il sistema

$$\begin{cases} -\lambda v_1 + v_2 = 0 \\ -\lambda v_2 + v_3 = 0 \\ \vdots \\ -\lambda v_{n-1} + v_n = 0 \\ -(a_0 v_1 + a_1 v_2 + \ldots + (a_{n-1} + \lambda) v_n) = 0. \end{cases}$$

Le prime $n-1$ equazioni equivalgono a $v_2 = \lambda v_1$, $v_3 = \lambda v_2 = \lambda^2 v_1$, $\ldots$, $v_n = \lambda^{n-1} v_1$, e l'ultima si scrive $v_1(a_0 + \lambda a_1 + \ldots + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \lambda^n) = 0$ ovvero $v_1 q(\lambda) = 0$ che è soddisfatta perché λ è un autovalore. Da tutto ciò segue che il generico autovalore è della forma $v = (v_1, \ldots, v_n) = (v_1, \lambda v_1, \ldots, \lambda^{n-1} v_1) = v_1(1, \lambda, \ldots, \lambda^{n-1})$ e in definitiva si ha $\ker(A - \lambda I) = \operatorname{span}\langle \Lambda \rangle$ dove si è posto $\Lambda = (1, \lambda, \ldots, \lambda^{n-1}) \in \mathbb{R}^n$. Si trova nuovamente che $\nu_\lambda^g = \dim \ker(A - \lambda I) = 1$ ovvero che *ogni autovalore di A è geometricamente semplice*. Come conseguenze immediate si hanno le seguenti proprietà:

- se λ è autovalore multiplo (cioè $\nu_\lambda > 1$) è automaticamente difettoso;
- poiché $\nu_\lambda^g = 1$, ogni blocco di Jordan relativo a ciascun autovalore ha un unico sottoblocco fondamentale di Jordan.

Detti allora $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ gli autovalori di A (cioè le radici distinte di q) di molteplicità algebrica $\nu_1, \ldots, \nu_p$, la forma canonica di Jordan di A è

$$\mathcal{J} = D + N = \begin{pmatrix} \lambda_1 I_{\nu_1} & & & \\ & \lambda_2 I_{\nu_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_p I_{\nu_p} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} N_1 & & & \\ & N_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & N_p \end{pmatrix},$$

dove I_{ν_k} è la matrice identità $\nu_k \times \nu_k$ e ciascun N_k è un blocco fondamentale di Jordan di dimensione ν_k

$$N_k = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & \ddots & & \vdots \\ 0 & 1 & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Si osservi che

$$N_k^2 = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & & & & \vdots \\ 1 & 0 & \ddots & & & \vdots \\ 0 & 1 & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad N_k^{\nu_k - 1} = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & & \vdots \\ 0 & & \ddots & \vdots \\ 1 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix},$$

e $N_k^{\nu_k} = 0$ dunque ν_k è l'indice di nilpotenza di N_k. Si ha facilmente

$$\mathrm{e}^{t\mathcal{J}} = \mathrm{e}^{tD}\mathrm{e}^{tN} = \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{\lambda_1 t}\mathrm{e}^{tN_1} & & & \\ & \mathrm{e}^{\lambda_2 t}\mathrm{e}^{tN_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \mathrm{e}^{\lambda_p t}\mathrm{e}^{tN_p} \end{pmatrix},$$

dove per $k = 1, \ldots, p$

$$\mathrm{e}^{tN_k} = I + tN_k + \ldots + \frac{t^{\nu_k - 1}N_k^{\nu_k - 1}}{(\nu_k - 1)!} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ t & 1 & \ddots & & \vdots \\ \frac{t^2}{2!} & t & \ddots & \ddots & \vdots \\ \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \frac{t^{\nu_k - 1}}{(\nu_k - 1)!} & \ddots & \frac{t^2}{2!} & t & 1 \end{pmatrix}.$$

Detta P la matrice del cambio di base che trasforma A in $\mathcal{J}$, si ha $\mathrm{e}^{tA} = P\mathrm{e}^{t\mathcal{J}}P^{-1}$. Di conseguenza, i coefficienti della matrice e^{tA}, come anche le componenti $z_k(t)$ della soluzione $z(t)$ di $z' = Az$ e in particolare $z_1(t) = y(t)$ soluzione dell'equazione omogenea associata a (9.28) (quella con $h(t) = 0$), sono combinazioni lineari delle funzioni

$$\begin{matrix} \mathrm{e}^{\lambda_1 t}, & t\mathrm{e}^{\lambda_1 t}, & t^2\mathrm{e}^{\lambda_1 t}, & \cdots & t^{\nu_1 - 1}\mathrm{e}^{\lambda_1 t}, \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \mathrm{e}^{\lambda_p t}, & t\mathrm{e}^{\lambda_p t}, & t^2\mathrm{e}^{\lambda_p t}, & \cdots & t^{\nu_p - 1}\mathrm{e}^{\lambda_p t}. \end{matrix} \tag{9.32}$$

Le funzioni in (9.32) sono in numero di $\nu_1 + \ldots + \nu_p = n$ ed essendo anche linearmente indipendenti sono una base dello spazio delle soluzioni dell'equazione omogenea associata $y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \ldots + a_1 y' + a_0 y = 0$.

Si noti che in generale tali funzioni sono a valori complessi essendo $\lambda_k \in \mathbb{C}$; si è dunque trovata una base dello spazio delle soluzioni pensato come sottospazio di $C^1(\mathbb{R}, \mathbb{C})$. Volendo una base formata da funzioni a valori reali, per ogni autovalore non reale $\lambda_k = \alpha_k + i\omega_k$ di A (con $\omega_k > 0$) basta sostituire alle due righe in (9.32) corrispondenti a λ_k e $\overline{\lambda_k}$, le due righe

$$\begin{matrix} \mathrm{e}^{\alpha_k t}\cos(\omega_k t), & t\mathrm{e}^{\alpha_k t}\cos(\omega_k t), & \cdots & t^{\nu_k - 1}\mathrm{e}^{\alpha_k t}\cos(\omega_k t), \\ \mathrm{e}^{\alpha_k t}\operatorname{sen}(\omega_k t), & t\mathrm{e}^{\alpha_k t}\operatorname{sen}(\omega_k t), & \cdots & t^{\nu_k - 1}\mathrm{e}^{\alpha_k t}\operatorname{sen}(\omega_k t). \end{matrix}$$

Esempio 9.32 (oscillatore armonico) Consideriamo l'equazione dell'oscillatore armonico

$$my''(t) = -\kappa y(t).$$

Posto $\omega^2 = \kappa/m$ con $\omega > 0$ (detta *pulsazione*), l'equazione può essere riscritta nella forma

$$y''(t) + \omega^2 y(t) = 0,$$

ed è un'equazione lineare omogenea del secondo ordine a coefficienti costanti. L'equazione caratteristica associata è $\lambda^2+\omega^2 = 0$ le cui radici sono $\lambda_1 = -i\omega$, $\lambda_2 = i\omega$, perciò due soluzioni sono $y_1(t) = \cos(\omega t)$ e $y_2(t) = \operatorname{sen}(\omega t)$, mentre l'integrale generale è dato da

$$y(t) = c_1 \cos(\omega t) + c_2 \operatorname{sen}(\omega t) = c_1 \cos\left(\sqrt{\frac{\kappa}{m}}t\right) + c_2 \operatorname{sen}\left(\sqrt{\frac{\kappa}{m}}t\right),$$

al variare di $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$. La soluzione può essere scritta anche nella forma

$$y(t) = A \operatorname{sen}(\omega t + \varphi),$$

al variare di A, detta *ampiezza*, e di φ, detta *fase*. Tali costanti (come anche c_1, c_2) dipendono dalla posizione e dalla velocità iniziali. Volendo per esempio trovare la soluzione per la quale la massa si trova inizialmente nel punto y_0 con velocità v_0, basterà risolvere il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y''(t) + \omega^2 y(t) = 0, \\ y(0) = y_0, \ y'(0) = v_0. \end{cases}$$

Derivando la soluzione generale si ottiene $y'(t) = -\omega c_1 \operatorname{sen}(\omega t) + \omega c_2 \cos(\omega t)$ perciò, imponendo le condizioni iniziali, si ottiene $y_0 = y(0) = c_1$ e $v_0 = y'(0) = \omega c_2$ cioè $c_2 = v_0/\omega$. In definitiva la soluzione cercata è

$$y(t) = y_0 \cos(\omega t) + \frac{v_0}{\omega} \operatorname{sen}(\omega t).$$

Quello appena presentato è il caso del moto armonico in assenza di altre forze. Nei casi reali il sistema è però soggetto a forze smorzanti quali l'attrito ovvero del tipo $F_a(t, y, y') = -ay'$ con $a > 0$. In questo caso, dall'equazione della dinamica $F = ma$ si ottiene l'equazione differenziale dell'*oscillatore armonico smorzato*

$$my''(t) + ay'(t) + \kappa y(t) = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad y''(t) + \gamma y'(t) + \omega^2 y(t) = 0,$$

avendo posto $\gamma = a/m > 0$ e $\omega = \sqrt{\kappa/m}$ come sopra. Si tratta sempre di un'equazione lineare omogenea del secondo ordine a coefficienti costanti.

L'equazione caratteristica associata è $\lambda^2 + \gamma\lambda + \omega^2 = 0$ e la natura delle sue radici, dunque la forma delle soluzioni dell'equazione, dipende da γ e da ω^2. L'analisi si divide in tre casi.

I) Se il discriminante $\Delta = \gamma^2 - 4\omega^2 > 0$ (*sovrasmorzamento*) cioè se $\gamma^2 > 4\omega^2$ ovvero $\gamma > 2\omega$, l'equazione caratteristica ammette le due soluzioni

$$\lambda_1 = \frac{-\gamma - \sqrt{\Delta}}{2}, \qquad \lambda_2 = \frac{-\gamma + \sqrt{\Delta}}{2},$$

e l'integrale generale dell'equazione differenziale è del tipo

$$y(t) = c_1 \mathrm{e}^{\lambda_1 t} + c_2 \mathrm{e}^{\lambda_2 t},$$

al variare di $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$. Osserviamo che $\lambda_1, \lambda_2 < 0$ perciò si ha

$$\lim_{t \to +\infty} y(t) = 0.$$

In questo caso l'attrito è preponderante e ogni soluzione tende (esponenzialmente) a zero e non si osservano oscillazioni.

II) Nel secondo caso, se $\Delta = 0$ (*smorzamento critico*) cioè se $\gamma = 2\omega$, l'equazione caratteristica ammette l'unica soluzione $\overline{\lambda} = -\gamma/2$ di molteplicità 2. Di conseguenza la soluzione è del tipo

$$y(t) = (c_1 + c_2 t)\mathrm{e}^{-\gamma t/2},$$

al variare di $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$. Anche in questo caso la soluzione tende a zero se $t \to +\infty$ ma all'inizio lo fa più lentamente a causa della presenza del termine lineare $c_2 t$.

III) Infine, se $\Delta < 0$ (*sottosmorzamento*) cioè se $\gamma < 2\omega$, l'equazione caratteristica ammette le due soluzioni complesse coniugate

$$\lambda_1 = \frac{-\gamma - i\sqrt{-\Delta}}{2}, \qquad \lambda_2 = \frac{-\gamma + i\sqrt{-\Delta}}{2},$$

e la soluzione dell'equazione è del tipo

$$y(t) = c_1 \mathrm{e}^{-\gamma t/2} \cos(\omega_1 t) + c_2 \mathrm{e}^{-\gamma t/2} \operatorname{sen}(\omega_1 t),$$

al variare di $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$, avendo posto $\omega_1 = \sqrt{-\Delta}/2$. In quest'ultimo caso lo smorzamento è piccolo e ogni soluzione tende sempre a zero se $t \to +\infty$ ma a causa della presenza del seno e del coseno lo fa oscillando. Si osservi inoltre che la pulsazione ω_1 delle oscillazioni è minore della pulsazione ω (detta *propria*) che avrebbe il sistema senza smorzamento: la presenza di attrito rallenta dunque il movimento dell'oscillatore.

Equazioni non omogenee: il metodo per simiglianza

Riconsideriamo ora la generica equazione di ordine n a coefficienti costanti e non omogenea

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \ldots + a_1 y' + a_0 y = h(t). \tag{9.33}$$

Avendo già studiato la soluzione dell'omogenea associata, è possibile ottenere la soluzione di (9.33) mediante la formula della variazione delle costanti (9.8) applicata al sistema equivalente (9.29), che nel caso dei coefficienti costanti diventa (9.15). Alternativamente è possibile utilizzare il principio di sovrapposizione ricordandosi che la generica soluzione di (9.33) è ottenibile come somma della generica soluzione dell'equazione omogenea associata $y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \ldots + a_1 y' + a_0 y = 0$ e di una *particolare* soluzione dell'equazione non omogenea (9.33).

Nel caso in cui la non omogeneità $h(t)$ assume particolari forme è possibile trovare una soluzione di (9.33) tra le funzioni che hanno essenzialmente una forma analoga; questo approccio va sotto il nome di *metodo per simiglianza* e può essere applicato quando $h(t)$ è un polinomio $P(t)$, oppure è della forma $P(t)\mathrm{e}^{\gamma t}$, oppure $P(t)\mathrm{e}^{\gamma t}\cos(\mu t)$, oppure ancora $P(t)\mathrm{e}^{\gamma t}\operatorname{sen}(\mu t)$. Entriamo ora nello specifico.

Caso 1: $h(t) = P(t)$ è un polinomio di grado m. Allora una soluzione particolare di (9.33) può essere cercata tra

1. i polinomi $Q(t)$ di grado m se 0 non è radice dell'equazione caratteristica associata;

2. i polinomi della forma $t^\nu Q(t)$ con $Q(t)$ polinomio di grado m, se 0 è radice di molteplicità ν dell'equazione caratteristica.

Per esempio, calcoliamo l'integrale generale dell'equazione non omogenea

$$y'' - 5y' + 6y = t.$$

L'equazione omogenea associata è $z'' - 5z' + 6z = 0$ con equazione caratteristica $\lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0$ le cui radici sono $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 3$. La soluzione generale dell'equazione omogenea associata è dunque combinazione lineare delle due soluzioni $y_1(t) = \mathrm{e}^{2t}$, $y_2(t) = \mathrm{e}^{3t}$. Poiché 0 non è radice dell'equazione caratteristica, si cerca una soluzione particolare dell'equazione non omogenea nella forma di un polinomio del tipo $\overline{y}(t) = At + B$ con $A, B \in \mathbb{R}$. Poiché $\overline{y}'(t) = A$, $\overline{y}''(t) = 0$, si ha che $\overline{y}$ è soluzione se e solo se

$$\overline{y}''(t) - 5\overline{y}'(t) + 6\overline{y}(t) = t \quad \text{per ogni } t \in \mathbb{R} \qquad \Longleftrightarrow \qquad -5A + 6(At + B) = t,$$

ed eguagliando i termini dello stesso grado si ottiene il sistema lineare

$$\begin{cases} 6A = 1 \\ -5A + 6B = 0, \end{cases}$$

la cui soluzione è $A = 1/6$, $B = 5/35$. Corrispondentemente si ottiene la soluzione $\overline{y}(t) = t/6 + 5/36$. In definitiva l'integrale generale dell'equazione in oggetto è dato da

$$y(t) = c_1 \mathrm{e}^{2t} + c_2 \mathrm{e}^{3t} + \frac{t}{6} + \frac{5}{36},$$

al variare di $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$. Volendo poi risolvere il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'' - 5y' + 6y = t, \\ y(0) = 0,\ y'(0) = 1, \end{cases}$$

basta imporre le condizioni iniziali alla soluzione generale e trovare i corrispondenti c_1, c_2 che risolvono il sistema di equazioni così ottenuto. Essendo $y'(t) = 2c_1 \mathrm{e}^{2t} + 3c_2 \mathrm{e}^{3t} + 1/6$, affinché $y(t)$ soddisfi le condizioni iniziali dovrà essere

$$\begin{cases} 0 = y(0) = c_1 + c_2 + \dfrac{5}{36} \\ 1 = y'(0) = 2c_1 + 3c_2 + \dfrac{1}{6} \end{cases} \qquad \Longrightarrow \qquad \begin{cases} c_1 + c_2 = -\dfrac{5}{36} \\ 2c_1 + 3c_2 = \dfrac{5}{6}, \end{cases}$$

la cui soluzione è $c_1 = -5/4$, $c_2 = 10/9$. In definitiva la soluzione del problema di Cauchy in oggetto è

$$y(t) = -\frac{5}{4}\mathrm{e}^{2t} + \frac{10}{9}\mathrm{e}^{3t} + \frac{t}{6} + \frac{5}{36}.$$

Come altro esempio, calcoliamo la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'' + 2y' = t^2 + 2, \\ y(0) = 2,\ y'(0) = 1/4. \end{cases}$$

Anzitutto calcoliamo la soluzione generale dell'equazione differenziale. Siccome in questo caso 0 è soluzione semplice dell'equazione caratteristica $\lambda^2 + 2\lambda = 0$, cerchiamo una soluzione particolare nella forma $\overline{y}(t) = tQ(t)$ con $Q(t) = At^2 + Bt + C$, $A, B, C, D \in \mathbb{R}$, polinomio di grado 2. Essendo $\overline{y}'(t) = 3At^2 + 2Bt + C$, $\overline{y}''(t) = 6At + 2B$, $\overline{y}$ è soluzione se e solo se

$$\overline{y}''(t) + 2\overline{y}'(t) = t^2 + 2 \quad \forall\, t \in \mathbb{R} \qquad \Longleftrightarrow \qquad 6At + 2B + 2(3At^2 + 2Bt + C) = t^2 + 2,$$

ed eguagliando i termini dello stesso grado si ottiene il sistema lineare

$$\begin{cases} 6A = 1 \\ 6A + 4B = 0 \\ 2B + 2C = 2, \end{cases}$$

la cui soluzione è $A = 1/6$, $B = -1/4$, $C = 5/4$. Corrispondentemente si ottiene la soluzione

$$\overline{y}(t) = \frac{t^3}{6} - \frac{t^2}{4} + \frac{5}{4}t.$$

Poiché l'equazione omogenea associata ammette come soluzioni $y_1(t) = \mathrm{e}^{-2t}$, $y_2(t) = \mathrm{e}^{0t} = 1$, la soluzione generale dell'equazione considerata è data da

$$y(t) = c_1\mathrm{e}^{-2t} + c_2 + \frac{t^3}{6} - \frac{t^2}{4} + \frac{5}{4}t,$$

al variare di $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$. Troviamo ora i particolari c_1, c_2 tali che la corrispondente soluzione verifichi le condizioni iniziali. Essendo $y'(t) = -2c_1\mathrm{e}^{-2t} + t^2/2 - t/2 + 5/4$, imponendo le condizioni iniziali si ottiene il sistema lineare

$$\begin{cases} c_1 + c_2 = 2 \\ -2c_1 + \dfrac{5}{4} = \dfrac{1}{4}, \end{cases}$$

la cui soluzione è $c_1 = 1/2$, $c_2 = 3/2$, perciò la soluzione del problema di Cauchy è

$$y(t) = \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-2t} + \frac{t^3}{6} - \frac{t^2}{4} + \frac{5}{4}t + \frac{3}{2}.$$

Caso 2: $h(t) = P(t)\mathrm{e}^{\gamma t}$, con $P(t)$ polinomio di grado m. Allora

1. se γ non è radice dell'equazione caratteristica, cerchiamo una soluzione del tipo $Q(t)\mathrm{e}^{\gamma t}$ con $Q(t)$ polinomio di grado m;

2. se γ è radice di molteplicità ν dell'equazione caratteristica cerchiamo una soluzione del tipo $t^\nu Q(t)\mathrm{e}^{\gamma t}$ con $Q(t)$ polinomio di grado m.

Per esempio, cerchiamo una soluzione dell'equazione

$$y'' + 2y' - 3y = \mathrm{e}^{2t}.$$

Poiché $\gamma = 2$ non è radice dell'equazione caratteristica associata $\lambda^2+2\lambda-3 = 0$, cerchiamo una soluzione particolare nella forma $\overline{y}(t) = a\mathrm{e}^{2t}$ con $a \in \mathbb{R}$. Poiché $\overline{y}'(t) = 2a\mathrm{e}^{2t}$, $\overline{y}''(t) = 4a\mathrm{e}^{2t}$, si ha che $\overline{y}$ è soluzione se e solo se

$$\overline{y}''(t)+2\overline{y}'(t)-3\overline{y}(t) = \mathrm{e}^{2t} \quad \forall\, t \in \mathbb{R} \qquad \Longleftrightarrow \qquad 4a\mathrm{e}^{2t}+2(2a\mathrm{e}^{2t})-3a\mathrm{e}^{2t} = \mathrm{e}^{2t},$$

cioè se e solo se $5a = 1$ ovvero $a = 1/5$. Una soluzione dell'equazione in considerazione è allora data da $\overline{y}(t) = \mathrm{e}^{2t}/5$.

Altro esempio: cerchiamo una soluzione dell'equazione

$$y'' + 4y' + 4y = (t+2)\mathrm{e}^{-2t}\,.$$

Poiché $\gamma = -2$ è ora radice di molteplicità 2 dell'equazione caratteristica associata $\lambda^2 + 4\lambda + 4 = 0$, cerchiamo una soluzione particolare nella forma $\overline{y}(t) = t^2(At+B)\mathrm{e}^{-2t}$ con $A, B \in \mathbb{R}$. Poiché $\overline{y}'(t) = (-2At^3 + (3A-2B)t^2 + 2Bt)\mathrm{e}^{-2t}$, $\overline{y}''(t) = (4At^3 + 4(B-3A)t^2 + 2(3A-4B)t + 2B)\mathrm{e}^{-2t}$, allora $\overline{y}$ è soluzione se e solo se

$$\begin{aligned}
&\overline{y}''(t) + 4\overline{y}'(t) + 4\overline{y}(t) = (t+2)\mathrm{e}^{-2t} \quad \Longleftrightarrow \\
&\quad (4At^3 + 4(B-3A)t^2 + 2(3A-4B)t + 2B)\mathrm{e}^{-2t} + \\
&\quad + 4(-2At^3 + (3A-2B)t^2 + 2Bt)\mathrm{e}^{-2t} + 4(At^3 + Bt^2)\mathrm{e}^{-2t} = (t+2)\mathrm{e}^{-2t} \\
&\quad \Longleftrightarrow \quad (6At + 2B)\mathrm{e}^{-2t} = (t+2)\mathrm{e}^{-2t},
\end{aligned}$$

ovvero se $A = 1/6$, $B = 1$. Una soluzione dell'equazione in oggetto è allora data da $\overline{y}(t) = (t^3/6 + t^2)\mathrm{e}^{-2t}$.

Caso 3: $h(t) = P(t)\mathrm{e}^{\gamma t}\cos(\mu t)$ oppure $h(t) = P(t)\mathrm{e}^{\gamma t}\operatorname{sen}(\mu t)$ con $P(t)$ polinomio di grado m. Allora cerchiamo $\overline{y}$ nella forma

1. $Q(t)\mathrm{e}^{\gamma t}\big(a\cos(\mu t)+b\operatorname{sen}(\mu t)\big)$ con $Q(t)$ polinomio di grado m, se $\gamma+i\mu$ non è radice dell'equazione caratteristica;
2. $t^\nu Q(t)\mathrm{e}^{\gamma t}\big(a\cos(\mu t)+b\operatorname{sen}(\mu t)\big)$ con $Q(t)$ polinomio di grado m, se $\gamma+i\mu$ è radice di molteplicità ν dell'equazione caratteristica.

Per esempio, troviamo una soluzione di

$$y'' - 5y' + 6y = \mathrm{e}^{2t}\cos(3t).$$

Poiché $\gamma+i\mu = 2+3i$ non coincide con le radici $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 3$ dell'equazione caratteristica associata $\lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0$, cerchiamo una soluzione particolare nella forma $\overline{y}(t) = \mathrm{e}^{2t}\big(a\cos(3t) + b\operatorname{sen}(3t)\big)$ con $a, b \in \mathbb{R}$. Essendo

$$\begin{aligned}
\overline{y}'(t) &= \mathrm{e}^{2t}\big((2a+3b)\cos(3t) + (2b-3a)\operatorname{sen}(3t)\big), \\
\overline{y}''(t) &= \mathrm{e}^{2t}\big((12b-5a)\cos(3t) - (12b+5b)\operatorname{sen}(3t)\big),
\end{aligned}$$

allora $\overline{y}$ è soluzione se $\overline{y}''(t) - 5\overline{y}'(t) + 6\overline{y}(t) = \mathrm{e}^{2t}\cos(3t)$ cioè se e solo se

$$\begin{aligned}\mathrm{e}^{2t}\big((12b-5a)\cos(3t) - (12b+5b)\operatorname{sen}(3t)\big) - 5\mathrm{e}^{2t}\big((2a+3b)\cos(3t) + \\ + (2b-3a)\operatorname{sen}(3t)\big) + 6\mathrm{e}^{2t}\big(a\cos(3t) + b\operatorname{sen}(3t)\big) = \mathrm{e}^{2t}\cos(3t),\end{aligned}$$

ovvero

$$\mathrm{e}^{2t}\big(-(4a+3b)\cos(3t) + (3a-4b)\operatorname{sen}(3t)\big) = \mathrm{e}^{2t}\cos(3t).$$

Questa relazione è verificata se a, b sono soluzioni del sistema lineare

$$\begin{cases} -4a - 3b = 1 \\ 3a - 4b = 0, \end{cases}$$

la cui soluzione è $a = -4/25$, $b = -3/25$. Corrispondentemente si ottiene la soluzione

$$\overline{y}(t) = -\frac{\mathrm{e}^{2t}}{25}\big(4\cos(3t) + 3\operatorname{sen}(3t)\big).$$

Come altro esempio, calcoliamo una soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'' - 2y' + 2y = \mathrm{e}^t \operatorname{sen} t \\ y(\pi) = \mathrm{e}^\pi,\ y'(\pi) = -2\mathrm{e}^\pi. \end{cases}$$

Troviamo anzitutto l'integrale generale. L'equazione caratteristica associata è $\lambda^2 - 2\lambda + 2 = 0$ con radici complesse coniugate $\lambda_1 = 1 - i$, $\lambda_2 = 1 + i$. In questo caso $\gamma + i\mu = 1 + i$ coincide con λ_2 (semplice), dunque cerchiamo una soluzione nella forma $\overline{y}(t) = t\mathrm{e}^t\big(a\cos t + b\operatorname{sen} t\big)$ con $a, b \in \mathbb{R}$. Essendo

$$\begin{aligned}\overline{y}'(t) &= \mathrm{e}^t\big(a\cos t + b\operatorname{sen} t\big) + t\mathrm{e}^t\big((a+b)\cos t + (b-a)\operatorname{sen} t\big), \\ \overline{y}''(t) &= 2\mathrm{e}^t\big((a+b)\cos t + (b-a)\operatorname{sen} t\big) + t\mathrm{e}^t\big(2b\cos t - 2a\operatorname{sen} t\big),\end{aligned}$$

allora $\overline{y}$ è soluzione se $\overline{y}''(t) - 2\overline{y}'(t) + 2\overline{y}(t) = \mathrm{e}^t \operatorname{sen} t$ cioè se e solo se

$$\begin{aligned}2\mathrm{e}^t\big((a+b)\cos t + (b-a)\operatorname{sen} t\big) + t\mathrm{e}^t\big(2b\cos t - 2a\operatorname{sen} t\big) \\ - 2\big(\mathrm{e}^t\big(a\cos t + b\operatorname{sen} t\big) + t\mathrm{e}^t\big((a+b)\cos t + (b-a)\operatorname{sen} t\big)\big) \\ + 2t\mathrm{e}^t\big(a\cos t + b\operatorname{sen} t\big) = \mathrm{e}^t \operatorname{sen} t,\end{aligned}$$

ovvero $\mathrm{e}^t\big(2b\cos t - 2a\operatorname{sen} t\big) = \mathrm{e}^t \operatorname{sen} t$, che è verificata se $2b = 0$ e $-2a = 1$ cioè $a = -1/2$, $b = 0$. In definitiva si ottiene la soluzione particolare

$$\overline{y}(t) = -\frac{t}{2}\mathrm{e}^t\cos t,$$

e per sovrapposizione l'integrale generale è dato da

$$y(t) = c_1 e^t \cos t + c_2 e^t \operatorname{sen} t - \frac{t}{2} e^t \cos t.$$

Poiché

$$y'(t) = (c_1 + c_2) e^t \cos t + (c_2 - c_1) e^t \operatorname{sen} t - \frac{1+t}{2} e^t \cos t + \frac{t}{2} e^t \operatorname{sen} t,$$

imponendo le condizioni iniziali si ottiene il sistema

$$\begin{cases} -e^\pi c_1 + \frac{\pi}{2} e^\pi = e^\pi \\ -(c_1 + c_2) e^\pi + \frac{1+\pi}{2} e^\pi = -2e^\pi \end{cases} \qquad \Longrightarrow \qquad \begin{cases} c_1 = \frac{\pi - 2}{2} \\ c_1 + c_2 = \frac{\pi + 5}{2}, \end{cases}$$

la cui soluzione è $c_1 = (\pi - 2)/2$, $c_2 = 7/2$. In definitiva, la soluzione del problema di Cauchy è

$$y(t) = \frac{\pi - 2}{2} e^t \cos t + \frac{7}{2} e^t \operatorname{sen} t - \frac{t}{2} e^t \cos t.$$

Caso 4: per la linearità dell'equazione, se h è somma di due funzioni h_1 e h_2 la cui forma rientra nei Casi 1, 2. e 3., allora si cercherà $\overline{y}$ come somma di una soluzione particolare $\overline{y}_1$ relativa a h_1 e una soluzione particolare $\overline{y}_2$ relativa a h_2.

Per esempio, troviamo una soluzione di

$$y'' + 3y' - 4y = t^2 + e^t.$$

La funzione $h(t)$ è somma di $h_1(t) = t^2$, che rientra nel caso 1., e di $h_2(t) = e^t$, che rientra nel caso 2.. Poiché 0 non è soluzione dell'equazione caratteristica, una soluzione relativa a c_1 sarà della forma $\overline{y}_1(t) = At^2 + Bt + C$. Si ha invece che $\gamma = 1$ è soluzione dell'equazione caratteristica, dunque una soluzione relativa a c_2 sarà della forma $\overline{y}_1(t) = ate^t$. In definitiva cerchiamo una soluzione della forma $\overline{y}(t) = At^2 + Bt + C + ate^t$ per qualche $A, B, C, a \in \mathbb{R}$. Essendo $\overline{y}'(t) = 2At + B + ae^t + ate^t$, $\overline{y}''(t) = 2A + 2ae^t + ate^t$, si ha che $\overline{y}$ è soluzione se

$$\begin{aligned} 2A + (2+t)ae^t + 3(2At + B + ae^t + ate^t) - 4(At^2 + Bt + C + ate^t) = t^2 + e^t \\ \Longleftrightarrow \quad -4at^2 + (6A - 4B)t + 2A + 3B - 4C + 5ae^t = t^2 + e^t. \end{aligned}$$

La relazione è verificata per ogni t se $5a = 1$, ovvero $a = 1/5$, e A, B, C sono soluzioni di

$$\begin{cases} -4A = 1 \\ 6A - 4B = 0 \\ 2A + 3B - 4C = 0. \end{cases}$$

Si ricava $A = -1/4$, $B = -3/8$, $C = -13/32$, perciò una soluzione dell'equazione differenziale è data da

$$y(t) = \frac{1}{5}te^t - \frac{t^2}{4} - \frac{3}{8}t - \frac{13}{32}.$$

I punti a)-b) del seguente esercizio dimostrano, mediante uno stratagemma, che il metodo per simiglianza è giustificato almeno nel caso $P(t)$ costante. Per una dimostrazione del caso generale si veda [3].

Esercizio 9.33 Dato un sistema lineare della forma

$$y' = Ay + e^{\gamma t}v, \tag{9.34}$$

con $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $v \in \mathbb{R}^n$ e $\gamma \in \mathbb{R}$ fissati,

a) verificare che se $\gamma \notin \mathrm{Sp}(A)$ (spettro di A) allora esiste una soluzione della forma $\overline{y}(t) = e^{\gamma t}w$ per un opportuno $w \in \mathbb{R}^n$. Dimostrare che se $\gamma \in \mathrm{Sp}(A)$ non ci si aspetta che il risultato valga; in questo caso caratterizzare algebricamente tutti i vettori v per cui $\overline{y}$ è soluzione;

b) nel caso in cui (9.34) è il sistema associato all'equazione lineare di ordine n

$$z^{(n)} + a_{n-1}z^{(n-1)} + \ldots + a_1 z' + a_0 z = e^{\gamma t}c, \tag{9.35}$$

con $c \in \mathbb{R}$, $c \neq 0$, dimostrare che se γ è una radice del polinomio caratteristico associato, allora esiste una soluzione dell'equazione (9.35) della forma $\overline{z}(t) = at^p e^{\gamma t}$, per qualche $a \in \mathbb{R}$, dove p è la molteplicità algebrica di γ come radice. (Suggerimento: provare a trasformare il relativo sistema $n \times n$ in un sistema omogeneo $(n+1) \times (n+1)$.)

c) Calcolare la soluzione del problema di Cauchy associato a (9.34) con dati $y(0) = (3, 2)$ dove

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -3 & -5 \end{pmatrix}, \qquad v = \begin{pmatrix} 2 \\ -10 \end{pmatrix}, \qquad \gamma = 2.$$

d) Verificare che non vale un analogo di b) per il generico sistema (9.34) con $n \geq 2$.

Esercizio 9.34 Risolvere i seguenti problemi.

$$\begin{cases} y'' + 2y' + y = 2\mathrm{e}^{-t}, \\ y(0) = 0,\ y'(0) = 0, \end{cases} \qquad \begin{cases} y'' + 2y' + y = 2\mathrm{e}^{t} + t^3, \\ y(0) = 1,\ y'(0) = 0, \end{cases}$$

$$\begin{cases} y'' - y' - 6y = 3t^2 - 5t, \\ y(0) = -1,\ y'(0) = 0, \end{cases} \qquad \begin{cases} y'' - 2y' + 5y = 5, \\ y(0) = 2,\ y'(0) = 1, \end{cases}$$

$$\begin{cases} y'' + 2y' - 3y = -4\mathrm{e}^{-3t}, \\ y(0) = 1,\ y'(0) = -2, \end{cases} \qquad \begin{cases} y'' - 6y' + 5y = 12t\mathrm{e}^{-t}, \\ y(0) = 0,\ y'(0) = -6, \end{cases}$$

$$\begin{cases} y'' - 3y' - 4y = -5\mathrm{e}^{-t}, \\ y(0) = 1,\ \lim\limits_{t\to+\infty} y(t) = 0, \end{cases} \qquad \begin{cases} y'' - y' - 2y = \mathrm{e}^{-t}, \\ y(0) = -1,\ \lim\limits_{t\to+\infty} y(t) = 0. \end{cases}$$

Equazioni di ordine n a coefficienti continui

Nel caso della generica equazione di ordine n

$$y^{(n)} + a_{n-1}(t)y^{(n-1)} + \cdots + a_1(t)y' + a_0(t)y = h(t), \tag{9.36}$$

con $a_k : I \to \mathbb{R}$, $k = 0, \ldots, n-1$ funzioni continue, come anche nel caso dei generici sistemi di n equazioni $y' = A(t)y + b(t)$, in generale non esiste un metodo per calcolare una base di soluzioni dell'equazione/sistema omogeneo associato. Anzi, si può dimostrare che esistono equazioni (ovviamente a coefficienti non costanti) le cui soluzioni non possono essere rappresentate in termini delle funzioni elementari. Comunque, applicando all'equazione (9.36) la teoria svolta per i sistemi si può dimostrare il seguente teorema.

Teorema 9.35 *Data l'equazione differenziale ordinaria lineare non omogenea di ordine n*

$$y^{(n)} + a_{n-1}(t)y^{(n-1)} + \cdots + a_1(t)y' + a_0(t)y = h(t), \tag{9.37}$$

con $a_k : I \to \mathbb{R}$, $k = 0, \ldots, n-1$ e $h : I \to \mathbb{R}$ funzioni continue, supponiamo che $\varphi_1, \ldots, \varphi_n \in C^n(I, \mathbb{R})$ siano soluzioni linearmente indipendenti dell'equazione omogenea associata

$$z^{(n)} + a_{n-1}(t)z^{(n-1)} + \cdots + a_1(t)z' + a_0(t)z = 0. \tag{9.38}$$

Se $c_1, \dots, c_n$ sono funzioni le cui derivate prime risolvono il seguente sistema lineare nelle incognite $x_1, \dots, x_n$

$$\begin{cases} \varphi_1(t)x_1 + \varphi_2(t)x_2 + \cdots + \varphi_n(t)x_n = 0 \\ \varphi_1'(t)x_1 + \varphi_2'(t)x_2 + \cdots + \varphi_n'(t)x_n = 0 \\ \vdots \\ \varphi_1^{(n-1)}(t)x_1 + \varphi_2^{(n-1)}(t)x_2 + \cdots + \varphi_n^{(n-1)}(t)x_n = h(t) \end{cases} \tag{9.39}$$

per ogni $t \in I$, allora la funzione

$$y(t) = \sum_{k=1}^{n} c_k(t)\varphi_k(t) \tag{9.40}$$

è soluzione in I dell'equazione (9.37)*. In particolare, la soluzione di* (9.37) *che è nulla insieme a tutte le derivate fino all'ordine $(n-1)$ in t_0 è data da* (9.40) *con*

$$c_k(t) = \int_{t_0}^{t} (-1)^{(n+k)} \frac{w_k(s)}{w(s)} h(s)\, ds, \tag{9.41}$$

dove, introdotta la matrice Wronskiana

$$W(t) := \begin{pmatrix} \varphi_1(t) & \varphi_2(t) & \cdots & \varphi_n(t) \\ \varphi_1'(t) & \varphi_2'(t) & \cdots & \varphi_n'(t) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \varphi_1^{(n-1)}(t) & \varphi_2^{(n-1)}(t) & \cdots & \varphi_n^{(n-1)}(t) \end{pmatrix},$$

$w(s) := \det W(s)$ è il wronskiano*, e $w_k(s)$ rappresenta il minore di ordine $(n-1)$ della matrice $W(s)$ ottenuto sopprimendo la k-esima colonna e l'ultima riga.*

Dimostrazione L'equazione (9.37) è equivalente al sistema (9.29) le cui matrici fondamentali $\Phi(t)$ assumono proprio la forma della matrice Wronskiana $W(t)$ dove $\varphi_1(t), \dots, \varphi_n(t)$ sono n soluzioni linearmente indipendenti dell'omogenea associata; la soluzione generale di (9.29) è dunque data dalla formula della variazioni delle costanti (9.8) con $b(t) = (0, \dots, 0, h(t))$. In particolare, la soluzione di (9.37) che è nulla insieme a tutte le derivate fino all'ordine $(n-1)$ in t_0 corrisponde alla soluzione di (9.29) con dati iniziali nulli, dunque è data da (9.8) con $y_0 = 0$, ovvero

$$z(t) = W(t) \int_{t_0}^{t} W(s)^{-1} b(s)\, ds =: W(t)c(t).$$

In particolare, essendo $y(t) = z_1(t)$, la corrispondente soluzione di (9.37) è data dal prodotto della prima riga di $W(t)$ per $c(t)$ ovvero

$$y(t) = \sum_{k=1}^{n} c_k(t)\varphi_k(t).$$

Poiché $b(s)$ ha tutte le coordinate nulle tranne l'ultima uguale a $h(s)$, allora la k-esima componente di $W(s)^{-1}b(s)$ è il prodotto dell'elemento di posto (k, n) della matrice $W(s)^{-1}$ e di $h(s)$. Dalla formula dei cofattori segue facilmente (9.41). □

Esempio 9.36 Troviamo la formula risolutiva del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'' + \omega^2 y = h(t) \\ y(0) = y_0 \\ y'(0) = y_0', \end{cases} \tag{9.42}$$

con $h \in C(I, \mathbb{R})$, $0 \in I$, $\omega > 0$. La generica soluzione dell'omogenea associata $z'' + \omega^2 z = 0$, già studiata nell'Esempio 9.32, è data da una combinazione lineare delle funzioni $\varphi_1(t) := \cos(\omega t)$, $\varphi_2(t) := \operatorname{sen}(\omega t)$, ovvero

$$z(t) = A\cos(\omega t) + B\operatorname{sen}(\omega t),$$

per qualche $A, B \in \mathbb{R}$. Le due soluzioni, come già sappiamo, sono linearmente indipendenti, infatti

$$w(t) = \det W(t) = \begin{vmatrix} \varphi_1(t) & \varphi_2(t) \\ \varphi_1'(t) & \varphi_2'(t) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos(\omega t) & \operatorname{sen}(\omega t) \\ -\omega\operatorname{sen}(\omega t) & \omega\cos(\omega t) \end{vmatrix} = \omega \neq 0.$$

Per (9.40)-(9.41) si ha che la soluzione del problema di Cauchy nel caso $y_0 = y_0' = 0$ è data da

$$y(t) = c_1(t)\cos(\omega t) + c_2(t)\operatorname{sen}(\omega t),$$

dove

$$c_1(t) = -\int_0^t \frac{\operatorname{sen}(\omega s)}{\omega} h(s)\,ds, \qquad c_2(t) = \int_0^t \frac{\cos(\omega s)}{\omega} h(s)\,ds.$$

La soluzione può essere scritta alternativamente nel seguente modo

$$\begin{aligned} y(t) &= -\cos(\omega t)\int_0^t \frac{\operatorname{sen}(\omega s)}{\omega} h(s)\,ds + \operatorname{sen}(\omega t)\int_0^t \frac{\cos(\omega s)}{\omega} h(s)\,ds \\ &= \frac{1}{\omega}\int_0^t \big(\operatorname{sen}(\omega t)\cos(\omega s) - \operatorname{sen}(\omega s)\cos(\omega t)\big) h(s)\,ds \\ &= \frac{1}{\omega}\int_0^t \operatorname{sen}\big(\omega(t-s)\big) h(s)\,ds. \end{aligned} \tag{9.43}$$

Poiché la soluzione del problema omogeneo associato con dati iniziali y_0, y_0' è data da $z(t) = y_0 \cos(\omega t) + \frac{y_0'}{\omega} \operatorname{sen}(\omega t)$, per linearità la soluzione di (9.42) è data da

$$y(t) = y_0 \cos(\omega t) + \frac{y_0'}{\omega} \operatorname{sen}(\omega t) + \frac{1}{\omega} \int_0^t \operatorname{sen}\big(\omega(t-s)\big) h(s)\, ds. \tag{9.44}$$

Esempio 9.37 Come altro esempio, troviamo una soluzione particolare dell'equazione

$$y'' - 5y' + 6y = t,$$

mediante il metodo di variazione delle costanti. Tale soluzione è già stata calcolata in precedenza col metodo per simiglianza. Utilizziamo quindi le formule (9.40)-(9.41). L'equazione omogenea associata è $z'' - 5z' + 6z = 0$ la cui equazione caratteristica $\lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0$ ammette $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 3$ come radici, perciò due soluzioni dell'omogenea associata sono $\varphi_1(t) = \mathrm{e}^{2t}$ e $\varphi_2(t) = \mathrm{e}^{3t}$; cerchiamo dunque una soluzione dell'equazione in oggetto della forma $y(t) = c_1(t)\mathrm{e}^{2t} + c_2(t)\mathrm{e}^{3t}$. Con le notazioni del Teorema (9.35) si ha $\omega(t) = \mathrm{e}^{5t}$, $\omega_1(t) = \mathrm{e}^{3t}$ e $\omega_2(t) = \mathrm{e}^{2t}$, perciò

$$c_1(t) = -\int^t s\mathrm{e}^{-2s}\, ds = \frac{1}{2}t\mathrm{e}^{-2t} - \frac{1}{2}\int^t \mathrm{e}^{-2s}\, ds = \frac{1}{2}t\mathrm{e}^{-2t} + \frac{1}{4}\mathrm{e}^{-2t},$$

e analogamente

$$c_2(t) = \int^t s\mathrm{e}^{-3s}\, ds = -\frac{1}{3}t\mathrm{e}^{-3t} - \frac{1}{9}\mathrm{e}^{-3t}.$$

Si ha dunque

$$y(t) = \Big(\frac{1}{2}t\mathrm{e}^{-2t} + \frac{1}{4}\mathrm{e}^{-2t}\Big)\mathrm{e}^{2t} + \Big(-\frac{1}{3}t\mathrm{e}^{-3t} - \frac{1}{9}\mathrm{e}^{-3t}\Big)\mathrm{e}^{3t} = \frac{t}{6} + \frac{5}{36},$$

che coincide con la soluzione calcolata mediante il metodo per simiglianza. Osserviamo che in generale il metodo di variazione delle costanti comporta maggiori calcoli rispetto a quello per simiglianza. Il vantaggio, però, è che almeno in linea teorica funziona per *qualsiasi* funzione continua $h(t)$ e non soltanto per quelle precedentemente elencate nei Casi 1., 2. e 3..

Esercizi

Esercizio 9.38 Data l'equazione differenziale lineare

$$y'' + a(t)y' + b(t)y = 0$$

con $a, b \in C^1(\mathbb{R})$

a) discutere l'esistenza locale/globale e l'unicità delle soluzioni;

b) determinare condizioni necessarie su a, b affinché l'equazione ammetta due soluzioni della forma $y_1(t)$ e $y_2(t) = ty_1(t)$ con y_1 non nulla; nel qual caso trovare anche l'espressione di y_1 e verificare che è ben determinata a meno di un fattore moltiplicativo. Tali condizioni sono anche sufficienti?

c) Verificare che y_1 e y_2 del punto b) sono linearmente indipendenti; più in generale, dimostrare che ciò è vero se y_1 è soluzione non nulla dell'equazione e $y_2(t) = z(t)y_1(t)$ con z continua e non costante. È ancora vero se y_1 non è soluzione di un'equazione lineare?

d) Utilizzare i punti precedenti per risolvere il problema di Cauchy

$$\begin{cases} (t^2+1)^2 y'' - 4t(t^2+1)y' + (6t^2-2)y = 0 \\ y(0) = 1, \ y'(0) = 2. \end{cases}$$

Esercizio 9.39 Data l'equazione differenziale

$$y'' + a(t)y' + b(t)y = 0$$

dove $a, b \in C^1(I)$ e $I \subseteq]0, +\infty[$ è un intervallo

a) discutere l'esistenza locale/globale e l'unicità delle soluzioni individuando anche l'intervallo massimale di esistenza;

b) determinare condizioni necessarie su a, b affinché l'equazione ammetta due soluzioni della forma $y_1(t)$ e $y_2(t) = t^2 y_1(t)$ con y_1 mai nulla; nel qual caso trovare anche l'espressione di y_1 in funzione di a e b (Suggerimento: imporre la condizione di essere soluzioni, trovare prima una formula per y_1 in funzione di a, b, poi imporre che y_1 sia soluzione per trovare una relazione che leghi a e b). Tali condizioni sono anche sufficienti?

c) Verificare che y_1 e y_2 sono linearmente indipendenti e utilizzare b) per risolvere esplicitamente il problema di Cauchy in $I =]0, +\infty[$

$$\begin{cases} 4t^2 y'' + 4t^2 y' + (t^2-3)y = 0 \\ y(1) = 3, \ y'(1) = 1. \end{cases} \tag{9.45}$$

d) Alternativamente, posto $z(t) = \sqrt{t}\mathrm{e}^{t/2}y(t)$, trovare l'equazione differenziale di ordine 2 soddisfatta da z. Di che tipo di equazione si tratta? Risolverla per riottenere la soluzione di (9.45).

e) Fare l'analogo di d) ma con la trasformazione delle variabili sia dipendente che indipendente $(t, y(t)) \mapsto (s, v(s))$ dove $s = \ln t$ (cioè $t = \mathrm{e}^s$) e $v(s) = \exp\big[(s + \mathrm{e}^s)/2\big]y(\mathrm{e}^s)$. Verificare che $v(s)$ soddisfa un'equazione differenziale lineare del secondo ordine a coefficienti costanti e risolverla per ottenere nuovamente la soluzione di (9.45).

f) Trovare tutte le soluzioni non nulle dell'equazione differenziale in c) che possono essere estese in maniera C^2 in $[0, +\infty[$ e, rispettivamente, in tutto $\mathbb{R}$.

Approfondimenti

Sulla differenziabilità delle mappa $t \mapsto \mathrm{e}^{tA}$

Utilizzando il Teorema di Cauchy-Lipschitz e le iterate di Picard, a pagina 189 si è dimostrato che la funzione $y(t) = \mathrm{e}^{tA}y_0$ è soluzione del problema di Cauchy (9.19) e di conseguenza che $\frac{d}{dt}\mathrm{e}^{tA} = A\mathrm{e}^{tA}$. A tali risultati si poteva giungere direttamente studiando le proprietà di derivabilità della mappa $t \mapsto \mathrm{e}^{tA}$, come segue.

Proposizione 9.40 *La funzione*

$$\begin{aligned} F : \mathbb{R} &\to \mathcal{M}(n, \mathbb{R}) \\ t &\mapsto \mathrm{e}^{tA} \end{aligned}$$

è derivabile e vale $\frac{d}{dt}\mathrm{e}^{tA} = A\mathrm{e}^{tA}$.

Dimostrazione Per definizione di derivata dobbiamo dimostrare che

$$\lim_{h\to 0} \frac{F(t+h) - F(h)}{h} = A\mathrm{e}^{tA},$$

ed essendo

$$\frac{F(t+h) - F(h)}{h} - A\mathrm{e}^{tA} = \big[\frac{1}{h}(\mathrm{e}^{hA} - I) - A\big]\mathrm{e}^{tA},$$

è sufficiente dimostrare (analogamente al caso dell'esponenziale reale) che

$$\lim_{h\to 0} \frac{\mathrm{e}^{hA} - I}{h} = A.$$

Si ha

$$\mathrm{e}^{hA} - I = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(hA)^i}{i!} - I = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(hA)^i}{i!} = h \sum_{i=1}^{\infty} \frac{h^{i-1}A^i}{i!},$$

da cui segue

$$\frac{\mathrm{e}^{hA} - I}{h} - A = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{h^{i-1}A^i}{i!} - A = \sum_{i=2}^{\infty} \frac{h^{i-1}A^i}{i!} = h \sum_{i=2}^{\infty} \frac{h^{i-2}A^i}{i!}.$$

Utilizzando la norma degli operatori in $\mathcal{M}(n, \mathbb{R})$, per $|h| \leq 1$ si ha che

$$\left\| \frac{\mathrm{e}^{hA} - I}{h} - A \right\| \leq |h| \sum_{i=2}^{\infty} \frac{|h|^{i-2}\|A\|^i}{i!} \leq |h| \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\|A\|^i}{i!} = |h|\mathrm{e}^{\|A\|},$$

che tende a 0 se $h \to 0$, da cui la tesi. □

Teorema 9.41 *Data $A \in \mathcal{M}(n, \mathbb{R})$ e $y_0 \in \mathbb{R}^n$, la funzione $y(t) = \mathrm{e}^{tA}y_0$ è l'unica soluzione del problema di Cauchy*

$$\begin{cases} y' = Ay \\ y(0) = y_0. \end{cases}$$

Dimostrazione Anzitutto $y(t)$ verifica banalmente la condizione iniziale. Si osservi poi che si può pensare $y(t)$ come composizione di $F(t)$ e dall'applicazione $G : \mathcal{M}(n, \mathbb{R}) \to \mathbb{R}^n$ tale che $G(B) = By_0$. Quest'ultima è lineare, dunque ha come differenziale $DG(B) = G$ per ogni B, ovvero per ogni $C \in \mathcal{M}(n, \mathbb{R})$ vale $DG(B)[C] = G(C)$. Per la regola di differenziazione della funzione composta si ha

$$\begin{aligned} y'(t) &= \frac{d}{dt}G(F(t)) = DG(F(t))\big[\frac{d}{dt}F(t)\big] \\ &= G\big(\frac{d}{dt}F(t)\big) = G(A\mathrm{e}^{tA}) = A\mathrm{e}^{tA}y_0 = Ay(t), \end{aligned}$$

da cui la tesi. □

Capitolo 10

Alcuni cenni alle soluzioni periodiche

In molte branche della scienza, dalla fisica all'economia, dalle scienze naturali alla chimica, si osservano fenomeni o processi ciclici o che si ripetono con una qualche regolarità: ciò giustifica l'importanza e l'interesse verso lo studio delle soluzioni periodiche. In questo capitolo ci occuperemo, ovviamente, di soluzioni periodiche per sistemi di equazioni differenziali e tratteremo il problema della loro esistenza. Classici risultati sull'esistenza e sulle proprietà delle soluzioni periodiche sono forniti, per esempio, dal Teorema di Massera, nel caso delle equazioni scalari, e dal Teorema di Poincaré-Bendixson, per sistemi planari. Nel seguito ci limiteremo a fornire un teorema di esistenza per generici sistemi n-dimensionali, con l'ausilio di alcuni strumenti introdotti nei capitoli precedenti, primo fra tutti il Teorema del punto fisso di Brouwer. Il materiale e i risultati presentati nel capitolo non vogliono assolutamente essere esaustivi; per gli approfondimenti si rimanda alla letteratura.

Un teorema di esistenza di soluzioni periodiche

In questa sezione enunceremo e dimostreremo un teorema di esistenza di soluzioni τ-periodiche per sistemi di equazioni differenziali del tipo

$$y' = f(t, y)$$

dove $f : \mathbb{R} \times A \to \mathbb{R}^n$ ($A \subseteq \mathbb{R}^n$ aperto) è continua, localmente lipschitziana nella variabile y, e τ-periodica nella variabile t, cioè tale che $f(t + \tau, y) = f(t, y)$ per ogni $t \in \mathbb{R}$, $y \in A$, con $\tau > 0$.

Anzitutto osserviamo che se $y(t)$ è una soluzione τ-periodica, cioè tale che $y(t+\tau) = y(t)$ per ogni $t \in \mathbb{R}$, allora è necessariamente globalmente definita. Tuttavia non è detto che tutte le soluzioni dell'equazione siano periodiche né tanto meno globalmente definite. È inoltre importante osservare che, nell'ipotesi che f sia τ-periodica in t, per trovare un'orbita periodica è sufficiente verificare la validità dell'uguaglianza $y(t+\tau) = y(t)$ per *un solo* $t \in \mathbb{R}$, come segue dalla seguente proposizione.

Lemma 10.1 *Sia $f : \mathbb{R} \times A \to \mathbb{R}^n$ continua, localmente lipschitziana nella variabile y, e τ periodica nella variabile t. Se $y : [t_0, t_0+\tau] \to \mathbb{R}^n$ è una soluzione dell'equazione $y' = f(t,y)$ tale che $y(t_0+\tau) = y(t_0)$, allora $y(t)$ si estende a una soluzione globalmente definita e τ-periodica.*

Dimostrazione Basta porre

$$\bar{y}(t) = y(t - k\tau) \text{ se } t \in [t_0 + k\tau, t_0 + (k+1)\tau],\ k \in \mathbb{Z}.$$

La funzione $\bar{y}(t)$ non è altro che il prolungamento τ-periodico di $y(t)$. Per costruzione $\bar{y}$ è continua, τ-periodica ed estende y; inoltre banalmente $\bar{y} \in C^1(]t_0 + k\tau, t_0 + (k+1)\tau[)$. Resta da verificare che $\bar{y}$ è ovunque derivabile e soluzione. Verifichiamolo nell'intervallo $[t_0+\tau, t_0+2\tau[$; per induzione lo si dimostra poi in ogni $[t_0 + k\tau, t_0 + (k+1)\tau[$, $k \in \mathbb{Z}$. Per la τ-periodicità di f, per ogni $t \in]t_0+\tau, t_0+2\tau[$, poiché $t - \tau \in]t_0, t_0+\tau[$ e $y(t)$ è soluzione si ha

$$\bar{y}'(t) = y'(t-\tau) = f\big(t-\tau, y(t-\tau)\big) = f\big(t, y(t-\tau)\big) = f\big(t, \bar{y}(t)\big),$$

perciò $\bar{y}$ è soluzione in tutti i punti di $]t_0+\tau, t_0+2\tau[$. Resta da far vedere che è soluzione anche in $t_1 := t_0 + \tau$, ovvero che in tale punto $\bar{y}$ si "attacca bene", cioè è derivabile e ivi soluzione. Si ha

$$\lim_{t\to t_1^+} \bar{y}'(t) = \lim_{t\to t_1^+} f(t, \bar{y}(t)) = \lim_{t\to t_1^+} f(t, y(t-\tau)) = f(t_0+\tau, y(t_0)),$$

$$\lim_{t\to t_1^-} \bar{y}'(t) = \lim_{t\to t_1^-} f(t, \bar{y}(t)) = \lim_{t\to t_1^-} f(t, y(t)) = f(t_0+\tau, y(t_0+\tau)).$$

Per l'ipotesi $y(t_0+\tau) = y(t_0)$ si ha $\lim_{t\to t_1^+} \bar{y}'(t) = \lim_{t\to t_1^-} \bar{y}'(t)$ dunque, per il Teorema del limite delle derivata A.23, $y(t)$ è derivabile in $t_0+\tau$ e di conseguenza è ivi banalmente soluzione. Per induzione su k segue la tesi. $\square$

Essenzialmente il lemma afferma che se una soluzione ripassa dal punto iniziale dopo un tempo pari a τ, periodo della funzione $f(\cdot, y)$, vi ripassa anche con la medesima derivata, perciò per tempi maggiori di τ non può che ripercorrere la medesima orbita.

La precedente proposizione permette di semplificare la ricerca delle soluzioni periodiche. Infatti, preso per facilità $t_0 = 0$, diciamo $\Phi_\tau(z)$ il valore che la soluzione dell'equazione $y' = f(t, y)$, $y(0) = z$ assume al tempo $t = \tau$. Con le notazioni introdotte nel Capitolo 5 si ha $\Phi_\tau(z) = y(\tau; 0, z)$. Si osservi che per il Teorema 5.6 la funzione Φ_τ, ove definita, è localmente lipschitziana (dunque continua). L'ipotesi della Proposizione 10.1, per $t_0 = 0$, si scrive come $y(\tau; 0, z) = y(0; 0, z) = z$, ovvero $\Phi_\tau(z) = z$. Riassumendo si ha

Lemma 10.2 *Nelle ipotesi fatte su f, l'equazione $y' = f(t, y)$ ha soluzioni τ-periodiche se e solo se la funzione continua Φ_τ ammette punto fisso.*

L'importanza di questo risultato sta nel fatto che si è riformulato un problema di esistenza di soluzioni periodiche per un'equazione differenziale in un problema di punto fisso per funzioni continue, quest'ultimo affrontabile mediante metodi dell'*Analisi Funzionale*. A tal riguardo abbiamo già incontrato il Teorema del punto fisso di Brouwer, ma esistono anche altri teoremi che, a seconda dell'equazione in considerazione, potrebbe essere applicati.

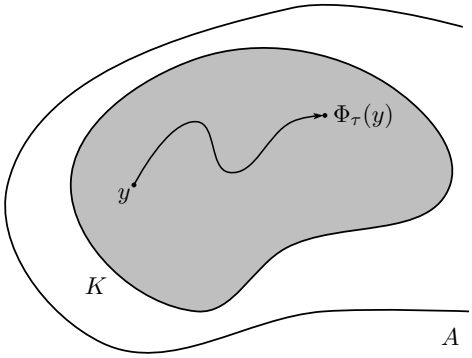


Figura 10.1: La mappa Φ_τ

Vogliamo ora individuare alcune ipotesi sul sistema di equazioni differenziali che permettono l'applicazione del Teorema di Brouwer alla funzione continua Φ_τ. Anzitutto c'è un problema di fondo: il dominio di definizione di Φ_τ. Fissato $z \in A$ non è detto che la soluzione del problema di Cauchy con dato iniziale $y(0) = z$ sia definita fino a τ perché la soluzione potrebbe cessare di esistere prima, nel qual caso non sarà possibile calcolare $\Phi_\tau(z)$ per tali z. Per ovviare il suddetto problema si potrebbero fare delle ipotesi su f (per esempio la globale lipschitzianità) che garantiscano l'esistenza globale delle soluzioni. Nell'ottica dell'utilizzo del Teorema di Brouwer, vedremo che l'esistenza globale verrà automaticamente garantita dalle altre

ipotesi che faremo. Il Teorema di Brouwer 2.23 si applica a funzioni continue $g : K \to K$ dove K è un insieme omeomorfo a una palla chiusa di $\mathbb{R}^n$; è allora sufficiente trovare un siffatto insieme K che venga mappato in sé da Φ_τ. Per esempio, ciò è garantito se l'insieme K è invariante in futuro, cioè se tutte le soluzioni che si originano in K rimangono in K per sempre (dunque anche al tempo τ, per cui $\Phi_\tau(K) \subseteq K$), si veda la Figura 10.1. In questo caso non ci sono nemmeno problemi riguardo l'intervallo di esistenza delle soluzioni: essendo tutte contenute in un compatto sono globalmente definite in futuro. Ciò ci permette di riformulare il Teorema 5.6 in termini della funzione Φ_τ, come segue.

Teorema 10.3 *Sia data $f : \mathbb{R} \times A \to \mathbb{R}^n$ ($A \subseteq \mathbb{R}^n$ aperto) continua e localmente lipschitziana rispetto alla variabile y e, come nel Capitolo 5, si denoti con $y(t; 0, y_0)$ la soluzione al tempo t del problema di Cauchy*

$$\begin{cases} y' = f(t, y) \\ y(0) = y_0. \end{cases}$$

Supponiamo inoltre che esista un insieme compatto positivamente invariante *(o* invariante in futuro*) $K \subset A$, cioè tale che se $y_0 \in K$ si ha $y(t; 0, y_0) \in K$ per ogni $t \geq 0$ di definizione. Allora, per ogni fissato $\tau \in \mathbb{R}$ la funzione*

$$\begin{aligned} \Phi_\tau : K &\to K \\ y_0 &\mapsto y(\tau; 0, y_0). \end{aligned}$$

è ben definita e lipschitziana.

Dimostrazione Per ipotesi le orbite che partono da K sono sempre contenute in K, quindi per il Teorema 4.1 le soluzioni sono globalmente definite, e y_τ è ben definita in K. Posto $I = [0, \tau]$ e indicate con

$$M := \max_{(s,z) \in I \times K} \|f(s, z)\|,$$

e L la costante di Lipschitz di f sul compatto $I \times K$, dal Teorema 5.6 si ottiene

$$\|\Phi_\tau(y_0) - \Phi_\tau(y_1)\| = \|y(\tau; 0, y_0) - y(\tau; 0, y_1)\| \leq \|y_0 - y_1\| \mathrm{e}^{L\tau},$$

per ogni $y_0), y_1) \in K$, dunque la mappa Φ_τ è lipschitziana sul compatto K, di costante $\tilde{L} = \mathrm{e}^{L\tau}$. □

Grazie all'analisi precedente abbiamo in sostanza dimostrato il seguente risultato.

Teorema 10.4 *Sia $f : \mathbb{R} \times A \to \mathbb{R}^n$ continua, localmente lipschitziana nella variabile $y \in A$ e τ-periodica nella variabile t. Se esiste un insieme $K \subset A$ compatto, positivamente invariante e omeomorfo a una palla chiusa, allora la mappa $\Phi_\tau : K \to K$ ammette punto fisso in K, dunque l'equazione differenziale $y' = f(t, y)$ ammette almeno una soluzione τ-periodica.*

DIMOSTRAZIONE Fatta sopra. □

Osservazione 10.5 (importante) L'orbita periodica la cui esistenza viene garantita dal teorema potrebbe essere un equilibrio; ogni equilibrio è infatti una soluzione τ-periodica per qualsiasi $\tau > 0$. Per esempio, l'equazione scalare $y' = -y$ ha campo vettoriale autonomo $f(t, y) = f(y) = -y$ periodico in t di qualsiasi periodo. Le soluzioni sono date da $y(t) = y_0 \mathrm{e}^{-t}$ al variare di $y_0 \in \mathbb{R}$. In particolare ogni palla chiusa, che in questo caso è un intervallo compatto, e contenente l'origine è un insieme invariante in futuro, infatti il modulo di ogni soluzione è decrescente. Ne consegue che ogni intorno compatto dell'origine contiene un'orbita periodica, anzi, fissato un *qualsiasi* periodo τ e un qualsiasi intorno dell'origine, tale intorno contiene un'orbita τ-periodica. Quest'orbita non può che essere l'origine stessa, ovvero l'equilibrio dell'equazione. Tutte le altre soluzioni, infatti, non sono periodiche.

Il teorema precedente non riesce quindi a distinguere tra orbite periodiche "banali", cioè gli equilibri, e quelle non banali, ovvero le effettive soluzioni periodiche. Si osservi che se K non contiene equilibri, l'orbita periodica predetta dal teorema è necessariamente non banale.

Come trovare K? Bisogna cercare, se esiste, un insieme dal quale le soluzioni non escono mai in futuro, una sorta di "trappola". Essenzialmente basta trovare un insieme compatto (omeomorfo a una palla chiusa) e sulla cui frontiera il campo vettoriale è strettamente entrante, come in Figura 10.2. Spesso è utile cercare K come *insieme di sottolivello*, ovvero della forma

$$K = [V \leq \alpha] := \{y \in A : \ V(y) \leq \alpha\},$$

per qualche funzione differenziabile $V : A \to \mathbb{R}$ con differenziale mai nullo (si osservi che, prendendo la funzione $V - \alpha$ al posto di V, si può sempre supporre $\alpha = 0$). In questo caso la frontiera è data da $\partial K = [V = \alpha] := \{y \in A : \ V(y) = \alpha\}$. Ovviamente bisognerà anche verificare che K è omeomorfo a una palla (proprietà non necessariamente vera per qualsiasi scelta di V). Poiché $\nabla V(y)$ corrisponde alla direzione di massimo accrescimento di V e coincide anche col vettore normale esterno a ∂K, intuitivamente la

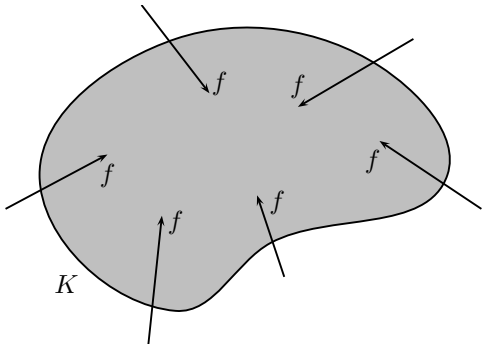


Figura 10.2: Campo vettoriale entrante (I)

condizione di campo vettoriale entrante alla frontiera equivale alla richiesta che l'angolo tra il gradiente $\nabla V(y)$ e il campo $f(t,y)$ sia ottuso (si veda la Figura 10.3), cioè che $\langle \nabla V(y), f(t,y)\rangle < 0$, $\forall\, y \in \partial K$, $t \in \mathbb{R}$.

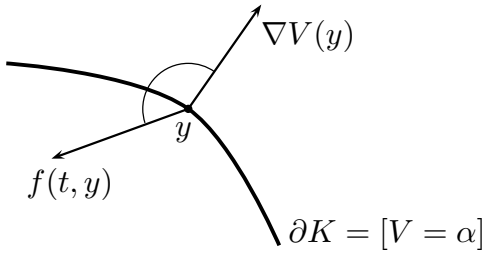


Figura 10.3: Campo vettoriale entrante (II)

In effetti si può dimostrare il seguente risultato, del quale omettiamo la dimostrazione.

Teorema 10.6 *Sia $f : \mathbb{R} \times A \to \mathbb{R}^n$ continua, localmente lipschitziana nella variabile $y \in A$ e τ-periodica nella variabile t. Siano $V : A \to \mathbb{R}$ una funzione differenziabile e $K = [V \le \alpha]$ un insieme compatto omeomorfo a una palla chiusa, tali che*

$$\langle \nabla V(y), f(t,y)\rangle < 0, \tag{10.1}$$

per ogni $y \in \partial K$ e $t \in \mathbb{R}$. Allora l'equazione differenziale $y' = f(t,y)$ ammette almeno un'orbita τ-periodica contenuta in K.

Dimostrazione Omessa (basta solo dimostrare che K è invariante).

Esempio 10.7 Consideriamo il sistema planare

$$\begin{cases} x' = \operatorname{sen} t - 2x + y \\ y' = \cos t + x - 2y. \end{cases}$$

Il campo vettoriale $f(t,x,y) = (\operatorname{sen} t - 2x + y, \cos t + x - 2y)$ è di classe C^∞ e 2π-periodico in t. Utilizzando il teorema precedente, dimostriamo che il sistema ammette una soluzione 2π-periodica non banale.

Un classico tentativo di scelta per V è dato dalla funzione norma al quadrato, in questo caso $V(x,y) = x^2 + y^2$, per la quale gli insiemi $K = [V \le R^2]$ di sottolivello R^2 coincidono proprio con le palle di centro l'origine e raggio R. Dimostreremo che se $R = 2$ (basterebbe $R > \sqrt{2}$) l'insieme K è è invariante in futuro. Essendo $\nabla V(x,y) = 2(x,y)$, si ha

$$\begin{aligned} \langle \nabla V(x,y), f(t,x,y) \rangle &= \big\langle 2(x,y), (\operatorname{sen} t - 2x + y, \cos t + x - 2y) \big\rangle \\ &= -4(x^2 + y^2) + 4xy + 2x \operatorname{sen} t + 2y \cos t. \end{aligned}$$

Poiché $2|xy| \le x^2 + y^2$ e $|x| + |y| \le \sqrt{2(x^2+y^2)}$, si ottiene

$$\begin{aligned} \langle \nabla V(x,y), f(t,x,y) \rangle &\le -2(x^2 + y^2) + 2|x| + 2|y| \\ &\le -2(x^2 + y^2) + 2\sqrt{2(x^2+y^2)}, \end{aligned}$$

e in definitiva, se $x^2 + y^2 = R^2 = 2^2$ si ha

$$\langle \nabla V(x,y), f(t,x,y) \rangle \le -2R(R - \sqrt{2}) = -4(2 - \sqrt{2}) < 0.$$

Applicando il teorema precedente all'insieme K con $R = 2$, si ottiene che il sistema ammette un'orbita 2π-periodica, non banale perché non ci sono equilibri (verificarlo per esercizio). Si osservi che il sistema in oggetto è lineare non omogeneo e a coefficienti costanti, quindi si possono applicare le tecniche viste nel Capitolo 9. Per esercizio si calcoli l'integrale generale dell'equazione e si identifichi (l'unica!) soluzione periodica, la cui equazione sarà

$$(\bar{x}(t), \bar{y}(t)) = \Big(\frac{3}{5} \operatorname{sen} t - \frac{1}{5} \cos t, \frac{2}{5} \operatorname{sen} t + \frac{1}{5} \cos t \Big).$$

Esempio 10.8 Consideriamo il sistema planare

$$\begin{cases} x' = \operatorname{sen} t - 2x^3 + y \\ y' = \cos t + x - 2y^3. \end{cases}$$

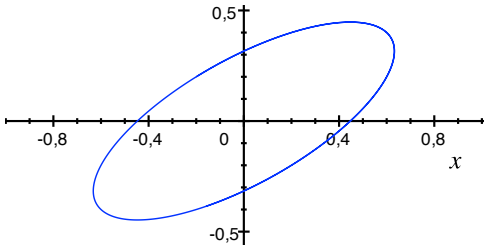


Figura 10.4: Orbita periodica dell'Esempio 10.7

Il campo vettoriale $f(t,x,y) = (\operatorname{sen} t - 2x^3 + y, \cos t + x - 2y^3)$ è di classe C^∞ e 2π-periodico in t . Anche in questo caso vogliamo applicare il Teorema 10.4, utilizzando sempre $V(x,y) = x^2 + y^2$ e $K = [V \le R^2]$. Dimostreremo che se R è sufficientemente grande K è invariante in futuro per questo sistema; a tal fine basta verificare che vale (10.1) su una circonferenza di raggio R per R sufficientemente grande (per esercizio si verifichi che se R è piccolo tale condizione è violata). Essendo $\nabla V(x,y) = 2(x,y)$, si ha

$$\begin{aligned}\langle \nabla V(x,y), f(t,x,y)\rangle &= \big\langle 2(x,y), (\operatorname{sen} t - 2x^3 + y, \cos t + x - 2y^3)\big\rangle \\ &= -4(x^4 + y^4) + 4xy + 2x \operatorname{sen} t + 2y \cos t \\ &\le -4(x^4 + y^4) + 4|xy| + 2|x| + 2|y|.\end{aligned}$$

Grazie al termine $-4(x^4 + y^4)$ è chiaro che quando la norma $\|(x,y)\|$ tende all'infinito tale quantità sarà negativa. Più precisamente, osservando che

$$2(x^4 + y^4) \ge (x^2 + y^2)^2, \quad 2|xy| \le x^2 + y^2, \quad 2|x| + 2|y| \le x^2 + y^2 + 2,$$

si ottiene

$$\langle \nabla V(x,y), f(t,x,y)\rangle \le -2(x^2 + y^2)^2 + 2(x^2 + y^2) + (x^2 + y^2 + 2),$$

per cui se $(x,y) \in \partial K$, cioè $x^2 + y^2 = R^2$, si ha

$$\langle \nabla V(x,y), f(t,x,y)\rangle \le -2R^4 + 3R^2 + 2$$

che è < 0 non appena $R > \sqrt{2}$. Applicando il Teorema 10.4 all'insieme K con $R > \sqrt{2}$, si ottiene che il sistema ammette un'orbita 2π-periodica, non banale non essendoci equilibri (verificarlo per esercizio). In questo caso non si riesce a trovarne l'espressione esplicita, ma si può dimostrare che l'orbita è "attrattiva", nel senso che l'orbita delle altre soluzioni tende ad avvicinarsi a essa per $t \to +\infty$. Questa proprietà rende l'orbita periodica stabile

e soprattutto "osservabile" (ciò è di fondamentale importanza nelle applicazioni, per esempio in fisica o nelle scienze naturali): per comprendere il suo andamento è sufficiente considerare un qualsiasi dato iniziale e disegnare l'orbita della corrispondente soluzione per un tempo abbastanza lungo per cui quest'ultima si andrà essenzialmente a sovrapporre all'orbita periodica, come si può osservare nella Figura 10.4.

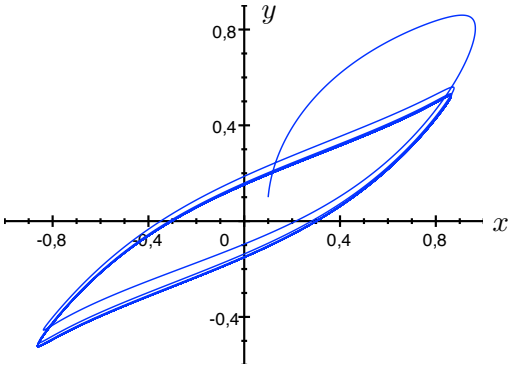


Figura 10.5: Orbita periodica dell'Esempio 10.7

Applicazione: l'oscillatore armonico con resistenza del mezzo

Si consideri l'equazione

$$y'' + f(y') + y = 0, \tag{10.2}$$

che rappresenta il moto di un punto sull'asse y soggetto a una forza elastica di richiamo $-y$, e a una resistenza del mezzo $-f(y')$ dipendente solo dalla velocità.

Generalmente si assume che f sia crescente $f(0) = 0$ e $zf(z) \geq 0$ per ogni z, detto caso "dissipativo". Queste proprietà sono soddisfatte, per esempio, se $f(z) = az + bz|z|$ con $a, b > 0$; ciò si descrive dicendo che la resistenza del mezzo è di tipo "viscoso" per valori piccoli della velocità (per i quali f ha un andamento lineare), di tipo "idraulico" per valori grandi della velocità (per i quali f ha un andamento quadratico).

Ci sono però esempi in meccanica ed elettronica non lineare nei quali f ha il comportamento sopra descritto solamente per gli z sufficientemente grandi, ovvero per $|z| \geq \bar{z}$ per qualche $\bar{z} > 0$, mentre ha una sorta di "resistenza negativa" per $|z| < \bar{z}$. Per esempio, ciò accade se f è data da $f(z) = z(z^2 - \bar{z}^2)$, per cui si ha proprio $zf(z) \geq 0$ per $|z| \geq \bar{z}$, mentre

$zf(z) < 0$ per $0 < |z| < \bar{z}$. In tale situazioni si riscontra il fenomeno delle cosiddette "oscillazioni periodiche autosostenute", ovvero, utilizzando il nostro linguaggio, l'esistenza di orbite periodiche non banali.

Si osservi che derivando formalmente (10.2) si ottiene l'equazione

$$y''' + f'(y')y'' + y' = 0,$$

la quale, posto $z = y'$, diventa

$$z'' + f'(z)z' + z = 0. \tag{10.3}$$

Nel caso in cui $f'(z) = \gamma(z^2 - 1)$, ovvero $f(z) = \gamma z(z^2/3 - 1)$, con $\gamma > 0$, (10.3) viene detta *equazione di Van der Pol*, e si dimostra avere applicazioni al caso dei tubi a vuoto. La (10.3) può essere studiata a partire da (10.2), per affrontare la quale servirebbero dei risultati più avanzati e che esulano dallo scopo, meramente introduttivo all'argomento, del presente capitolo. Qui ci limiteremo ad applicare il risultato generale del Teorema 10.4 al problema (10.2) non autonomo, della forma

$$y'' + f(y') + y = g(t),$$

con $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funzione continua, non nulla e τ-periodica, che rappresenta un termine forzante agente su $y(t)$. Più precisamente dimostreremo il seguente risultato

Teorema 10.9 *Date $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue tali che*

1) g è non identicamente nulla e τ-periodica;

2) esistono $\lambda, \bar{z} > 0$ tali che

$$f(z) > M + \lambda \text{ per } z \geq \bar{z}, \quad f(z) < -(M + \lambda) \text{ per } z \leq -\bar{z},$$

dove si è posto $M = \max_{\mathbb{R}} |g|$,

allora l'equazione

$$y'' + f(y') + y = g(t), \tag{10.4}$$

ammette una soluzione τ-periodica non banale.

Dimostrazione Cercheremo di applicare i teoremi visti in precedenza al sistema 2×2 equivalente a (10.4), ovvero a

$$\begin{cases} y' = z \\ z' = -y - f(z) + g(t), \end{cases} \tag{10.5}$$

con campo vettoriale $F(t, y, z) := (z, -y - f(z) + g(t))$. Purtroppo, volendo applicare il Teorema 10.6 a questo sistema, non è semplice ottenere un insieme invariante in futuro della forma $K = [V \leq \alpha]$. In questo caso la scelta $V(y, z) = y^2 + z^2$ non funziona, poiché sul bordo di una qualsiasi palla si ha

$$\langle \nabla V(y, z), F(t, y, z) \rangle = 2z(g(t) - f(z)),$$

che non ha mai un segno ben determinato. Si noti che, nelle ipotesi indicate, tale quantità è negativa pur di prendere z sufficientemente grande; utilizzeremo questa proprietà per costruire K ad hoc e infine applicheremo il Teorema 10.4. L'idea è sempre quella di trovare un insieme omeomorfo a una palla chiusa e tale che il campo vettoriale sulla frontiera sia strettamente entrante.

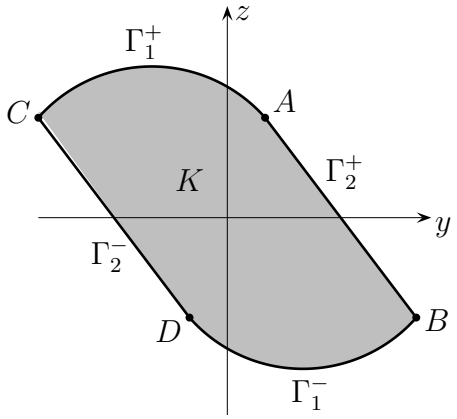


Figura 10.6: Insieme invariante per (10.4)

Sceglieremo un insieme K del tipo in Figura 10.6 che è un dominio semplicemente connesso e limitato del piano la cui frontiera è costituita da $\partial K := \Gamma_1^+ \cup \Gamma_2^+ \cup \Gamma_1^- \cup \Gamma_2^-$, essendo Γ_1^+ l'arco di circonferenza nel piano $y - z$ di raggio R e centro $C_1 = (-\lambda, 0)$ limitatamente agli $z \geq \bar{z}$, mentre $\Gamma_1^- = -\Gamma_1^+$ è l'arco di circonferenza di raggio R e centro $C_2 = (\lambda, 0)$ limitatamente agli $z \leq -\bar{z}$. Infine Γ_2^+ e Γ_2^- sono due segmenti che connettono i due archi di circonferenza. Più precisamente

$$\Gamma_1^+ := \big\{(y, z) : \ (y + \lambda)^2 + z^2 = R^2, \ z \geq \bar{z}\big\},$$

$$\Gamma_1^- := \big\{(y, z) : \ (y - \lambda)^2 + z^2 = R^2, \ z \leq -\bar{z}\big\},$$

$$\Gamma_2^+ := \text{ segmento } AB, \quad \Gamma_2^- := \text{ segmento } CD,$$

dove $A = (\sqrt{R^2 - \bar{z}^2} - \lambda, \bar{z})$, $B = (\sqrt{R^2 - \bar{z}^2} + \lambda, -\bar{z})$, $C = -B$, $D = -A$.

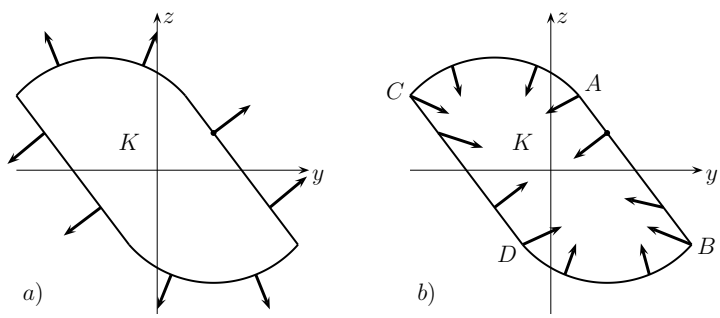


Figura 10.7: a) andamento del vettore normale esterno a K; b) andamento del campo vettoriale $F(t, y, z)$ sulla frontiera di K in un istante t fissato

Verifichiamo che per R sufficientemente grande K è un insieme invariante in futuro. Si osservi che la frontiera di K, a causa degli spigoli A, B, C e D, non è del tipo $[V = \alpha]$ per qualche funzione $V \in C^1$. Si può però rappresentarla come insieme di livello di una V che sia C^1 a tratti: in questo caso è allora sufficiente (perché?) verificare (10.1) separatamente sugli archi chiusi $\Gamma_1^\pm$ e $\Gamma_2^\pm$, ristretta a ciascuno dei quali V è di classe C^1. Per esempio, Γ_1^+ è ottenuta come $[V_1^+ = R^2]$ dove $V_1^+(y, z) = (y + \lambda)^2 + z^2$. Essendo $\nabla V_1^+(y, z) = (2(y + \lambda), 2z)$, per ogni $(y, z) \in \Gamma_1^+$ con $z \geq \bar{z}$, per 2) si ottiene

$$\langle \nabla V_1^+(y, z), F(t, y, z)\rangle = -2z(f(z) - \lambda - g(t)) < -2z((M + \lambda) - \lambda - M) = 0.$$

Analogamente, su $\Gamma_1^- = [V_1^- = R^2]$ con $V_1^-(y, z) = (y - \lambda)^2 + z^2$ e $z \leq -\bar{z}$ si ottiene

$$\langle \nabla V_1^-(y, z), F(t, y, z)\rangle = -2z(f(z) + \lambda - g(t)) < -2z(-(M + \lambda) + \lambda + M) = 0.$$

Il vettore normale esterno a Γ_2^+ è costantemente uguale a $n_2^+ = (\bar{z}, \lambda)$. Si osservi che si può interpretare $\Gamma_2^+ = [V_2^+ = 0]$ come insieme di livello 0 della funzione affine $V_2^+(y, z) = \lambda(z - \bar{z}) + \bar{z}(y - (\sqrt{R^2 - \bar{z}^2} - \lambda))$. Ricordando che su Γ_2^+ vale $|z| \leq \bar{z}$ e posto $m = \max_{[-\bar{z},\bar{z}]} |f|$, su tale insieme si ha

$$\begin{aligned}\langle \nabla V_2^+(y, z), F(t, y, z)\rangle &= \langle n_2^+, F(t, y, z)\rangle = \bar{z}z + \lambda(-y - f(z) + g(t)) \\ &= \frac{\bar{z}^2 + \lambda^2}{\bar{z}} z + \lambda(g(t) - f(z) - \sqrt{R^2 - \bar{z}^2}) \\ &\leq \bar{z}^2 + \lambda^2 + \lambda(M + m - \sqrt{R^2 - \bar{z}^2}),\end{aligned}$$

che è < 0 non appena R soddisfa $\sqrt{R^2 - \bar{z}^2} > M + m + \lambda + \bar{z}^2/\lambda$. Analogamente su $\Gamma_2^- = [V_2^- = 0]$ con $V_2^-(y, z) = -\lambda(z + \bar{z}) - \bar{z}(y + (\sqrt{R^2 - \bar{z}^2} - \lambda))$

con vettore normale esterno $n_2^- = (-\bar{z}, -\lambda)$ si ha

$$\begin{aligned}\langle \nabla V_2^-(y,z), F(t,y,z)\rangle &= \langle n_2^-, F(t,y,z)\rangle = -\bar{z}z - \lambda(-y - f(z) + g(t)) \\ &= -\frac{\bar{z}^2+\lambda^2}{\bar{z}} z + \lambda(f(z) - g(t) - \sqrt{R^2 - \bar{z}^2}) \\ &\le \bar{z}^2 + \lambda^2 + \lambda(m + M - \sqrt{R^2 - \bar{z}^2}),\end{aligned}$$

che è < 0 per la medesima scelta di R. Pertanto, se R è sufficientemente grande il campo vettoriale del sistema (10.5) ristretto a ∂K è strettamente entrante, dunque K è un insieme invariante in futuro. Per il Teorema 10.4 il sistema (10.5), quindi anche (10.4), ammette una soluzione τ-periodica, non banale perché non esistono equilibri (verificarlo per esercizio; si usa anche il fatto che g non è identicamente nulla). □

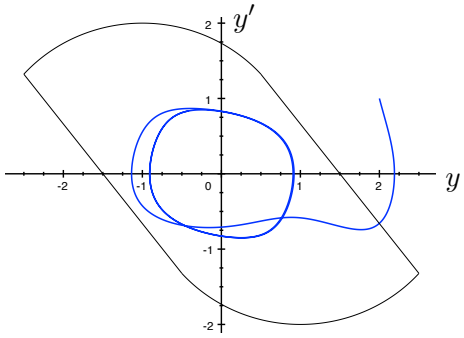


Figura 10.8: Orbita periodica nel piano delle fasi relativa all'equazione (10.6)

Per esempio, l'equazione nonlineare

$$y'' + 2(y')^3 + y = \operatorname{sen} t, \tag{10.6}$$

soddisfa le ipotesi del Teorema 10.9 con $f(z) = 2z^3$, $g(t) = \operatorname{sen} t$, e la scelta $\lambda = 1$, $\bar{z} = 3/2$, pertanto ammette una soluzione 2π-periodica. Si potrebbe dimostrare che anche quest'orbita è attrattiva; in Figura 10.8 si può osservare una soluzione che tende per $t \to +\infty$ all'orbita periodica contenuta nell'insieme invariante K.

Capitolo 11

Separazione delle variabili

Il metodo di separazione delle variabili per PDE

In questo capitolo faremo un excursus nel mondo delle equazioni differenziali alle derivate parziali (PDE) introducendo un metodo che in certi casi permette di ricondurre lo studio di un problema legato a una PDE a un'equazione o a un sistema di equazioni differenziali ordinarie. Un altro classico primo approccio allo studio delle equazioni nonlineari alle derivate parziali del primo ordine è dato dal *metodo delle caratteristiche* che non verrà affrontato in queste dispense e per il quale si rimanda alla bibliografia.

Essenzialmente, in certi casi se la PDE è lineare, ancora di più se omogenea, può essere conveniente cercare soluzioni ottenute come sovrapposizione di particolari soluzioni che dipendono da un numero inferiore di variabili. Per dare un'idea del metodo introduciamo subito un esempio.

Esempio introduttivo. Si cerchi una soluzione classica del *problema misto* (ai dati iniziali e al contorno) per l'*equazione del calore omogenea*:

$$\begin{cases} u_t - \Delta u = 0 & \text{in } U \times \mathbb{R}_+ \\ u = 0 & \text{in } \partial U \times \mathbb{R}_+ \\ u = g & \text{in } U \times \{0\}, \end{cases} \tag{11.1}$$

dove U è un aperto limitato di $\mathbb{R}^n$ con frontiera regolare, $u : U \times [0, +\infty[\to \mathbb{R}$, $u = u(x,t) = u(x_1, x_2, \ldots, x_n, t)$, Δ è l'operatore *Laplaciano* rispetto alle variabili spaziali $x = (x_1, \ldots, x_n)$, definito da $\Delta u = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}$. Nel seguito utilizzeremo anche le notazioni $u_t = \frac{\partial u}{\partial t}$, $u_{x_i} = \frac{\partial u}{\partial x_i}$, $u_{x_i x_i} = \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}$.

Proviamo a vedere se esistono soluzioni, inizialmente solo dell'equazione $u_t - \Delta u = 0$, del tipo

$$u(x,t) = v(t)w(x). \tag{11.2}$$

Essendo $u_t = v'w$ e $\Delta u = v\Delta w$, allora u è soluzione se

$$v'(t)w(x) - v(t)\Delta w(x) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{v'(t)}{v(t)} = \frac{\Delta w(x)}{w(x)}, \tag{11.3}$$

almeno per tutti gli x, t per cui $v(t)$ e $w(x)$ non sono nulli. Il membro sinistro di (11.3) è una funzione che dipende solo da t, quello destro solo da x. Affinché l'uguaglianza (11.3) sia verificata, tali funzioni devono essere costanti. Quindi esiste $\lambda \in \mathbb{R}$ tale che

$$\frac{v'(t)}{v(t)} = \frac{\Delta w(x)}{w(x)} = -\lambda, \tag{11.4}$$

per ogni $x \in U$ e ogni $t > 0$ (il segno "$-$" è convenzionale), ovvero

$$\begin{cases} \Delta w(x) + \lambda w(x) = 0 \\ v'(t) + \lambda v(t) = 0. \end{cases} \tag{11.5}$$

Considerando ora le condizioni al contorno si ha $u(x,t) = v(t)w(x) = 0$ per ogni $t > 0$, $x \in \partial U$, la quale a meno che $v(t) \equiv 0$ (nel qual caso $u \equiv 0$ che non è interessante), è verificata se $w(x) = 0$ per ogni $x \in \partial U$. Otteniamo dunque il seguente *problema agli autovalori per il Laplaciano*: trovare $\lambda \in \mathbb{R}$ tale che esista una soluzione non identicamente nulla (altrimenti $u \equiv 0$) di

$$\begin{cases} -\Delta w = \lambda w & \text{in } U \\ \quad w = 0 & \text{in } \partial U. \end{cases} \tag{11.6}$$

In questo caso λ verrà detto *autovalore* del Laplaciano in U, mentre una corrispondente soluzione non nulla verrà detta *autofunzione relativa a* λ.

Se dunque λ e $w = w_\lambda$ sono autovalore/autofunzione, risolvendo la seconda equazione in (11.5) si ottiene

$$v(t) = v_\lambda \mathrm{e}^{-\lambda t},$$

con v_λ costante generica, perciò

$$u(x,t) = v(t)w(x) = v_\lambda \mathrm{e}^{-\lambda t} w_\lambda(x) \tag{11.7}$$

è soluzione dell'equazione del calore in $U \times \mathbb{R}_+$ e soddisfa le condizioni al contorno $u = 0$ in $\partial U \times \mathbb{R}_+$.

Cosa si può dire delle condizioni iniziali? Per la soluzione u trovata si ha $u(x,0) = v_\lambda w(x)$ che in generale sarà diversa dal dato g fissato inizialmente. Osserviamo che $u(x,0) \in \operatorname{span}\langle w\rangle$, spazio lineare generato da w. Quindi una funzione del tipo (11.7) può essere soluzione di (11.1) solamente nel caso in cui $g \in \operatorname{span}\langle w\rangle$.

Utilizzando il principio di sovrapposizione si può dire di più. Se $\{\lambda_k\}_{k=1}^N$ sono autovalori di (11.6) con relative autofunzioni $\{w_k\}_{k=1}^N$, allora la funzione

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{N} v_k \mathrm{e}^{-\lambda_k t} w_k(x)$$

con v_k costanti, è ancora soluzione dell'equazione del calore. In questo caso si ha $u(x,0) = \sum_{k=1}^N v_k w_k(x)$ quindi $u(x,0) \in \operatorname{span}\langle w_1, \dots, w_N\rangle$, dunque u può essere soluzione di (11.1) solamente nel caso in cui $g \in \operatorname{span}\langle w_1, \dots, w_N\rangle$.

Se, infine, supponiamo che esista una successione $\{\lambda_k\}_{k\geq 1}$ di autovalori di (11.6) con relative autofunzioni $\{w_k\}_{k\geq 1}$, allora, almeno formalmente, possiamo considerare la funzione

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} v_k \mathrm{e}^{-\lambda_k t} w_k(x). \tag{11.8}$$

Nel caso in cui sia possibile derivare la serie termine a termine, ci aspettiamo che u sia ancora soluzione, con dato iniziale $u(x,0) \in \overline{\operatorname{span}_{k\geq 1}\langle w_k\rangle}$, dove la chiusura è fatta in un opportuno spazio funzionale.

In conclusione, la possibilità di risolvere (11.1) mediante una funzione del tipo (11.8), viene ricondotta ai seguenti problemi:

a) risolvere il problema agli autovalori (11.6) ovvero, più precisamente, trovare una successione $\{\lambda_k\}_{k\geq 1}$ di autovalori di (11.6) con relative autofunzioni $\{w_k\}_{k\geq 1}$ sufficientemente regolari;

b) dimostrare la convergenza della serie in (11.8) e giustificare la derivazione termine a termine;

c) studiare la relazione che intercorre tra lo spazio X a cui appartengono i dati iniziali g e la chiusura, rispetto a un'opportuna topologia introdotta in X, di $\operatorname{span}_{k\geq 1}\langle w_k\rangle$. Si vorrebbe che

$$\overline{\operatorname{span}_{k\geq 1}\langle w_k\rangle}^X = X.$$

Il problema a) ha generalmente soluzione anche in casi più generali (si veda la teoria di *Sturm-Liouville*). Come spazio X prenderemo generalmente (almeno) lo spazio delle funzioni continue $C(\overline{U})$. La convergenza della serie, come anche la derivabilità termine a termine, sarà per esempio garantita dalla convergenza uniforme (si vedano le proposizioni A.33 e A.34).

Per quanto riguarda c), vorremmo che fosse possibile approssimare g, almeno puntualmente, con combinazioni lineari delle autofunzioni.

Nel caso unidimensionale in cui $n = 1$ e $U =]0, \pi[$, per cui $x \in \mathbb{R}$, $\Delta u = u_{xx}$, $\Delta w = w''$ e il sistema (11.1) si riduce a

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} = 0 & \text{in }]0,\pi[\times\mathbb{R}_+ \\ u = 0 & \text{in } \{0,\pi\}\times\mathbb{R}_+ \\ u = g & \text{in }]0,\pi[\times\{0\}, \end{cases} \tag{11.9}$$

si può dimostrare (vedi l'analisi svolta per (11.38)) che gli autovalori di

$$\begin{cases} -w'' = \lambda w & \text{in }]0,\pi[\\ w(0) = w(\pi) = 0, \end{cases} \tag{11.10}$$

sono del tipo $\lambda_k = k^2$ con relative autofunzioni date per esempio da $w_k(x) = \operatorname{sen}(kx)$, perciò (11.8) diventa

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} v_k \mathrm{e}^{-k^2 t} \operatorname{sen}(kx), \tag{11.11}$$

e il dato iniziale apparterrà a

$$u(x,0) = \sum_{k=1}^{\infty} v_k \operatorname{sen}(kx) \in \overline{\operatorname{span}_{k\geq 1}\langle \operatorname{sen}(kx)\rangle}.$$

Ha senso quindi cercare di vedere se sia possibile approssimare funzioni continue g con *polinomi trigonometrici*. Ciò giustifica lo studio delle serie di Fourier affrontato nella prossima sezione.

Serie di Fourier

Richiami sugli spazi di Hilbert

Uno *spazio prehilbertiano* H sul campo $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ (oppure $\mathbb{R}$), è una spazio lineare su $\mathbb{K}$ su cui è definita una *forma sesquilineare hermitiana positiva* (ovvero una *forma bilineare simmetrica positiva* nel caso $\mathbb{K} = \mathbb{R}$), cioè una funzione $(\cdot|\cdot) : H \times H \to \mathbb{K}$ detta *prodotto scalare*, tale che

a) per ogni y fissato, la mappa $x \mapsto (x|y)$ è lineare;

b) per ogni x fissato, la mappa $y \mapsto (x|y)$ è antilineare;

c) (hermitiana) $(x|y) = \overline{(y|x)}$ per ogni $x, y \in H$;

d) (positiva) $(x|x) \geq 0$ per ogni $x \in H$, e $(x|x) = 0$ se e solo se $x = 0$.

Dato il prodotto scalare, la posizione

$$||x|| := (x|x)^{1/2} \tag{11.12}$$

definisce una norma in H, per la quale vale la *disuguaglianza di Schwarz*

$$\big|(x|y)\big| \leq ||x||\,||y|| \quad \text{per ogni } x, y \in H. \tag{11.13}$$

Definizione 11.1 *Uno spazio prehilbertiano* $\big(H, (\cdot|\cdot)\big)$ *si dice* spazio di Hilbert *se H è completo come spazio normato dotato della norma* (11.12).

Definizione 11.2 *Due elementi $x, y \in H$ si dicono* ortogonali *se $(x|y) = 0$.*

Definizione 11.3 *Un insieme $\{e_\alpha\}_{\alpha \in A}$ di elementi non nulli di H si dice* insieme ortogonale *se i suoi elementi sono mutualmente ortogonali, cioè se $(e_\alpha|e_\beta) = 0$ per ogni $\alpha \neq \beta$.*

È facile verificare che gli insiemi ortogonali sono composti da elementi linearmente indipendenti.

Definizione 11.4 *Un insieme $\{e_\alpha\}_{\alpha \in A}$ di elementi di H si dice* insieme ortonormale *se è ortogonale e ogni e_α ha norma unitaria, cioè $||e_\alpha|| = 1$ per ogni α.*

Per gli insiemi ortogonali vale il seguente lemma

Lemma 11.5 (disuguaglianza di Bessel) *Se $\{e_\alpha\}_{\alpha \in A}$ è un insieme ortogonale allora per ogni $x \in H$ si ha*

$$\sum_{\alpha \in A} |(x|e_\alpha)|^2\, ||e_\alpha||^2 \leq ||x||^2. \tag{11.14}$$

Se in particolare l'insieme è ortonormale si ha

$$\sum_{\alpha \in A} |(x|e_\alpha)|^2 \leq ||x||^2. \tag{11.15}$$

Il numero $(x|e_\alpha)$ viene detto coefficiente di Fourier di x relativamente a e_α. *In particolare si può dimostrare che l'insieme degli indici α per cui $(x|e_\alpha) \neq 0$ è al più numerabile (quindi la somma, se infinita, è una serie).*

Definizione 11.6 *Un insieme ortonormale* $\{e_\alpha\}_{\alpha\in A}$ *si dice* base ortonormale *(o* base hilbertiana*) se vale una delle seguenti proprietà equivalenti:*

i) $\{e_\alpha\}_{\alpha\in A}$ *è* completo*, ovvero* $\overline{\operatorname{span}_{\alpha\in A}\langle e_\alpha\rangle} = H$*;*

ii) $\{e_\alpha\}_{\alpha\in A}$ *è* chiuso*, ovvero* $(x|e_\alpha) = 0$ *per ogni* α *implica* $x = 0$*;*

*iii) vale l'*identità di Parseval*: per ogni* $x \in H$

$$\sum_{\alpha\in A} |(x|e_\alpha)|^2 = ||x||^2, \tag{11.16}$$

iv) per ogni $x \in H$*, la* serie di Fourier associata a x *converge a* x*, cioè*

$$x = \sum_{\alpha\in A} (x|e_\alpha)e_\alpha. \tag{11.17}$$

Analogamente si può introdurre il concetto di *base ortogonale.*

Serie di Fourier trigonometriche in L^2

La teoria delle serie di Fourier trigonometriche ha un suo sviluppo naturale all'interno dello *spazio delle funzioni a quadrato sommabile*

$$L^2(A) = L^2(A,\mathbb{K}) := \{f : A \to \mathbb{K} \text{ Lebesgue misurabili } : \ \|f\|_2 < \infty\}.$$

Più in generale, se $p \geq 1$ si definisce

$$L^p(A) = L^p(A,\mathbb{K}) := \{f : A \to \mathbb{K} \text{ Lebesgue misurabili } : \ \|f\|_p < \infty\},$$

dove

$$\|f\|_p = \|f\|_{L^p(A)} := \left(\int_A |f(x)|^p\,dx\right)^{1/p}.$$

Per comprendere appieno la definizione bisognerebbe precisare meglio i concetti di *funzione Lebesgue misurabile* e di *funzione Lebesgue integrabile* ovvero $f \in L^1(A)$, argomenti di corsi più avanzati di Analisi Matematica. Per il momento si tenga presente che le funzioni continue e le funzioni integrabili secondo Riemann appartengono a questa classe.

Lo spazio $L^2(A,\mathbb{K})$ ha una struttura di spazio di Hilbert prendendo come prodotto scalare

$$(f|g)_{L^2} := \int_A f(x)\overline{g(x)}\,dx$$

che induce la norma $\|f\|_2$.

Si può dimostrare che una base ortonormale di $L^2([0,T])$ è data per esempio da

$$\Big\{\frac{1}{\sqrt{T}},\ \sqrt{\frac{2}{T}}\cos\big(n\frac{2\pi}{T}x\big),\ \sqrt{\frac{2}{T}}\operatorname{sen}\big(n\frac{2\pi}{T}x\big)\Big\}_{n\geq 1} \tag{11.18}$$

oppure da

$$\Big\{\frac{1}{\sqrt{T}}\mathrm{e}^{in\omega x}\Big\}_{n\in\mathbb{Z}}, \tag{11.19}$$

dove abbiamo posto $\omega := \frac{2\pi}{T}$.

La serie di Fourier associata a $f \in L^2([0,T])$ è

$$\frac{\alpha_0}{\sqrt{T}} + \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n\sqrt{\frac{2}{T}}\cos\big(n\frac{2\pi}{T}x\big) + \beta_n\sqrt{\frac{2}{T}}\operatorname{sen}\big(n\frac{2\pi}{T}x\big) \tag{11.20}$$

dove i coefficienti di Fourier di f sono

$$\alpha_0 = \alpha_0(f) = \Big(f \,\Big|\, \frac{1}{\sqrt{T}}\Big)_{L^2} = \frac{1}{\sqrt{T}}\int_0^T f(y)\,dy,$$

$$\alpha_n = \alpha_n(f) = \Big(f \,\Big|\, \sqrt{\frac{2}{T}}\cos\big(n\frac{2\pi}{T}x\big)\Big)_{L^2} = \sqrt{\frac{2}{T}}\int_0^T f(y)\cos\big(n\frac{2\pi}{T}y\big)\,dy,$$

$$\beta_n = \beta_n(f) = \Big(f \,\Big|\, \sqrt{\frac{2}{T}}\operatorname{sen}\big(n\frac{2\pi}{T}x\big)\Big)_{L^2} = \sqrt{\frac{2}{T}}\int_0^T f(y)\operatorname{sen}\big(n\frac{2\pi}{T}y\big)\,dy.$$

Spesso, invece di lavorare con la base ortonormale, si considera la base ortogonale

$$\Big\{1,\ \cos\big(n\frac{2\pi}{T}x\big),\ \operatorname{sen}\big(n\frac{2\pi}{T}x\big)\Big\}_{n\geq 1} \tag{11.21}$$

per la quale si definiscono i coefficienti (detti ancora di Fourier) come segue

$$a_n = a_n(f) := \frac{2}{T}\int_0^T f(y)\cos\big(n\frac{2\pi}{T}y\big)\,dy, \qquad n \geq 0, \tag{11.22}$$

$$b_n = b_n(f) := \frac{2}{T}\int_0^T f(y)\operatorname{sen}\big(n\frac{2\pi}{T}y\big)\,dy, \qquad n \geq 1, \tag{11.23}$$

e la serie di Fourier associata

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\big(n\frac{2\pi}{T}x\big) + b_n \operatorname{sen}\big(n\frac{2\pi}{T}x\big). \tag{11.24}$$

Tali coefficienti sono scelti in modo tale che le serie (11.20) e (11.24) coincidano. Infatti dalle definizioni segue che

$$a_0 = \frac{2}{\sqrt{T}}\alpha_0, \qquad a_n = \sqrt{\frac{2}{T}}\alpha_n, \qquad b_n = \sqrt{\frac{2}{T}}\beta_n, \quad n \geq 1, \tag{11.25}$$

perciò

$$\frac{a_0}{2} = \frac{\alpha_0}{\sqrt{T}},$$

$$a_n \cos\big(n\frac{2\pi}{T}x\big) = \alpha_n\sqrt{\frac{2}{T}}\cos\big(n\frac{2\pi}{T}x\big),$$

$$b_n \operatorname{sen}\big(n\frac{2\pi}{T}x\big) = \beta_n\sqrt{\frac{2}{T}}\operatorname{sen}\big(n\frac{2\pi}{T}x\big),$$

e le due serie (11.20), (11.24) coincidono.

L'identità di Parseval nel caso della base ortonormale si scrive

$$||f||_{L^2}^2 = \alpha_0^2 + \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n^2 + \beta_n^2, \tag{11.26}$$

che grazie a (11.25), nel caso della base ortogonale diventa

$$||f||_{L^2}^2 = T\Big(\frac{a_0^2}{4} + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 + b_n^2\Big). \tag{11.27}$$

Volendo invece lavorare con la base ortogonale

$$\Big\{\mathrm{e}^{in\omega x}\Big\}_{n\in\mathbb{Z}}, \tag{11.28}$$

la serie di Fourier associata è data da

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(f)\mathrm{e}^{in\omega x} =: \lim_{N\to\infty}\sum_{n=-N}^{N} c_n(f)\mathrm{e}^{in\omega x}, \tag{11.29}$$

dove

$$c_n(f) := \frac{1}{T}\int_0^T f(y)\mathrm{e}^{-in\omega y}\,dy. \tag{11.30}$$

Ricordando la ben nota formula di Eulero

$$\mathrm{e}^{it} = \cos t + i \operatorname{sen} t, \quad t \in \mathbb{R}$$

si ha allora per $n \geq 1$

$$c_n \mathrm{e}^{in\omega x} + c_{-n}\mathrm{e}^{-in\omega x} = (c_n + c_{-n})\cos(nx) + i(c_n - c_{-n})\operatorname{sen}(nx),$$

quindi la serie (11.29) coincide con (11.24) pur di prendere

$$a_0 = 2c_0, \qquad a_n = c_n + c_{-n}, \qquad b_n = i(c_n - c_{-n}), \quad n \geq 1,$$

la qual cosa, grazie a semplici conti, è garantita dalle (11.22), (11.23) e (11.30).

Esercizio 11.7 *Scrivere la relazione* (11.27) *nel caso della base* (11.28).

Soluzione. Essendo $c_0 = a_0/2$, $c_n = \frac{a_n - ib_n}{2}$, $c_{-n} = \frac{a_n + ib_n}{2}$ si ha $a_n^2 + b_n^2 = 4|c_n|^2 = 4|c_{-n}|^2$, perciò

$$||f||_{L^2}^2 = T \sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|^2.$$

Per facilità di notazione, d'ora in avanti lavoreremo con la base ortogonale. Osserviamo che i coefficienti di α_n, β_n, a_n, b_n (come anche c_n) sono ben definiti anche quando f è solamente integrabile. Definiamo dunque

Definizione 11.8 *Se $f \in L^1([0,T])$, la* serie di Fourier generata da f, *che indicheremo anche con Sf, è data da* (11.24) *con $a_n = a_n(f)$ e $b_n = b_n(f)$ definiti da* (11.22) *e* (11.23). *Scriveremo anche*

$$f(x) \ \sim \ \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\big(n\frac{2\pi}{T}x\big) + b_n \operatorname{sen}\big(n\frac{2\pi}{T}x\big) =: Sf(x),$$

mentre le ridotte N-esime verranno denotate con $S_N f(x)$.

Definizione 11.9 *Diremo* serie trigonometrica in $[0,T]$ *una funzione del tipo*

$$\frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos\big(n\frac{2\pi}{T}x\big) + B_n \operatorname{sen}\big(n\frac{2\pi}{T}x\big),$$

con $A_0, A_n, B_n \in \mathbb{R}$ per $n \geq 1$. Le ridotte N-esime si diranno polinomi trigonometrici in $[0,T]$. *Si osservi che tali funzioni sono T-periodiche.*

Grazie alla completezza del sistema (11.18) si hanno i seguenti risultati.

Teorema 11.10 *Se $f \in L^2([0,T])$ allora la serie di Fourier associata a f converge a f in L^2, cioè*

$$\lim_{N\to\infty} ||S_N f - f||_{L^2} = 0,$$

ovvero $Sf = f$ in L^2.

Lemma 11.11 (di Riemann-Lebesgue, caso L^2) *Se $f \in L^2([0,T])$ allora $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = 0$.*

Dimostrazione La serie a secondo membro in (11.27) converge, quindi il suo termine generale è infinitesimo, cioè $\lim_{n\to\infty} a_n^2 = \lim_{n\to\infty} b_n^2 = 0$, da cui segue banalmente la tesi. □

Si potrebbe dimostrare che il lemma vale anche nel caso più generale $f \in L^1$ (si veda [3]).

Alcune proprietà - Sviluppo in serie di seni e di coseni

Quando si lavora con le serie di Fourier, si è soliti prolungare le funzioni f definite solamente in $[0,T]$ a funzioni definite su tutto $\mathbb{R}$. Ciò si può convenientemente fare in diversi modi.

Il primo è per T-periodicità: f viene estesa a una $\tilde{f}$ periodica di periodo T. Osserviamo che se $f(0) \neq f(T)$ ciò comporta l'eventuale cambiamento del valore di $f(0)$ (oppure di $f(T)$) in modo tale che $\tilde{f}(0) = \tilde{f}(T)$. Quindi in generale f coinciderà con $\tilde{f}$ su $]0,T[$ ma non necessariamente su $[0,T]$.

Il secondo: si estende f prima per parità/disparità su $[-T,T]$ e quindi per $2T$-periodicità su $\mathbb{R}$. In questo caso per assicurare che l'estensione $\tilde{f}$ sia dispari bisognerà eventualmente cambiare il valore di $f(0)$ ponendo $\tilde{f}(0) = 0$ (mentre per l'estensione pari non ci sono problemi), e per garantire la $2T$-periodicità bisognerà eventualmente porre $\tilde{f}(-T) = \tilde{f}(T)$. Anche in questo caso f e $\tilde{f}$ sicuramente coincideranno su $]0,T[$.

Si noti comunque che l'eventuale cambiamento dei valori di f in un numero finito di punti lascia inalterati i coefficienti di Fourier, che sono definiti in termini di integrali, quindi non cambiano se si modifica la funzione integranda su un insieme di misura nulla. Il cambiamento sarà però importante quando si andrà a studiare la convergenza *puntuale* della serie stessa.

Inoltre, se inizialmente f è continua in $[0,T]$ allora la sua estensione pari e $2T$-periodica è automaticamente continua in $\mathbb{R}$, mentre la sua estensione dispari e $2T$-periodica è continua se e solo se $f(0) = f(T) = 0$.

È da notare infine che se $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è una funzione T-periodica allora per ogni $a \in \mathbb{R}$ si ha

$$\int_a^{a+T} f(x)\,dx = \int_0^T f(x)\,dx.$$

Infatti

$$\begin{aligned}\int_a^{a+T} f(x)\,dx &= \Big(\int_a^0 + \int_0^T + \int_T^{a+T}\Big) f(x)\,dx \\ &= \int_a^0 f(x)\,dx + \int_0^T f(x)\,dx + \int_0^a f(y+T)\,dy \\ &= \int_a^0 f(x)\,dx + \int_0^T f(x)\,dx + \int_0^a f(y)\,dy = \int_0^T f(x)\,dx.\end{aligned}$$

In particolare questo permette di sostituire l'integrazione in $[0,T]$ con un'integrazione in $[-T/2, T/2]$. Per esempio, in letteratura la teoria delle serie di Fourier viene svolta indifferentemente in $[0, 2\pi]$ oppure in $[-\pi, \pi]$.

Proposizione 11.12 *Valgono le seguente proprietà:*

i) se f è integrabile oppure f è limitata i relativi coefficienti di Fourier sono uniformemente limitati;

ii) se $f : [-T,T] \to \mathbb{R}$ è pari nella serie di Fourier di f in $[-T,T]$ compaiono solo coseni;

iii) se $f : [-T,T] \to \mathbb{R}$ è dispari nella serie di Fourier di f in $[-T,T]$ compaiono solo seni.

Dimostrazione i) Se f è integrabile si ha banalmente per $n \in \mathbb{N}$

$$|a_n(f)|, |b_n(f)| \le \frac{2}{T}\int_0^T |f(x)|\,dx = \frac{2}{T}||f||_{L^1}.$$

Poiché le funzioni limitate in $[0,T]$ sono integrabili, la stima sopra continua a valere.Si può però trovare una stima che dipende solo dalla norma infinito:

$$|a_n(f)|, |b_n(f)| \le \frac{2}{T}\int_0^T |f(x)|\,dx = 2||f||_\infty.$$

ii) Se f è pari allora per ogni $n \ge 1$ la funzione $x \mapsto f(x)\,\mathrm{sen}(n\frac{2\pi}{2T}x)$ è dispari in $[-T,T]$ quindi

$$b_n(f) = \frac{2}{2T}\int_{-T}^T f(x)\,\mathrm{sen}\,\big(n\frac{2\pi}{2T}x\big)\,dx = 0.$$

iii) Analoga a ii). □

Come conseguenza della precedente proposizione, è possibile sviluppare una funzione $f : [0, T] \to \mathbb{R}$ in una *serie di seni*. Basta considerare la serie di Fourier di $\tilde{f}$, estensione dispari di f in $[-T, T]$ (la quale, ricordiamo, coincide con f in $]0, T[$). Per quanto visto, in tale serie compariranno solamente le funzioni $\operatorname{sen}(n\frac{2\pi}{2T}x)$. Si scriverà dunque

$$f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} b_n \operatorname{sen}\big(n\frac{\pi}{T}x\big), \tag{11.31}$$

dove

$$b_n = b_n(\tilde{f}) = \frac{2}{2T}\int_{-T}^{T} \tilde{f}(y) \operatorname{sen}\big(n\frac{\pi}{T}y\big)\, dy = \frac{2}{T}\int_{0}^{T} f(y) \operatorname{sen}\big(n\frac{\pi}{T}y\big)\, dy.$$

Analogamente, considerando l'estensione pari in $[-T, T]$, si può sviluppare f in una *serie di coseni*.

Esercizio 11.13 *Scrivere la relazione* (11.27) *nel caso dello sviluppo in serie di seni oppure di coseni.*

Soluzione. Data f, per l'estensione dispari $\tilde{f}$ di f si ha $a_n(\tilde{f}) = 0$, perciò

$$||f||^2_{L^2} = \frac{1}{2}||\tilde{f}||^2_{L^2} = \frac{1}{2}\frac{2T}{2}\sum_{n=1}^{\infty} b_n^2(\tilde{f}) = \frac{T}{2}\sum_{n=1}^{\infty} b_n^2(\tilde{f}).$$

Nel caso dell'estensione pari $\bar{f}$ di f si ha invece $b_n(\bar{f}) = 0$ perciò

$$||f||^2_{L^2} = \frac{1}{2}||\bar{f}||^2_{L^2} = \frac{1}{2}(2T)\Big(\frac{a_0^2(\bar{f})}{4} + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2(\bar{f})\Big),$$

essendo

$$a_n(\bar{f}) = \frac{2}{2T}\int_{-T}^{T} \bar{f}(y) \cos\big(n\frac{\pi}{T}y\big)\, dy = \frac{2}{T}\int_{0}^{T} f(y) \cos\big(n\frac{\pi}{T}y\big)\, dy.$$

Convergenza puntuale e uniforme delle serie di Fourier

Per quanto appena visto, le serie di Fourier hanno ottime proprietà in L^2. Purtroppo, nelle applicazioni che abbiamo in mente per il metodo di separazione delle variabili, avremo a che fare almeno con funzioni continue. Poiché $C([0, T]) \subset L^2([0, T])$ per il Teorema 11.10 possiamo concludere che

se $f \in C([0,T])$ allora $Sf = f$, con l'uguaglianza valida in L^2. Cosa si può dire riguardo all'uguaglianza puntuale $Sf(x) = f(x)$? In effetti, in generale non è vero che la serie di Fourier di f converge a f puntualmente; ci sono addirittura esempi di funzioni in L^1 la cui serie di Fourier non converge in alcun punto! Si può dire qualcosa in più se la funzione f è continua?

Problema. Sia f continua. Che relazione c'è tra

$$f(x) \sim \frac{a_0(f)}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n(f) \cos\big(n\frac{2\pi}{T}x\big) + b_n(f) \operatorname{sen}\big(n\frac{2\pi}{T}x\big) \qquad ?$$

È vero che la serie di Fourier di f converge a f in ogni punto? E uniformemente?

La risposta è negativa. In generale non è detto che la serie di Fourier di una funzione continua f converga a f puntualmente ovunque. Si potrebbe però dimostrare (difficile!) che ciò accade quasi ovunque. Noi ci limiteremo a dimostrare alcuni risultati più elementari. Anzitutto, visto che ci interesserà derivare le serie termine a termine, prenderemo in considerazione la convergenza uniforme. Arriveremo a dimostrare il teorema principale 11.23 premettendo alcuni risultati preliminari.

Lemma 11.14 *Se un serie trigonometrica converge uniformemente a una funzione g, allora i coefficienti della serie coincidono con i coefficienti di Fourier di g. Più precisamente, se*

$$\frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{N} A_n \cos\big(n\frac{2\pi}{T}x\big) + B_n \operatorname{sen}\big(n\frac{2\pi}{T}x\big) \to g(x)$$

se $N \to \infty$, uniformemente in $[0,T]$, allora $A_n = a_n(g)$ e $B_n = b_n(g)$.

Dimostrazione La convergenza uniforme implica la convergenza integrale, quindi possiamo scambiare i simboli di serie e di integrale. Si ha dunque

$$a_0 = \frac{2}{T}\int_0^T g(y)\,dy = \frac{2}{T}\int_0^T \Big(\frac{A_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \cos\big(k\frac{2\pi}{T}y\big) + B_k \operatorname{sen}\big(k\frac{2\pi}{T}y\big)\Big)\,dy$$

$$= A_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2A_k}{T}\int_0^T \cos\big(k\frac{2\pi}{T}y\big)\,dy + \frac{2B_k}{T}\int_0^T \operatorname{sen}\big(k\frac{2\pi}{T}y\big)\,dy = A_0,$$

e per l'ortogonalità della base trigonometrica, per $n \geq 1$ si ha

$$\begin{aligned}
a_n &= \frac{2}{T}\int_0^T g(y)\cos\big(n\frac{2\pi}{T}y\big)\,dy \\
&= \frac{2}{T}\int_0^T \Big(\frac{A_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} A_k\cos\big(k\frac{2\pi}{T}y\big) + B_k \operatorname{sen}\big(k\frac{2\pi}{T}y\big)\Big)\cos\big(n\frac{2\pi}{T}y\big)\,dy \\
&= \frac{A_0}{T}\int_0^T \cos\big(n\frac{2\pi}{T}y\big)\,dy + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{2A_k}{T}\int_0^T \cos\big(k\frac{2\pi}{T}y\big)\cos\big(n\frac{2\pi}{T}y\big)\,dy + \\
&\qquad + \frac{2B_k}{T}\int_0^T \operatorname{sen}\big(k\frac{2\pi}{T}y\big)\cos\big(n\frac{2\pi}{T}y\big)\,dy \\
&= A_n\frac{2}{T}\int_0^T \cos^2\big(n\frac{2\pi}{T}y\big)\,dy = A_n\frac{2}{T}\int_0^T \frac{1+\cos\big(4n\frac{\pi}{T}y\big)}{2}\,dy = A_n.
\end{aligned}$$

Analogamente si ottiene $b_n = B_n$. □

Osservazione 11.15 Si può dimostrare che la tesi del precedente teorema rimane vera nel caso in cui $g \in L^1$ e si sostituisce la convergenza uniforme con la convergenza L^1 (si veda per esempio [3]).

Osservazione 11.16 Si noti che se g è limite puntuale o uniforme di una serie trigonometrica in $[0,T]$, allora g è necessariamente T-periodica.

Corollario 11.17 *Sia $f \in C([0,T])$ e T-periodica. Se la serie di Fourier di f converge uniformemente a una funzione g, allora $g \equiv f$.*

Dimostrazione Osserviamo che g, limite uniforme in $[0,T]$ di una successione di funzioni continue, è ivi continua. Per il lemma precedente i coefficienti di Fourier di f e g coincidono, cioè $a_n(f) = a_n(g)$, $b_n(f) = b_n(g)$ per ogni n. Poiché i coefficienti di Fourier dipendono linearmente dall'argomento, si ha dunque $a_n(f-g) = a_n(f) - a_n(g) = 0$ e analogamente $b_n(f-g) = 0$ per ogni n. Quindi la funzione $f-g$ ha tutti i coefficienti di Fourier nulli. Poiché il sistema trigonometrico è completo in L^2, per ii) della Definizione 11.6 deve aversi $f-g=0$ in $L^2([0,T])$, ed essendo f e g continue, si ha infine $f(x) = g(x)$ per ogni $x \in [0,T]$. □

Definizione 11.18 *Una funzione $f : [0,T] \to \mathbb{R}$ si dice C^1* a tratti *se esistono $0 = x_1 < \cdots < x_M = T$ e funzioni $f_k \in C^1([x_k, x_{k+1}])$ per $k = 1,\ldots,M-1$, tali che $f(x) = f_k(x)$ per ogni $x \in]x_k, x_{k+1}[$.*

Lemma 11.19 *Se $f \in C([0,T])$ è T-periodica e C^1 a tratti, allora*

$$a_n(f) = -\frac{1}{n\omega} b_n(f'), \qquad b_n(f) = \frac{1}{n\omega} a_n(f'), \tag{11.32}$$

per ogni $n \geq 1$, dove $\omega = \frac{2\pi}{T}$. In generale, se $f \in C^{k-1}([0,T])$ con $f^{(h)}$ T-periodiche per $h = 0, \dots, k-1$, e se $f^{(k)}$ è continua a tratti, allora

$$|a_n(f)| + |b_n(f)| = \frac{1}{(n\omega)^k} \Big(\big|a_n(f^{(k)})\big| + \big|b_n(f^{(k)})\big| \Big), \tag{11.33}$$

per ogni $n \geq 1$. In particolare $a_n(f), b_n(f) = o(1/n^k)$.

Dimostrazione Osserviamo che poiché f' è continua a tratti, allora appartiene a $L^2([0,T])$, quindi possiamo calcolare i suoi coefficienti di Fourier. Utilizzando il metodo di integrazione per parti, che vale per funzioni continue e C^1 a tratti (dimostrarlo per esercizio!), si ha

$$\begin{aligned} b_n(f') &= \frac{2}{T} \int_0^T f'(y) \operatorname{sen}(n\omega y)\, dy \\ &= \frac{2}{T} \left(\Big[f(y) \operatorname{sen}(n\omega y) \Big]_0^T - n\omega \int_0^T f(y) \cos(n\omega y)\, dy \right) = -n\omega a_n(f), \end{aligned}$$

e utilizzando anche la periodicità di f

$$\begin{aligned} a_n(f') &= \frac{2}{T} \int_0^T f'(y) \cos(n\omega y)\, dy \\ &= \frac{2}{T} \left(\Big[f(y) \cos(n\omega y) \Big]_0^T + n\omega \int_0^T f(y) \operatorname{sen}(n\omega y)\, dy \right) = n\omega b_n(f). \end{aligned}$$

La seconda parte si fa per induzione su k. Infine, poiché per il Lemma di Riemann-Lebesgue 11.11 i coefficienti di Fourier di $f^{(k)}$ tendono a zero se $n \to \infty$, da (11.33) segue che $a_n(f), b_n(f) = o(1/n^k)$. □

Esercizio 11.20 *Dimostrare che nelle stesse ipotesi del lemma 11.19, utilizzando la base complessa si ottiene $c_n(f^{(k)}) = (in\omega)^k c_n(f)$ per $n \in \mathbb{Z}$.*

Soluzione. Basta integrare per parti e utilizzare la periodicità:

$$\begin{aligned} c_n(f') &= \frac{1}{T} \int_0^T f'(y) \mathrm{e}^{-in\omega y}\, dy \\ &= \frac{1}{T} \left(\Big[f(y) \mathrm{e}^{-in\omega y} \Big]_0^T + in\omega \int_0^T f(y) \mathrm{e}^{-in\omega y}\, dy \right) = in\omega\, c_n(f). \end{aligned}$$

Il caso generale si ottiene per induzione. □

Corollario 11.21 *Se $f \in C([0,T])$ è T-periodica e C^1 a tratti, allora le serie*

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n(f)| + |b_n(f)|, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{a_n(f)^2 + b_n(f)^2}$$

convergono.

Dimostrazione Notiamo anzitutto che essendo $a+b \leq \sqrt{2(a^2+b^2)}$ per ogni $a, b \geq 0$, la convergenza della seconda serie implica, per confronto, la convergenza della prima. Inoltre, come già osservato, essendo f' continua a tratti, appartiene a $L^2([0,T])$, quindi rimane definita la sua serie di Fourier e per (11.27) si ha (si noti che $a_0(f') = 0$, perché?)

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n(f')^2 + b_n(f')^2 = \frac{2}{T}||f'||^2_{L^2}. \tag{11.34}$$

Per (11.34), (11.35), il Lemma 11.19 e la disuguaglianza di Schwarz si ha dunque

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{a_n(f)^2 + b_n(f)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\omega} \sqrt{a_n(f')^2 + b_n(f')^2}$$

$$\leq \Big(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n\omega)^2}\Big)^{1/2} \Big(\sum_{n=1}^{\infty} a_n(f')^2 + b_n(f')^2\Big)^{1/2} = \left(\frac{1}{\omega^2} \cdot \frac{\pi^2}{6} \cdot \frac{2}{T}\right)^{1/2} ||f'||_{L^2}$$

da cui la tesi. □

Corollario 11.22 *Se $f \in C^k([0,T])$ con $f^{(h)}$ T-periodiche per $h = 0, \ldots, k$, e se $f^{(k+1)}$ è continua a tratti, allora la serie*

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^k \big(|a_n(f)| + |b_n(f)|\big)$$

converge.

Dimostrazione Per ipotesi, la funzione $f^{(k)}$ soddisfa le ipotesi del Corollario 11.21, quindi la serie di termine generale $\big|a_n(f^{(k)})\big| + \big|b_n(f^{(k)})\big|$ converge. La tesi segue allora banalmente da (11.33). □

Teorema 11.23 (di convergenza uniforme) *Se $f \in C([0,T])$ è T-periodica e C^1 a tratti, allora la serie di Fourier di f converge totalmente, quindi uniformemente e puntualmente a f in $[0,T]$. In particolare, per ogni $x \in [0,T]$ si ha*

$$f(x) = \frac{a_0(f)}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n(f) \cos\big(n\frac{2\pi}{T}x\big) + b_n(f) \operatorname{sen}\big(n\frac{2\pi}{T}x\big).$$

DIMOSTRAZIONE Per ogni $x \in [0,T]$ si ha

$$\sum_{n=1}^{\infty} \Big| a_n(f) \cos\big(n\frac{2\pi}{T}x\big) + b_n(f) \operatorname{sen}\big(n\frac{2\pi}{T}x\big) \Big| \le \sum_{n=1}^{\infty} |a_n(f)| + |b_n(f)|$$

che converge per il Corollario 11.21. Quindi la serie di Fourier associata a f converge totalmente, quindi uniformemente. Poiché f è continua, per il Corollario 11.17 la serie deve convergere a f. □

Corollario 11.24 (sulla convergenza uniforme delle serie di seni) *Se $f \in C([0,T])$ è C^1 a tratti e $f(0) = f(T) = 0$, allora la sviluppo in serie di seni di f converge totalmente, quindi uniformemente e puntualmente a f in $[0,T]$. In particolare, per ogni $x \in [0,T]$ si ha*

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \operatorname{sen}\big(n\frac{\pi}{T}x\big), \qquad \text{dove} \quad b_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(y) \operatorname{sen}\big(n\frac{\pi}{T}y\big)\, dy.$$

DIMOSTRAZIONE Poiché $f(0) = f(T) = 0$, l'estensione dispari $\tilde{f}$ di f su $[-T,T]$ è continua, $2T$-periodica e C^1 a tratti. Per il teorema precedente la sua serie di Fourier in $[-T,T]$, che è la serie di seni di f, converge totalmente e uniformemente a $\tilde{f}$. Poiché $\tilde{f}$ coincide con f in $[0,T]$ si ha la tesi. □

Si potrebbe dimostrare anche il seguente teorema:

Teorema 11.25 (di convergenza puntuale) *Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ integrabile sui compatti e T-periodica. Se per $a \in \mathbb{R}$ esistono finiti i limiti*

$$\lim_{x\to a^+} f(x) =: f(a^+), \qquad \lim_{x\to a^-} f(x) =: f(a^-),$$

e se esistono $L, \delta > 0$ tali che per ogni $0 < \theta < \delta$ si abbia

$$\left| \frac{f(a-\theta) - f(a^-)}{-\theta} \right| \le L, \quad \left| \frac{f(a+\theta) - f(a^+)}{\theta} \right| \le L,$$

allora la serie di Fourier di f calcolata in a converge alla media aritmetica dei valori $f(a^+)$, $f(a^-)$, cioè

$$S_N f(a) \to \frac{f(a^+) + f(a^-)}{2} \quad \text{se } N \to \infty.$$

In particolare, se f è continua in a allora $S_N f(a)$ converge a $f(a)$.

DIMOSTRAZIONE Omessa. □

Osservazione 11.26 Le ipotesi sono verificate se f è C^1 a tratti.

Osservazione 11.27 Una conseguenza del teorema precedente è che la convergenza di una serie di Fourier ha carattere locale: se f soddisfa le ipotesi del Teorema 11.25 e quindi $S_N f(a)$ converge alla media aritmetica dei limiti sinistro e destro di f in a, comunque si modifichi f fuori da un intorno arbitrariamente piccolo di a, il carattere di $S_N f$ non cambia, cioè continua a convergere alla media. In conclusione, sebbene i coefficienti di Fourier di f, per definizione, dipendono da tutti i valori di f in $[0, T]$, la convergenza della serie $Sf(a)$ dipende in realtà solo dal comportamento locale di f in a.

Osservazione 11.28 La classe delle funzioni f per le quali la relativa serie di Fourier converge uniformemente è in realtà più estesa della classe delle funzioni C^1 a tratti. Weierstrass, con una generalizzazione dovuta a Hardy nel 1916, ha dimostrato il seguente teorema: presi a intero positivo dispari e $b \in]0, 1[$ tali che $ab > 1 + \frac{3\pi}{2}$, allora per la serie trigonometrica

$$\sum_{k=0}^{\infty} b^k \cos(a^k x)$$

valgono le seguenti proprietà:

i) la serie converge uniformemente a una funzione f continua (verificarlo per esercizio);

ii) per ogni $x \in [-\pi, \pi]$ esiste una successione $\{h_n\}_n$ convergente a zero e tale che
$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{f(x + h_n) - f(x)}{h_n} \right| = +\infty,$$
cioè f non è derivabile in nessun(!) punto.

Ogni funzione f così trovata è un esempio di funzione continua ma non derivabile, la cui serie di Fourier (che per il Lemma 11.14 è necessariamente quella data) converge a f uniformemente. Una prima generalizzazione del Teorema di convergenza uniforme a una classe più ampia di funzioni può essere trovata in Appendice.

Alcuni esempi

1) Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tale che $f(x) = x^2$ in $[-\pi, \pi]$ ed estesa a $\mathbb{R}$ per 2π-periodicità. Osserviamo che f è continua, C^1 a tratti, quindi per il Teorema 11.23, per ogni $x \in \mathbb{R}$ si ha

$$f(x) = \frac{a_0(f)}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n(f) \cos(nx)$$

essendo $b_n(f) = 0$ per ogni n poiché f è pari. Calcoliamo i coefficienti di Fourier di f:

$$a_0(f) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x^2\,dx = \frac{1}{\pi}\Big[\frac{x^3}{3}\Big]_{-\pi}^{\pi} = \frac{2\pi^2}{3}.$$

$$\begin{aligned}
a_n(f) &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} y^2\cos(ny)\,dy = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} y^2\cos(ny)\,dy \\
&= \frac{2}{\pi}\bigg(\Big[y^2\frac{\operatorname{sen}(ny)}{n}\Big]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} 2y\frac{\operatorname{sen}(ny)}{n}\,dy\bigg) = -\frac{4}{\pi n}\int_0^{\pi} y\operatorname{sen}(ny)\,dy \\
&= -\frac{4}{\pi n}\bigg(\Big[-y\frac{\cos(ny)}{n}\Big]_0^{\pi} + \int_0^{\pi}\frac{\cos(ny)}{n}\,dy\bigg) \\
&= \frac{4}{n^2}\cos(n\pi) - \frac{4}{\pi n^3}\Big[\operatorname{sen}(ny)\Big]_0^{\pi} = \frac{4}{n^2}(-1)^n.
\end{aligned}$$

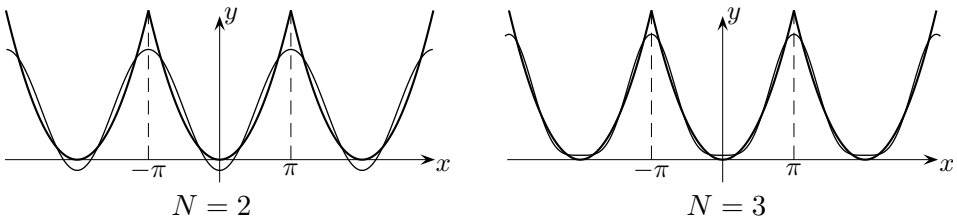


Figura 11.1: confronto tra $f(x) = x^2$ e le somme parziali di Fourier

In particolare, per $x \in [-\pi, \pi]$ si ha

$$x^2 = \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}\cos(nx).$$

Osserviamo che ponendo $x = \pi$ si ottiene

$$\pi^2 = \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}\cos(n\pi),$$

ovvero

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{1}{4}\Big(\pi^2 - \frac{\pi^2}{3}\Big) = \frac{\pi^2}{6}. \tag{11.35}$$

2) (serie di Fourier dell'onda quadra) Data la funzione $g(x) = \chi_{[0,T]}(x)$ (che vale 1 in $[0, T]$ e 0 altrove), la estendiamo prima per disparità su $[-T, T]$

e poi per $2T$-periodicità su $\mathbb{R}$. Denotiamo la funzione così ottenuta (detta *onda quadra*) ancora con g. Calcoliamo il suo sviluppo in serie di seni

$$g(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} b_n \operatorname{sen}\big(n\frac{\pi}{T}x\big)$$

dove

$$b_n = \frac{2}{T}\int_0^T g(y)\operatorname{sen}\big(n\frac{\pi}{T}y\big)\,dy = \frac{2}{T}\int_0^T \operatorname{sen}\big(n\frac{\pi}{T}y\big)\,dy$$
$$= -\frac{2}{\pi n}\Big[\cos\big(n\frac{\pi}{T}y\big)\Big]_0^T = \frac{2}{\pi n}\big(1-(-1)^n\big),$$

quindi $b_n = 0$ se n è pari, mentre $b_n = \frac{4}{\pi n}$ se n è dispari. Otteniamo dunque

$$g(x) \sim \frac{4}{\pi}\sum_{\substack{n=1\\ n \text{ dispari}}}^{\infty} \frac{1}{n}\operatorname{sen}\big(n\frac{\pi}{T}x\big).$$

Poiché g è C^1 a tratti e continua in $]0,T[$, per tutti gli $x \in]0,T[$ (che sono punti di continuità per g), per il Teorema 11.25 si ha

$$1 = g(x) = \frac{4}{\pi}\sum_{\substack{n=1\\ n \text{ dispari}}}^{\infty} \frac{1}{n}\operatorname{sen}\big(n\frac{\pi}{T}x\big),$$

in particolare, se $T = \pi$, per $x \in]0,\pi[$ si ha

$$1 = \frac{4}{\pi}\sum_{\substack{n=1\\ n \text{ dispari}}}^{\infty} \frac{1}{n}\operatorname{sen}(nx) = \frac{4}{\pi}\Big(\operatorname{sen} x + \frac{1}{3}\operatorname{sen}(3x) + \frac{1}{5}\operatorname{sen}(5x) + \dots\Big). \tag{11.36}$$

Non ci può essere convergenza uniforme perché g non è continua. Analoghe relazioni si possono ottenere in tutti i punti di continuità di g ovvero per $x \neq nT$. Nei punti di discontinuità, per esempio in $x = 0$, si ottiene invece

$$\frac{4}{\pi}\sum_{\substack{n=1\\ n \text{ dispari}}}^{\infty} \frac{1}{n}\operatorname{sen}\big(n\frac{\pi}{T}0\big) = 0 = \frac{1+(-1)}{2},$$

in accordo con il Teorema 11.25. In Figura 11.2 si osservi il confronto con alcune somme parziali N-esime.

Esercizio 11.29 *Calcolare la serie di Fourier di $f(x) = x$ in $[-\pi,\pi]$ e in $[0,2\pi]$.*

Esercizio 11.30 *Calcolare la serie di Fourier di $f(x) = |x|$ in $[-\pi,\pi]$.*

Esercizio 11.31 *Calcolare la serie di Fourier di $f(x) = x^2$ in $[0,2\pi]$.*

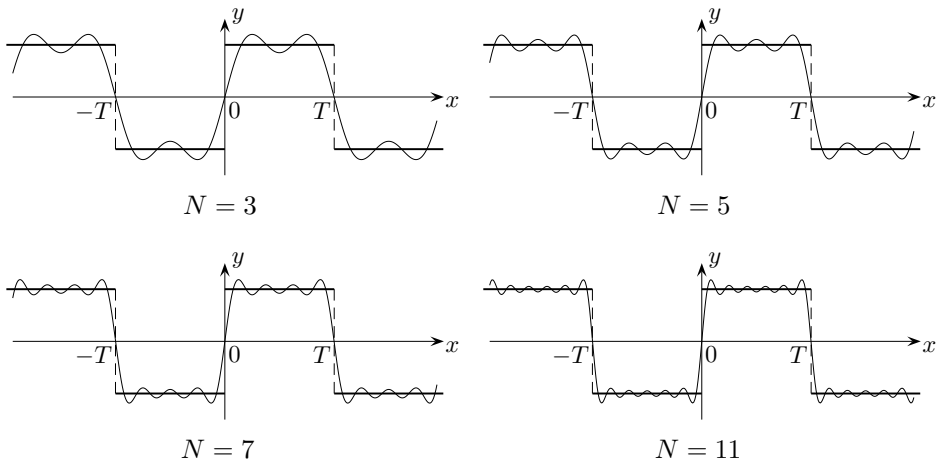


Figura 11.2: confronto tra l'onda quadra e le sue somme parziali N-esime di Fourier, con $N = 3, 5, 7, 11$

Alcune applicazioni alle PDE

Il problema misto per l'equazione omogenea del calore unidimensionale

Come primo esempio e caso particolare di (11.1) consideriamo il problema

$$
(11.37) \qquad \begin{cases} u_t - u_{xx} = 0 & (x,t) \in]0, L[\times\mathbb{R}_+ \\ u(0,t) = u(L,t) = 0 & t \in \mathbb{R}_+ \\ u(x,0) = g(x) & x \in [0,L] \quad (\text{con } g(0) = g(L) = 0), \end{cases}
$$

che modella, per esempio, l'evoluzione del calore in una barra omogenea di lunghezza L, nota la temperatura iniziale in ogni punto, e mantenendo nulla la temperatura agli estremi della barra durante tutto il processo.

Si può dimostrare che per il problema in questione esiste al più una soluzione; per trovarla utilizziamo il metodo di separazione delle variabili cercandone una del tipo $u(x,t) = v(t)w(x)$. Come osservato in (11.4) e (11.5), esiste una soluzione non banale di questo tipo se esiste $\lambda \in \mathbb{R}$ (autovalore) e una soluzione non nulla (autofunzione) del problema

$$
(11.38) \qquad \begin{cases} w''(x) + \lambda w(x) = 0 & x \in]0, L[\\ w(0) = w(L) = 0, \end{cases}
$$

e in tal caso $v(t)$ è una qualsiasi soluzione dell'equazione $v'(t) + \lambda v(t) = 0$ per questo λ. Studiamo dunque per quali λ il problema (11.38) ammette una soluzione non nulla (a proposito osserviamo che la funzione $w \equiv 0$ è sempre soluzione per qualunque scelta di λ). Distinguiamo 3 casi:

1) se $\lambda = 0$, allora la soluzione generale di $w''(x) = 0$ è data dalla funzione $w(x) = ax+b$ con $a, b \in \mathbb{R}$ costanti generiche. Imponendo le condizioni $w(0) = w(L) = 0$ si trova che $b = 0$, $aL = 0$ dunque $a = 0$. L'unica soluzione di (11.38) quando $\lambda = 0$ è dunque la funzione nulla, quindi $\lambda = 0$ non è autovalore del problema;

2) se $\lambda < 0$, allora la soluzione generale dell'equazione $w''(x)+\lambda w(x) = 0$ è data da
$$w(x) = a\,\mathrm{e}^{\sqrt{-\lambda}x} + b\,\mathrm{e}^{-\sqrt{-\lambda}x},$$
con $a, b \in \mathbb{R}$ costanti generiche. Imponendo le condizioni $w(0) = w(L) = 0$ si trova $a + b = 0$, $a\,\mathrm{e}^{\sqrt{-\lambda}L} + b\,\mathrm{e}^{-\sqrt{-\lambda}L} = 0$ la cui soluzione è $a = b = 0$. Quindi anche in questa caso l'unica soluzione è quella nulla e $\lambda < 0$ non è autovalore;

3) infine, se $\lambda > 0$ la soluzione generale dell'equazione $w''(x)+\lambda w(x) = 0$ è data da
$$w(x) = a\cos(\sqrt{\lambda}x) + b\,\mathrm{sen}(\sqrt{\lambda}x),$$
con $a, b \in \mathbb{R}$ costanti generiche. La condizione $w(0) = 0$ comporta $a = 0$, mentre la condizione $w(L) = 0$ impone $\mathrm{sen}(\sqrt{\lambda}L) = 0$. Quest'ultima implica $\sqrt{\lambda}L = n\pi$ per qualche $n \geq 1$. Si ottiene dunque che gli unici autovalori di (11.38) sono dati da
$$\lambda = \lambda_n = \Big(n\frac{\pi}{L}\Big)^2, \quad \text{con } n \geq 1,$$
con relative autofunzioni date, per esempio, da
$$w(x) = w_n(x) = \mathrm{sen}\,\big(\sqrt{\lambda_n}x\big) = \mathrm{sen}\,\big(n\frac{\pi}{L}x\big).$$

A questo punto, l'equazione $v'(t) + \lambda_n v(t) = 0$ ha come generica soluzione $v(t) = v_n \mathrm{e}^{-\lambda_n t}$ con $v_n \in \mathbb{R}$ costante arbitraria, dunque otteniamo una successione di soluzioni dell'equazione del calore
$$u_n(x,t) = v_n(t)w_n(x) = v_n \mathrm{e}^{-\frac{n^2\pi^2}{L^2}t}\,\mathrm{sen}\,\big(n\frac{\pi}{L}x\big).$$

Per il principio di sovrapposizione cerchiamo dunque una soluzione di (11.37) della forma

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} v_n \mathrm{e}^{-\frac{n^2\pi^2}{L^2}t} \operatorname{sen}\big(n\frac{\pi}{L}x\big). \tag{11.39}$$

Nel caso in cui possiamo derivare sotto il segno e la funzione è continua in $[0,L]\times[0,+\infty[$ (cosa che non abbiamo ancora verificato) allora u verifica le prime due equazioni in (11.37). Inoltre

$$u(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} v_n \operatorname{sen}\big(n\frac{\pi}{L}x\big). \tag{11.40}$$

Tale funzione dovrà essere uguale a $g(x)$. Osserviamo che (11.40) si presenta come una serie di seni in $[0,L]$, quindi, supposto che g si possa sviluppare in serie di seni, ovvero che

$$g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} g_n \operatorname{sen}\big(n\frac{\pi}{L}x\big), \qquad g_n = \frac{2}{L}\int_0^L g(y)\operatorname{sen}\big(n\frac{\pi}{L}y\big)\,dy, \tag{11.41}$$

si dovrà avere

$$u(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} v_n \operatorname{sen}\big(n\frac{\pi}{L}x\big) = \sum_{n=1}^{\infty} g_n \operatorname{sen}\big(n\frac{\pi}{L}x\big),$$

perciò $v_n = g_n$ per ogni n. La soluzione di (11.37) dovrebbe dunque essere data dalla formula

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} g_n \mathrm{e}^{-\frac{n^2\pi^2}{L^2}t} \operatorname{sen}\big(n\frac{\pi}{L}x\big), \tag{11.42}$$

con g_n definito come in (11.41). Verifichiamo che, sotto opportune ipotesi, (11.42) rappresenta effettivamente la soluzione cercata.

Facciamo inizialmente vedere che, nella sola ipotesi che le costanti v_n siano equilimitate, (11.39) è soluzione dell'equazione del calore in $]0,L[\times\mathbb{R}_+$ e verifica i dati al contorno. Più precisamente, mostriamo che per ogni fissato $t_0>0$, tutte le serie ottenute derivando termine a termine (11.39) convergono uniformemente in $[0,L]\times[t_0,+\infty[$. Si ha che

$$\frac{\partial u_n}{\partial t} = -n^2\frac{\pi^2}{L^2}v_n\mathrm{e}^{-\frac{n^2\pi^2}{L^2}t}\operatorname{sen}\big(n\frac{\pi}{L}x\big), \qquad \frac{\partial u_n}{\partial x} = n\frac{\pi}{L}v_n\mathrm{e}^{-\frac{n^2\pi^2}{L^2}t}\cos\big(n\frac{\pi}{L}x\big),$$

da cui, facilmente per induzione, segue che per ogni $h, k \in \mathbb{N}$

$$\left|\frac{\partial^{k+h}}{\partial t^k\,\partial x^h}u_n(x,t)\right| \le \left(\frac{\pi}{L}\right)^{2k+h} n^{2k+h}|v_n|\mathrm{e}^{-\frac{n^2\pi^2}{L^2}t},$$

e supposto $|v_n| \le M$ per ogni n, per ogni $t \ge t_0$ e $x \in [0, L]$ si ha

(11.43)
$$\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{\partial^{k+h}u_n}{\partial t^k\,\partial x^h}(x,t)\right| \le \left(\frac{\pi}{L}\right)^{2k+h} M\sum_{n=1}^{\infty} n^{2k+h}\mathrm{e}^{-\frac{n^2\pi^2}{L^2}t_0} =: C_{h,k}\sum_{n=1}^{\infty} n^p\mathrm{e}^{-cn^2},$$

con $p = 2k + h$, $c = \pi^2 t_0/L^2 > 0$. Osserviamo che l'ultima serie in (11.43) converge grazie, per esempio, al criterio della radice n-esima; infatti

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n^p\mathrm{e}^{-cn^2}} = \lim_{n\to\infty}(\sqrt[n]{n})^p\mathrm{e}^{-cn} = 0.$$

Quindi tutte le serie ottenute derivando termine a termine (11.39) convergono totalmente, dunque uniformemente, in $[0, L] \times [t_0, +\infty[$. Per il Teorema di derivazione A.34 applicato a ciascuna derivata parziale, (11.39) definisce una funzione $C^\infty\big([0, L] \times [t_0, +\infty[\big)$ e si può derivare termine a termine. Poiché $t_0 > 0$ è arbitrario, si ha anche $u \in C^\infty\big([0, L]\times]0, +\infty[\big)$. In particolare u è ivi continua e si ha $u(0, t) = u(L, t) = 0$ per ogni $t > 0$; inoltre

$$u_t(x,t) - u_{xx}(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\big[(u_n)_t(x,t) - (u_n)_{xx}(x,t)\big] = 0,$$

per ogni $(x, t) \in]0, L[\times]0, +\infty[$.

Osserviamo che assumendo solamente la limitatezza di v_n segue che la funzione è una soluzione di classe C^∞. Si può in effetti dimostrare che l'equazione del calore è un processo *regolarizzante*, ovvero che la soluzione del problema (11.37) (quando esiste) è necessariamente di classe C^∞ indipendentemente dalla regolarità dei dati iniziali.

Scegliamo ora, per quanto visto sopra, $v_n = g_n$ e vediamo come si comporta la soluzione (11.42) per $t = 0$. Notiamo che l'analisi precedente, nelle sole ipotesi di limitatezza della successione g_n, non permette di dimostrare la continuità di u su tutto $[0, L] \times [0, +\infty[$. Infatti se (x, t) appartiene a tale insieme, allora possiamo concludere solamente che

$$\sum_{n=1}^{\infty}\big|g_n\mathrm{e}^{-\frac{n^2\pi^2}{L^2}t}\operatorname{sen}\big(n\frac{\pi}{L}x\big)\big| \le \sum_{n=1}^{\infty}|g_n|.$$

Assumendo che tale serie converga (ciò equivale alla convergenza totale della serie di Fourier di g), allora la serie (11.42) converge totalmente e uniformemente a $u(x,t)$ in $[0,L]\times[0,+\infty[$, dunque u è ivi continua e si ha

$$u(x,0)=\sum_{n=1}^{\infty} g_n \operatorname{sen}\big(n\frac{\pi}{L}x\big).$$

Osserviamo che $u(x,0)$ coincide con $g(x)$ se la serie di seni di g converge (totalmente) a g. Per il Teorema 11.24 ciò è garantito per esempio se g è continua e C^1 a tratti (e se $g(0)=g(L)=0$, condizione che abbiamo già imposto). In conclusione, sotto tali ipotesi (11.42) è la soluzione di (11.37). Si può dimostrare che è possibile indebolire le ipotesi chiedendo che g sia solamente continua e a variazione limitata.

Osserviamo infine che, grazie alla convergenza uniforme, si può passare al limite $t\to\infty$ sotto il segno di serie ottenendo

$$\lim_{t\to\infty} u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\lim_{t\to\infty} g_n \mathrm{e}^{-\frac{n^2\pi^2}{L^2}t}\operatorname{sen}\big(n\frac{\pi}{L}x\big)=0,$$

cioè, come è intuitivo, al passare del tempo la barra si raffredda raggiungendo a regime la temperatura nulla (cioè quella fissata costante al bordo).

La corda vibrante fissata ai due estremi

Consideriamo il problema

$$\text{(11.44)}\qquad \begin{cases} u_{tt}-c^2u_{xx}=0 & (x,t)\in\,]0,L[\,\times\,]0,+\infty[\\ u(0,t)=u(L,t)=0 & t\in\,]0,+\infty[\\ u(x,0)=g(x) & x\in[0,L]\quad(\text{con } g(0)=g(L)=0),\\ u_t(x,0)=h(x) & x\in[0,L]\quad(\text{con } h(0)=h(L)=0),\end{cases}$$

che modella, per esempio, la vibrazione trasversale di una corda di lunghezza L fissata ai due estremi, note la posizione e la velocità iniziali. Generalmente la costante c verifica $c^2=T/\rho$ dove T è la tensione e ρ è la densità della corda, supposte costanti.

Si può dimostrare che il problema ammette al più una soluzione. Proviamo ad applicare il metodo di separazione delle variabili e cerchiamone una del tipo $u(x,t)=v(t)w(x)$. Essendo $u_{tt}=v''w$ e $u_{xx}=vw''$, allora u è soluzione della prima equazione in (11.44) se

$$\text{(11.45)}\qquad v''(t)w(x)-c^2v(t)w''(x)=0 \quad\Longleftrightarrow\quad \frac{1}{c^2}\frac{v''(t)}{v(t)}=\frac{w''(x)}{w(x)},$$

almeno per gli x, t per cui $v(t)$ e $w(x)$ sono non nulli. Poiché il membro sinistro è una funzione che dipende solo da t e quello destro solo da x, affinché l'uguaglianza sopra sia verificata, tali funzioni devono essere costanti. Quindi esiste $\lambda \in \mathbb{R}$ tale che

$$\frac{1}{c^2}\frac{v''(t)}{v(t)} = \frac{w''(x)}{w(x)} = -\lambda,$$

ovvero

$$\begin{cases} w''(x) + \lambda w(x) = 0 & x \in]0, L[\\ v''(t) + \lambda c^2 v(t) = 0 & t > 0. \end{cases} \tag{11.46}$$

Le condizioni al bordo si traducono, come in precedenza, in condizioni su w, ovvero $w(0) = w(L) = 0$. Otteniamo quindi il seguente problema agli autovalori

$$\begin{cases} w''(x) + \lambda w(x) = 0 & x \in]0, L[\\ w(0) = w(L) = 0, \end{cases} \tag{11.47}$$

già risolto in (11.38): esistono soluzioni non nulle di (11.47) se e solo se $\lambda = \lambda_n := \frac{n^2\pi^2}{L^2}$ per $n \geq 1$, e corrispondentemente una soluzione è data da $w_n(x) = \operatorname{sen}\big(n\frac{\pi}{L}x\big)$. Risolvendo ora la seconda equazione in (11.46) per $\lambda = \lambda_n$, cioè

$$v''(t) + \frac{n^2\pi^2}{L^2}c^2 v(t) = 0,$$

si ottiene la generica soluzione

$$v_n(t) = A_n \cos\big(n\frac{\pi}{L}ct\big) + B_n \operatorname{sen}\big(n\frac{\pi}{L}ct\big),$$

dove $A_n, B_n \in \mathbb{R}$ sono costanti arbitrarie.

Posto $u_n := v_n w_n$, per il principio di sovrapposizione cerchiamo dunque una soluzione di (11.44) della forma

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \Big(A_n \cos\big(n\frac{\pi}{L}ct\big) + B_n \operatorname{sen}\big(n\frac{\pi}{L}ct\big)\Big) \operatorname{sen}\big(n\frac{\pi}{L}x\big). \tag{11.48}$$

Nel caso in cui possiamo derivare sotto il segno e la funzione è continua in $[0, L] \times [0, +\infty[$ (cosa che non abbiamo ancora verificato) u verifica le prime due equazioni in (11.44). Inoltre

$$u(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \operatorname{sen}\big(n\frac{\pi}{L}x\big). \tag{11.49}$$

Tale funzione dovrà essere uguale a $g(x)$. Il membro destro di (11.49) si presenta come una serie di seni in $[0, L]$, quindi, supposto che g si possa sviluppare in serie di seni, ovvero che

$$g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} g_n \operatorname{sen}\big(n\frac{\pi}{L}x\big), \qquad g_n = \frac{2}{L}\int_0^L g(y)\operatorname{sen}\big(n\frac{\pi}{L}y\big)\,dy, \tag{11.50}$$

dovrà essere

$$u(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \operatorname{sen}\big(n\frac{\pi}{L}x\big) = \sum_{n=1}^{\infty} g_n \operatorname{sen}\big(n\frac{\pi}{L}x\big),$$

perciò $A_n = g_n$ per ogni $n \geq 1$. Calcolando la derivata parziale prima rispetto a t, sempre che si possa derivare termine a termine e che tale derivata sia continua, si ha

$$u_t(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} n\frac{\pi}{L}c\Big(-A_n \operatorname{sen}\big(n\frac{\pi}{L}ct\big) + B_n\cos\big(n\frac{\pi}{L}ct\big)\Big)\operatorname{sen}\big(n\frac{\pi}{L}x\big), \tag{11.51}$$

quindi

$$u_t(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} n\frac{\pi}{L}cB_n \operatorname{sen}\big(n\frac{\pi}{L}x\big).$$

Quest'ultima funzione dovrà essere uguale a $h(x)$. Supposto che h si possa sviluppare in serie di seni, ovvero che

$$h(x) = \sum_{n=1}^{\infty} h_n \operatorname{sen}\big(n\frac{\pi}{L}x\big), \qquad h_n = \frac{2}{L}\int_0^L h(y)\operatorname{sen}\big(n\frac{\pi}{L}y\big)\,dy, \tag{11.52}$$

dovrà essere

$$u_t(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} n\frac{\pi}{L}cB_n \operatorname{sen}\big(n\frac{\pi}{L}x\big) = \sum_{n=1}^{\infty} h_n \operatorname{sen}\big(n\frac{\pi}{L}x\big),$$

quindi $n\frac{\pi}{L}cB_n = h_n$ per ogni $n \geq 1$. In definitiva ci aspettiamo che la soluzione di (11.44) sia data dalla formula

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\Big(g_n\cos\big(n\frac{\pi}{L}ct\big) + \frac{L}{n\pi c}h_n \operatorname{sen}\big(n\frac{\pi}{L}ct\big)\Big)\operatorname{sen}\big(n\frac{\pi}{L}x\big), \tag{11.53}$$

dove g_n, h_n sono definite da (11.50) e (11.52). Verifichiamo che, sotto opportune ipotesi, (11.53) rappresenta effettivamente la soluzione cercata.

Osserviamo che per ogni x e t, la migliore stima uniforme per (11.48) (di cui (11.53) è un caso particolare) è data da

$$\sum_{n=1}^{\infty} \big|u_n(x,t)\big| \le \sum_{n=1}^{\infty} \big(|A_n| + |B_n|\big). \tag{11.54}$$

Contrariamente all'esempio precedente relativo all'equazione del calore e quello che vedremo in seguito relativo all'equazione di Laplace, in tale stima non è presente alcun fattore (come nei casi citati, del tipo e^{-cn} oppure r^n con $r < 1$) che garantisca la convergenza di tale serie nelle sole ipotesi di limitatezza delle successioni A_n, B_n. Un discorso analogo può essere fatto per le serie ottenute derivando termine a termine (11.48). La convergenza delle serie in (11.54) dipenderà dalla convergenza delle serie di termine generale A_n, B_n e, in ultima analisi, di quelle di termine generale g_n, h_n, cioè dai dati iniziali. In effetti l'esistenza e la regolarità delle soluzioni dell'equazione delle onde, contrariamente a quanto accade per l'equazione del calore, dipendono fortemente dalla regolarità dei dati iniziali.

Studiamo ora alcune condizioni da imporre su A_n e B_n affinché (11.48) (o meglio (11.53)) sia effettivamente una soluzione di classe C^2 del problema dato. Si ha

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u_n}{\partial t}(x,t) &= n\frac{\pi}{L}c\Big(-A_n \operatorname{sen}\big(n\frac{\pi}{L}ct\big) + B_n \cos\big(n\frac{\pi}{L}ct\big)\Big) \operatorname{sen}\big(n\frac{\pi}{L}x\big),\\
\frac{\partial u_n}{\partial x}(x,t) &= n\frac{\pi}{L}\Big(A_n \cos\big(n\frac{\pi}{L}ct\big) + B_n \operatorname{sen}\big(n\frac{\pi}{L}ct\big)\Big) \cos\big(n\frac{\pi}{L}x\big),
\end{aligned}$$

da cui, per induzione, segue che per ogni $h, k \in \mathbb{N}$

$$\left|\frac{\partial^{h+k}}{\partial t^h\,\partial x^k} u_n(x,t)\right| \le c^h\Big(\frac{\pi}{L}\Big)^{h+k} n^{h+k}\big(|A_n| + |B_n|\big).$$

Per ogni $x \in [0, L]$, $t > 0$ e ogni $h, k \in \mathbb{N}$ si ha quindi

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left|\frac{\partial^{h+k} u_n}{\partial t^h\,\partial x^k}(x,t)\right| \le c^h\Big(\frac{\pi}{L}\Big)^{h+k} \sum_{n=1}^{\infty} n^{h+k}\big(|A_n| + |B_n|\big), \tag{11.55}$$

che nel caso di (11.53) diventa

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left|\frac{\partial^{h+k} u_n}{\partial t^h\,\partial x^k}(x,t)\right| \le c_{h,k}\Big(\sum_{n=1}^{\infty} n^p|g_n| + \sum_{n=1}^{\infty} n^{p-1}|h_n|\Big), \tag{11.56}$$

per un'opportuna costante $c_{h,k}$, avendo posto $p = h + k$. Siamo in effetti interessati solamente alle derivate fino al secondo ordine compreso, ovvero

ai $p = h + k \leq 2$. Quindi, la convergenza totale (e uniforme) della serie (11.53) insieme a quella delle serie ottenute derivandola termine a termine fino all'ordine 2, è garantita dalla convergenza delle serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^p |g_n|, \quad p = 0, 1, 2, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} n^q |h_n|, \quad q = -1, 0, 1. \tag{11.57}$$

Chiaramente la convergenza della prima per $p = 2$ e della seconda per $q = 1$ garantisce, per confronto, la convergenza delle serie per gli altri valori di p e di q. Per provare le convergenze per $p = 2$ e $q = 1$, vogliamo applicare il Corollario 11.22 alle estensioni dispari $\tilde{g}$ e $\tilde{h}$ di g e h in $[-L, L]$ delle quali (11.50) e (11.52) sono le rispettive serie di Fourier in $[-L, L]$. Per poter applicare tale corollario a $\tilde{g}$ bisogna che $\tilde{g}$ sia di classe C^2 con $\tilde{g}$, $\tilde{g}'$, $\tilde{g}''$ $2L$-periodiche e che $\tilde{g}'''$ sia continua a tratti. Osserviamo che se g è di classe C^2 con $g(0) = g(L) = 0$, automaticamente la sua estensione dispari è di classe C^1 con derivata prima periodica, ma non è detto che sia di classe C^2. Ciò accade se e solo se $g''(0) = g''(L) = 0$. Supponiamo quindi che g sia di classe C^2 con derivata terza continua a tratti e $g(0) = g(L) = g''(0) = g''(L) = 0$. Analogamente chiediamo che h sia di classe C^1 con derivata seconda continua a tratti e $h(0) = h(L)$. Allora si può applicare il Corollario 11.22, ottenendo la convergenza di tutte le serie in (11.57). Per (11.56) la serie in (11.53) converge totalmente e uniformemente insieme a tutte le derivate fino all'ordine 2 alla funzione u di classe $C^2\big([0, L] \times [0, +\infty[\big)$. Inoltre si può derivare termine a termine. Quindi tutta l'analisi precedente è ben giustificata e u verifica le prime due equazioni di (11.44). Inoltre, per le ipotesi fatte su g e h, si può applicare il Corollario 11.24 che garantisce la convergenza delle rispettive serie di seni verso g e h. In conclusione

$$u(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} g_n \operatorname{sen}\big(n\frac{\pi}{L}x\big) = g(x), \qquad u_t(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} h_n \operatorname{sen}\big(n\frac{\pi}{L}x\big) = h(x),$$

dunque (11.53) è soluzione del problema (11.44).

Il problema di Dirichlet per l'equazione di Laplace sulla palla 2-dimensionale

Consideriamo il *problema di Dirichlet per l'equazione di Laplace*

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{in } B_R \\ \quad u = g & \text{in } \partial B_R, \end{cases} \tag{11.58}$$

dove prenderemo in particolare $B_R = B^2(0,R)$, palla 2-dimensionale. Cerchiamo una formula rappresentativa per la soluzione utilizzando il metodo di separazione delle variabili. Data la simmetria del problema, conviene utilizzare le coordinate polari: $x = (x_1, x_2) = (\rho\cos\theta, \rho\operatorname{sen}\theta)$. Posto $\tilde{u}(\rho,\theta) := u(\rho\cos\theta, \rho\operatorname{sen}\theta)$, l'equazione soddisfatta da $\tilde{u}$, ovvero l'*equazione di Laplace in coordinate polari*, risulta essere

$$\tilde{u}_{\rho\rho} + \frac{1}{\rho}\tilde{u}_\rho + \frac{1}{\rho^2}\tilde{u}_{\theta\theta} = 0. \tag{11.59}$$

Infatti

$$\begin{aligned}
\tilde{u}_\rho = u_{x_1}\cos\theta + u_{x_2}\operatorname{sen}\theta, \qquad \tilde{u}_\theta &= u_{x_1}(-\rho\operatorname{sen}\theta) + u_{x_2}\rho\cos\theta,\\
\tilde{u}_{\rho\rho} &= u_{x_1x_1}\cos^2\theta + 2u_{x_1x_2}\operatorname{sen}\theta\cos\theta + u_{x_2x_2}\operatorname{sen}^2\theta,\\
\tilde{u}_{\theta\theta} = u_{x_1x_1}\rho^2\operatorname{sen}^2\theta - 2u_{x_1x_2}\rho^2\operatorname{sen}\theta\cos\theta &+ u_{x_2x_2}\rho^2\cos^2\theta -\\
&- u_{x_1}\rho\cos\theta - u_{x_2}\rho\operatorname{sen}\theta,
\end{aligned}$$

quindi

$$\tilde{u}_{\rho\rho} + \frac{1}{\rho}\tilde{u}_\rho + \frac{1}{\rho^2}\tilde{u}_{\theta\theta} = (u_{x_1x_1} + u_{x_2x_2})(\operatorname{sen}^2\theta + \cos^2\theta) = \Delta u = 0.$$

La condizione al bordo diventa $\tilde{u}(R,\theta) = \tilde{g}(\theta) := g(R\cos\theta, R\operatorname{sen}\theta)$. Per semplicità, nel seguito scriveremo u e g al posto di $\tilde{u}$ e $\tilde{g}$.

In definitiva, in coordinate polari (11.58) si scrive

$$\begin{cases} u_{\rho\rho} + \dfrac{1}{\rho}u_\rho + \dfrac{1}{\rho^2}u_{\theta\theta} = 0 & \text{in }]0,R[\times[0,2\pi] \\ u = g & \text{in } \{R\}\times[0,2\pi], \end{cases} \tag{11.60}$$

dove $u(\rho,\cdot)$ e g sono 2π-periodiche.

Volendo utilizzare il metodo di separazione delle variabili, cerchiamo una soluzione del tipo $u(\rho,\theta) = v(\rho)z(\theta)$. Essendo $u_\rho = v'z$, $u_{\rho\rho} = v''z$ e $u_{\theta\theta} = vz''$, se u verifica (11.60) allora deve accadere che

$$v''(\rho)z(\theta) + \frac{1}{\rho}v'(\rho)z(\theta) + \frac{1}{\rho^2}v(\rho)z''(\theta) = 0,$$

che equivale a

$$\rho^2\frac{v''(\rho)}{v(\rho)} + \rho\frac{v'(\rho)}{v(\rho)} = -\frac{z''(\theta)}{z(\theta)},$$

almeno per i ρ,θ per cui $z(\theta)$ e $v(\rho)$ sono non nulli. Poiché il membro sinistro è una funzione che dipende solo da ρ e quello destro solo da θ, affinché

l'uguaglianza sopra sia verificata tali funzioni devono essere costanti. Quindi esiste $\lambda \in \mathbb{R}$ tale che

$$\rho^2 \frac{v''(\rho)}{v(\rho)} + \rho \frac{v'(\rho)}{v(\rho)} = -\frac{z''(\theta)}{z(\theta)} = \lambda,$$

ovvero

$$\begin{cases} z''(\theta) + \lambda z(\theta) = 0 \\ \rho^2 v''(\rho) + \rho v(\rho) - \lambda v(\rho) = 0. \end{cases} \tag{11.61}$$

Poiché $u(\rho, \cdot)$ deve essere 2π-periodica anche z deve esserlo, per cui z dovrà essere soluzione (non nulla) del problema

$$\begin{cases} z''(\theta) + \lambda z(\theta) = 0 \\ z(\theta) = z(\theta + 2\pi). \end{cases} \tag{11.62}$$

Analogamente all'analisi svolta per (11.38), se $\lambda < 0$ tale problema ammette solo la soluzione identicamente nulla. Se $\lambda > 0$, la generica soluzione della prima equazione in (11.62) è data da

$$z(\theta) = A\cos(\sqrt{\lambda}\theta) + B\,\mathrm{sen}(\sqrt{\lambda}\theta),$$

con $A, B \in \mathbb{R}$ costanti arbitrarie. Affinché tale soluzione sia 2π-periodica dovrà essere necessariamente $\sqrt{\lambda} = n$ ovvero $\lambda = \lambda_n := n^2$ e in corrispondenza avremo la generica soluzione

$$z_n(\theta) = A_n \cos(n\theta) + B_n\,\mathrm{sen}(n\theta), \tag{11.63}$$

per ogni $n \geq 1$, dove A_n, B_n sono costanti arbitrarie. Infatti la 2π-periodicità equivale a $z(\theta + 2\pi) = z(\theta)$ per ogni $\theta \in \mathbb{R}$, cioè

$$A\cos(\sqrt{\lambda}(\theta + 2\pi)) + B\,\mathrm{sen}(\sqrt{\lambda}(\theta + 2\pi)) = A\cos(\sqrt{\lambda}\theta) + B\,\mathrm{sen}(\sqrt{\lambda}\theta),$$

che, utilizzando le formule di addizione del seno e del coseno, equivale a

$$\begin{aligned} &\big(A\cos(2\pi\sqrt{\lambda}) + B\,\mathrm{sen}(2\pi\sqrt{\lambda}) - A\big)\cos(\sqrt{\lambda}\theta) + \\ &\qquad + \big(B\cos(2\pi\sqrt{\lambda}) - A\,\mathrm{sen}(2\pi\sqrt{\lambda}) - B\big)\,\mathrm{sen}(\sqrt{\lambda}\theta) = 0, \end{aligned}$$

la quale è vera per ogni θ se e solo se $A\cos(2\pi\sqrt{\lambda}) + B\,\mathrm{sen}(2\pi\sqrt{\lambda}) - A = 0$ e $B\cos(2\pi\sqrt{\lambda}) - A\,\mathrm{sen}(2\pi\sqrt{\lambda}) - B = 0$. Ciò implica che $\cos(2\pi\sqrt{\lambda}) = 1$ e $\mathrm{sen}(2\pi\sqrt{\lambda}) = 0$, ovvero se e solo se $\sqrt{\lambda} = n$ per qualche $n \geq 1$.

Infine, se $\lambda = 0$ la generica soluzione della prima equazione in (11.62) è data da $z(\theta) = A + B\theta$ e la 2π-periodicità implica $B = 0$. In definitiva (11.63) vale per ogni $n \in \mathbb{N}$.

Per $\lambda = n^2$ la seconda equazione in (11.61) diventa

$$\rho^2 v''(\rho) + \rho v(\rho) - n^2 v(\rho) = 0, \tag{11.64}$$

che è un'equazione di Eulero (si veda (8.31)). Per risolverla, poniamo $\rho = \mathrm{e}^s$ e definiamo $k(s) = v(\mathrm{e}^s)$. Si ha $k' = \mathrm{e}^s v'$, $k'' = \mathrm{e}^{2s} v'' + \mathrm{e}^s v' = \rho^2 v'' + \rho v$, quindi l'equazione soddisfatta da k è

$$k''(s) - n^2 k(s) = 0.$$

La generica soluzione, per $n \geq 1$ è data da $k_n(s) = C\mathrm{e}^{ns} + D\mathrm{e}^{-ns}$, mentre per $n = 0$ è data da $k_0(s) = C + Ds$, ed essendo $v(\rho) = k(\ln \rho)$ si ottengono

$$v_n(\rho) = C_n \rho^n + D_n \rho^{-n} \quad (n \geq 1), \qquad v_0(\rho) = C_0 + D_0 \ln \rho \quad (n = 0).$$

Poiché $v_n(\rho)$ deve essere una funzione continua in $[0, R]$, segue che $D_n = 0$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Si ottengono dunque le soluzioni

$$v_n(\rho) = C_n \rho^n \quad (n \in \mathbb{N}),$$

e in definitiva, inglobando la costante C_n dentro A_n, B_n, si ha

$$u_n(\rho, \theta) = v_n(\rho) z_n(\theta) = \rho^n \big(A_n \cos(n\theta) + B_n \operatorname{sen}(n\theta)\big). \tag{11.65}$$

Per sovrapposizione cerchiamo dunque una soluzione di (11.58) della forma

$$u(\rho, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(\rho, \theta) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \rho^n \big(A_n \cos(n\theta) + B_n \operatorname{sen}(n\theta)\big). \tag{11.66}$$

Nel caso in cui possiamo derivare sotto il segno e la funzione è continua in $[0, R] \times [0, 2\pi]$ (cosa che non abbiamo ancora verificato) allora u verifica la prima equazione in (11.60). Inoltre

$$u(R, \theta) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} R^n \big(A_n \cos(n\theta) + B_n \operatorname{sen}(n\theta)\big). \tag{11.67}$$

Tale funzione dovrà essere uguale a $g(\theta)$. Osserviamo che (11.67) è una serie trigonometrica in $[0, 2\pi]$, quindi supposto che g si possa sviluppare in serie di Fourier, ovvero che

$$g(\theta) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\theta) + b_n \operatorname{sen}(n\theta), \tag{11.68}$$

con

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} g(\varphi)\cos(n\varphi)\,d\varphi, \qquad b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} g(\varphi)\operatorname{sen}(n\varphi)\,d\varphi, \tag{11.69}$$

affinché sia $u(R,\theta) = g(\theta)$ si dovrà avere

$$A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} R^n\big(A_n\cos(n\theta) + B_n\operatorname{sen}(n\theta)\big) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n\cos(n\theta) + b_n\operatorname{sen}(n\theta),$$

da cui seguono $A_0 = a_0/2$, $R^nA_n = a_n$, $R^nB_n = b_n$. La soluzione di (11.60) dovrebbe dunque essere data dalla formula

$$u(\rho,\theta) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\Big(\frac{\rho}{R}\Big)^n\big(a_n\cos(n\theta) + b_n\operatorname{sen}(n\theta)\big). \tag{11.70}$$

Verifichiamo che, sotto opportune ipotesi, (11.70) rappresenta effettivamente la soluzione cercata.

Mostriamo inizialmente che, nella sola ipotesi che le costanti a_n, b_n siano equilimitate, (11.70) è soluzione di (11.58) in $]0,R[\times[0,2\pi]$. Più precisamente, mostriamo che per ogni fissato $\rho_0 < R$, tutte le serie ottenute derivando termine a termine (11.70) convergono totalmente e uniformemente in $[0,\rho_0]\times[0,2\pi]$. Si ha

$$\begin{aligned}\frac{\partial u_n}{\partial\rho}(\rho,\theta) &= \frac{n}{R}\Big(\frac{\rho}{R}\Big)^{n-1}\big(a_n\cos(n\theta) + b_n\operatorname{sen}(n\theta)\big),\\ \frac{\partial u_n}{\partial\theta}(\rho,\theta) &= \Big(\frac{\rho}{R}\Big)^{n}\big(-na_n\operatorname{sen}(n\theta) + nb_n\cos(n\theta)\big),\end{aligned}$$

da cui, per induzione, segue che per ogni $h,k\in\mathbb{N}$, se $n\ge h$

$$\left|\frac{\partial^{h+k}}{\partial\rho^h\,\partial\theta^k}u_n(\rho,\theta)\right| \le \frac{n^{h+k}}{R^h}\Big(\frac{\rho}{R}\Big)^{n-h}\big(|a_n| + |b_n|\big),$$

mentre per $n<h$ tale derivata è identicamente nulla. Supposto quindi che $|a_n|$, $|b_n|\le M$ per ogni n, per ogni $\theta\in[0,2\pi]$ e ogni $\rho\in[0,\rho_0]$ si ha

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{\partial^{h+k}u_n}{\partial\rho^h\,\partial\theta^k}(\rho,\theta)\right| \le \frac{2M}{R^h}\sum_{n=h}^{\infty} n^{h+k}\Big(\frac{\rho_0}{R}\Big)^{n-h} =: \frac{2M}{R^h}\sum_{n=h}^{\infty} n^p r^{n-h}, \tag{11.71}$$

con $p = k+h$, $r = \rho_0/R < 1$. L'ultima serie in (11.71) converge grazie, per esempio, al criterio della radice n-esima; infatti

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n^p r^{n-h}} = \lim_{n\to\infty}(\sqrt[n]{n})^p r^{1-h/n} = r < 1.$$

Quindi tutte le serie ottenute derivando termine a termine (11.70) convergono totalmente, quindi uniformemente in $[0,\rho_0]\times[0,2\pi]$. Per il Teorema A.34 di derivazione delle serie, (11.70) definisce una funzione $C^\infty\big([0,\rho_0]\times[0,2\pi]\big)$ e si può derivare termine a termine. Poiché $\rho_0>0$ è arbitrario, si ha anche $u\in C^\infty\big([0,R[\times[0,2\pi]\big)$. In particolare, se $(\rho,\theta)\in]0,R[\times[0,2\pi]$

$$\big(u_{\rho\rho}+\frac{1}{\rho}u_\rho+\frac{1}{\rho^2}u_{\theta\theta}\big)(\rho,\theta)=\sum_{n=1}^\infty\big((u_n)_{\rho\rho}+\frac{1}{\rho}(u_n)_\rho+\frac{1}{\rho^2}(u_n)_{\theta\theta}\big)(\rho,\theta)=0.$$

In effetti, quando $\rho=0$ le coordinate polari non sono ben definite e la prima equazione in (11.60) perde significato. Si potrebbe però dimostrare, tornando alle coordinate cartesiane, che (11.70) è soluzione dell'equazione di Laplace anche in $x=0$.

Osserviamo inoltre che assumendo solamente la limitatezza di a_n,b_n segue che (11.70) è una soluzione di classe C^∞. In effetti si potrebbe dimostrare che la soluzione del problema (11.58) (quando esiste) è necessariamente di classe C^∞ indipendentemente dalla regolarità dei dati iniziali.

Per quanto visto sopra, scegliamo ora a_n, b_n uguali ai coefficienti di Fourier di g. Se g è continua, tali coefficienti sono uniformemente limitati e l'analisi sopra è dunque giustificata. Inoltre, se $(\rho,\theta)\in[0,R]\times[0,2\pi]$ si ha

$$\sum_{n=1}^\infty\Big|\Big(\frac{\rho}{R}\Big)^n\big(a_n\cos(n\theta)+b_n\operatorname{sen}(n\theta)\big)\Big|\le\sum_{n=1}^\infty|a_n|+|b_n|.$$

Assumendo che tale serie converga (ciò equivale alla convergenza totale della serie di Fourier di g), allora la serie (11.70) converge totalmente e uniformemente a $u(\rho,\theta)$ in $[0,R]\times[0,2\pi]$, dunque u è ivi continua e si ha

$$u(R,\theta)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^\infty\big(a_n\cos(n\theta)+b_n\operatorname{sen}(n\theta)\big).$$

Si ha che $u(R,\theta)$ coincide con $g(\theta)$ se la serie di Fourier di g converge totalmente a g. Per il Teorema 11.23 ciò è garantito, per esempio, se g è continua e C^1 a tratti. In conclusione, sotto tali ipotesi (11.70) è la soluzione di (11.60).

Vogliamo ora trovare una formula alternativa per la soluzione (11.70). Poiché per ogni $\rho<R$ la serie in (11.70) converge uniformemente, si possono scambiare i simboli di serie e di integrale. Posto $r=\rho/R<1$, per (11.69)

si ha allora che

$$
\begin{aligned}
u(\rho,\theta) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \Big(\frac{\rho}{R}\Big)^n \big(a_n \cos(n\theta) + b_n \operatorname{sen}(n\theta)\big) \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} g(\varphi)\,d\varphi + \sum_{n=1}^{\infty} r^n \bigg(\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} g(\varphi)\cos(n\varphi)\,d\varphi\,\cos(n\theta) + \\
&\qquad\qquad + \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} g(\varphi)\operatorname{sen}(n\varphi)\,d\varphi\,\operatorname{sen}(n\theta)\bigg) \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} g(\varphi)\Big(1 + 2\sum_{n=1}^{\infty} r^n\big(\cos(n\varphi)\cos(n\theta) + \operatorname{sen}(n\varphi)\operatorname{sen}(n\theta)\big)\Big)\,d\varphi \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} g(\varphi)\Big(1 + 2\sum_{n=1}^{\infty} r^n \cos\big(n(\varphi-\theta)\big)\Big)\,d\varphi.
\end{aligned}
$$

Ricordando che $2\cos y = \mathrm{e}^{iy} + \mathrm{e}^{-iy}$ e che per $|z| < 1$ la serie geometrica di ragione z converge, avendosi

$$
\sum_{n=0}^{\infty} z^n = \frac{1}{1-z}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} z^n = \frac{z}{1-z},
$$

allora si ha

(11.72)

$$
\begin{aligned}
1+2\sum_{n=1}^{\infty} r^n \cos\big(n(\varphi-\theta)\big) &= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} r^n\big(\mathrm{e}^{in(\varphi-\theta)} + \mathrm{e}^{-in(\varphi-\theta)}\big) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty}\big(r\mathrm{e}^{i(\varphi-\theta)}\big)^n + \sum_{n=0}^{\infty}\big(r\mathrm{e}^{-i(\varphi-\theta)}\big)^n = \frac{r\mathrm{e}^{i(\varphi-\theta)}}{1-r\mathrm{e}^{i(\varphi-\theta)}} + \frac{1}{1-r\mathrm{e}^{-i(\varphi-\theta)}} \\
&= \frac{1-(\rho/R)^2}{1-(\rho/R)\big(\mathrm{e}^{i(\varphi-\theta)} + \mathrm{e}^{-i(\varphi-\theta)}\big) + (\rho/R)^2} = \frac{R^2-\rho^2}{R^2 - 2R\rho\cos(\varphi-\theta) + \rho^2}.
\end{aligned}
$$

In definitiva si ottiene

$$
u(\rho,\theta) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} g(\varphi)\frac{R^2-\rho^2}{R^2 - 2R\rho\cos(\varphi-\theta) + \rho^2}\,d\varphi. \tag{11.73}
$$

La funzione (11.72) viene detta *nucleo di Poisson per la palla* B_R.

Il metodo di Fourier

Quando l'equazione in considerazione non è omogenea, il metodo di separazione delle variabili non è generalmente applicabile, proprio perché non è possibile separare le variabili.

In questo caso può essere utile un'estensione del metodo stesso, che consiste nel cercare fin dal principio una soluzione che sia sviluppabile in serie di Fourier rispetto a una delle variabili. I relativi coefficienti di Fourier saranno soluzioni di opportune equazioni differenziali ordinarie, risolte le quali si otterrà una formula di rappresentazione per l'eventuale soluzione.

Come sempre, inizialmente si procede in maniera formale e si cerca di giustificare il procedimento a posteriori. Per illustrare il metodo introduciamo il seguente esempio.

Il problema misto per l'equazione del calore unidimensionale non omogenea

Consideriamo il problema, con dati nulli al bordo,

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} = f(x,t) & (x,t) \in]0,L[\times\mathbb{R}_+ \\ u(0,t) = u(L,t) = 0 & t \in \mathbb{R}_+ \\ u(x,0) = 0 & x \in [0,L], \end{cases} \tag{11.74}$$

dove $f : [0,L] \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$. Per facilità di notazione scegliamo anche $L = \pi$.

Supponiamo che la soluzione possa essere sviluppata in serie di seni in $[0,\pi]$ rispetto alla variabile x. Si avrà allora

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(t)\,\mathrm{sen}(nx), \quad \text{dove } u_n(t) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} u(y,t)\,\mathrm{sen}(ny)\,dy. \tag{11.75}$$

Moltiplicando la prima equazione in (11.74) per $\mathrm{sen}(nx)$ e integrando si ottiene che

$$\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} (u_t(y,t) - u_{xx}(y,t))\,\mathrm{sen}(ny)\,dy = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(y,t)\,\mathrm{sen}(ny)\,dy. \tag{11.76}$$

Potendo derivare sotto il segno si ha

$$\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} u_t(y,t)\,\mathrm{sen}(ny)\,dy = \frac{\partial}{\partial t}\Big(\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} u(y,t)\,\mathrm{sen}(ny)\,dy\Big) = u_n'(t). \tag{11.77}$$

Integrando per parti 2 volte e utilizzando le condizioni al bordo otteniamo

(11.78)
$$\begin{aligned}
&\frac{2}{\pi}\int_0^\pi u_{xx}(y,t)\,\mathrm{sen}(ny)\,dy \\
&\qquad = \frac{2}{\pi}\Big(\Big[u_x(y,t)\,\mathrm{sen}(ny)\Big]_0^\pi - n\int_0^\pi u_x(y,t)\cos(ny)\,dy\Big) \\
&\qquad = -\frac{2n}{\pi}\int_0^\pi u_x(y,t)\cos(ny)\,dy \\
&\qquad = -\frac{2n}{\pi}\Big(\Big[u(y,t)\cos(ny)\Big]_0^\pi + n\int_0^\pi u(y,t)\,\mathrm{sen}(ny)\,dy\Big) = -n^2u_n(t).
\end{aligned}$$

Posto infine
$$f_n(t) := \frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(y,t)\,\mathrm{sen}(ny)\,dy,$$
per (11.76)-(11.78) la funzione u_n deve essere soluzione dell'equazione differenziale ordinaria

$$u_n'(t) + n^2u_n(t) = f_n(t), \tag{11.79}$$

la cui generica soluzione è

$$u_n(t) = \mathrm{e}^{-n^2t}\Big(u_n(0) + \int_0^t \mathrm{e}^{n^2s}f_n(s)\,ds\Big), \tag{11.80}$$

dove $u_n(0) = 0$ per la condizione iniziale $u(x,0) = 0$. Otteniamo infine la soluzione *formale*

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^\infty \Big(\int_0^t \mathrm{e}^{n^2(s-t)}f_n(s)\,ds\Big)\,\mathrm{sen}(nx). \tag{11.81}$$

A questo punto bisognerebbe studiare quali condizioni su f garantiscono che (11.81) sia effettivamente soluzione di (11.74). Fissato $T > 0$, per ogni $t \in [0,T]$ e $x \in [0,\pi]$ si ha

$$\big|u_n(t)\,\mathrm{sen}(nx)\big| \le \big|u_n(t)\big| \le ||f_n||_\infty \mathrm{e}^{-n^2t}\Big[\frac{1}{n^2}\mathrm{e}^{n^2s}\Big]_0^t \le \frac{1}{n^2}||f_n||_\infty,$$

e per (11.80) e (11.79)

$$\Big|\frac{\partial}{\partial t}\big(u_n(t)\,\mathrm{sen}(nx)\big)\Big| = \big|u_n'(t)\,\mathrm{sen}(nx)\big| \le n^2\big|u_n(t)\big| + \big|f_n(t)\big| \le 2||f_n||_\infty,$$

e inoltre

$$\Big|\frac{\partial^2}{\partial x^2}\big(u_n(t)\,\mathrm{sen}(nx)\big)\Big| = \big|-n^2 u_n(t)\,\mathrm{sen}(nx)\big| \le n^2\big|u_n(t)\big| \le ||f_n||_\infty.$$

Quindi la serie in (11.81) e le serie ottenute derivandola termine a termine una volta rispetto a t o due volte rispetto a x sono uniformemente maggiorate in $[0,\pi]\times[0,T]$ dalla serie di termine generale $||f_n||_\infty$. Se quest'ultima converge, allora tali serie convergono assolutamente e uniformemente, quindi u è soluzione del problema dato. A tal fine basta richiedere che f sia continua, $f(0,t) = f(\pi,t)$=0 per $t > 0$, e f_x continua. Infatti, dimostrare per esercizio che vale la seguente estensione del Corollario 11.21 e del Teorema 11.23: se $f = f(x,t) \in C([0,L]\times[0,T])$, è L-periodica rispetto alla variabile x, e $f_x \in C([0,L]\times[0,T])$ allora la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sup_{t\in[0,T]} \big|a_n(f(\cdot,t))\big| + \sup_{t\in[0,T]} \big|b_n(f(\cdot,t))\big|$$

converge, e per ogni $t \in [0,T]$ la serie di Fourier di $f(\cdot,t)$ converge totalmente e uniformemente a $f(\cdot,t)$ (tale convergenza è anche uniforme rispetto a t). Inoltre un risultato analogo vale per le serie di seni. Dedurre da ciò la convergenza della serie di termine generale $||f_n||_\infty$.

Capitolo 12

Esercizi di approfondimento

In questo ultimo capitolo vengono affrontati esercizi di carattere anche avanzato, la cui analisi e la cui soluzione presuppongono una buona padronanza degli argomenti e delle tecniche dell'Analisi matematica svolte nei prime due anni di corso, dunque sono particolarmente rivolti agli studenti del Corso di Laurea in Matematica. Più precisamente verranno affrontate, magari richiamando equazioni o sistemi già parzialmente studiati nei capitoli precedenti, alcune problematiche più avanzate nell'ambito dell'analisi qualitativa delle soluzioni, quali il comportamento asintotico, l'esistenza di soluzioni periodiche e la stima/calcolo del loro periodo di oscillazione Si suggerisce di leggere attentamente le soluzioni degli esercizi, all'interno delle quali è possibile trovare molti suggerimenti, spunti e tecniche per una comprensione sempre più profonda delle equazioni differenziali ordinarie.

Analisi qualitativa

Analisi qualitativa delle soluzioni dell'equazione (7.17)

Riprendiamo in considerazione l'equazione (7.17) già studiata nell'Esempio 7.12 e, con metodi diversi, nell'Esempio 8.2:

$$y' = \frac{t^2 - y^2}{2ty}.$$

Grazie all'analisi svolta nell'Esempio 7.12 si è potuto trovare l'integrale generale dell'equazione; le soluzioni sono dunque note e l'andamento globale delle traiettorie è delineato in Figura 7.10. In questo approfondimento vogliamo mostrare come, mediante un mero studio qualitativo dell'equazione,

è possibile riottenere il medesimo quadro globale *senza* calcolare esplicitamente le soluzioni. Confronteremo infine i risultati trovati con quelli ottenuti nell'Esempio 7.12. Dimentichiamoci dunque dell'Esempio 7.12 e supponiamo di non essere riusciti a trovare la soluzione esplicita dell'equazione. Quali informazioni si riescono comunque a recuperare con uno studio qualitativo dell'equazione?

Anzitutto il campo vettoriale $f(t, y)$ è di classe C^∞ su $\mathbb{R}^2$ al di fuori degli assi, dunque ci sono esistenza e unicità dei problemi di Cauchy associati e le soluzioni sono di classe C^∞ ove definite. Si osservi che se $y(t)$ è soluzione anche $z(t) = -y(t)$ e $w(t) = y(-t)$, dunque anche $k(t) = -y(-t)$, sono ancora soluzioni. Infatti, detto $f(t, y)$ il campo vettoriale si ha

$$z'(t) = -y'(t) = -\frac{t^2 - y^2(t)}{2ty(t)} = \frac{t^2 - (-y(t))^2}{2t(-y(t))} = f(t, z(t)),$$
$$w'(t) = -y'(-t) = -\frac{(-t)^2 - y^2(-t)}{2(-t)y(-t)} = \frac{t^2 - y^2(-t)}{2ty(-t)} = f(t, w(t)).$$

È dunque sufficiente studiare le soluzioni dei problemi di Cauchy con dati iniziali $y(t_0) = y_0$ con $t_0, y_0 > 0$; tali soluzioni saranno definite al più in $]0, +\infty[$ e si avrà anche $y(t) > 0$ per ogni t. Le soluzioni negli altri tre quadranti si otterranno per simmetria. Restringiamoci dunque a $t, y > 0$ ovvero pensiamo $f : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$.

Individuiamo ora le regioni del primo quadrante dove le soluzioni sono crescenti/decrescenti: basta studiare il segno del campo vettoriale. Si ha $f(t, y) > 0$ se e solo se $y < t$; in questa regione le soluzioni sono crescenti. Se invece $y > t$ le soluzioni sono decrescenti. Sui punti della retta $y = t$ le soluzioni hanno derivata nulla e di conseguenza un minimo assoluto. Dimostriamo ora che se $y(t_0) \leq t_0$ allora la soluzione verifica $y(t) < t$ per ogni $t > t_0$, dunque è ivi crescente. Infatti, la funzione $u(t) = t$ è soprasoluzione in futuro (e sottosoluzione in passato, essendo $u'(t) = 1 > 0 = f(t, u(t))$ per ogni t. Per il Teorema del confronto, se $y(t_0) \leq t_0$ per qualche t_0 allora la relativa soluzione massimale $y(t)$ verifica $y(t) < t$ per ogni $t > t_0$. Detto $]\alpha, \beta[$ il relativo intervallo massimale di esistenza, si avrà dunque $y(t_0) < y(t) < t$ per ogni $t \in]t_0, \beta[$ con $y(t)$ ivi crescente.

Studiamo il comportamento della soluzione in un intorno di β. Per monotonia esiste $y_\infty := \lim_{t\to\beta^-} y(t)$ con $y_\infty \in]y_0, +\infty]$. Se $y(t)$ non fosse globalmente definita in futuro, cioè $\beta < +\infty$, per il Teorema della fuga dai compatti dovrebbe essere $y_\infty \in \partial\mathbb{R}^+$ cioè $y_\infty = 0$ oppure $y_\infty = +\infty$ (si veda la Figura 12.1). Non potendo essere, per monotonia, $y_\infty = 0$ dovrà valere $y_\infty = +\infty$, ma allora, passando al limite per $t \to \beta^-$ nella disuguaglianza

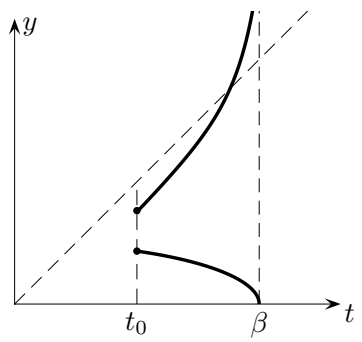


Figura 12.1: Possibili comportamenti della soluzione in futuro, come inizialmente previsto dalla fuga dai compatti, nel caso $\beta < +\infty$

$y(t) < t$, si troverebbe $+\infty \leq \beta$, assurdo. Di conseguenza $\beta = +\infty$, cioè $y(t)$ è globalmente definita in futuro. Si osservi che pur essendo $|y(t)| \leq t$ per $t \geq t_0$ non si poteva utilizzare il Teorema 4.5 perché f non è (e non può essere) definita in una striscia $J \times \mathbb{R}$. Per quanto riguarda il valore del limite, se fosse $y_\infty \in \mathbb{R}$ e dunque $y_\infty > y_0 > 0$, si avrebbe

$$\lim_{t\to+\infty} y'(t) = \lim_{t\to+\infty} \left(\frac{t}{2y(t)} - \frac{y(t)}{2t}\right) = +\infty,$$

contro il criterio dell'asintoto. Dovrà quindi essere $\lim_{t\to+\infty} y(t) = +\infty$ per ogni soluzione massimale con $y_0 < t_0$. Il comportamento in futuro delle soluzioni, utilizzando le conoscenze finora acquisite, è qualitativamente rappresentato in Figura 12.2 nel caso $y_0 < t_0$ e $y_0 = t_0$ rispettivamente.

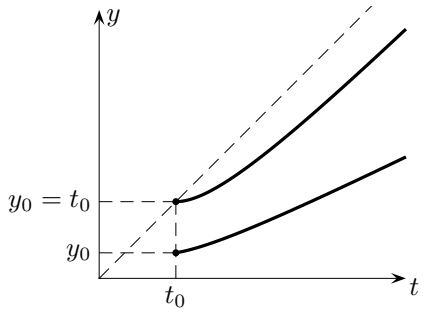


Figura 12.2: Andamento in futuro delle soluzioni, caso $y_0 \leq t_0$

Studiamo ora l'andamento delle soluzioni in passato. Sostanzialmente possono accadere tre eventualità rappresentate nella Figura 12.3: la soluzione interseca la retta $y = t$ in tempo finito, oppure è globalmente definita in

passato e tende all'origine, oppure esce dal dominio in tempo finito. Più precisamente, sempre con riferimento alla Figura 12.3, ci sono due casi:

i) $y(t) < t$ per ogni $t \in]\alpha, \beta[$. Allora $y(t)$ è sempre crescente ed esiste $y_\alpha := \lim_{t\to\alpha^+} y(t)$ e per confronto $0 \le y_\alpha \le \alpha$. Se $\alpha = 0$, cioè la relativa soluzione è globalmente definita in passato, allora necessariamente $y_\alpha = 0$ ovvero $\lim_{t\to 0^+} y(t) = 0$. Se, invece, $\alpha > 0$ la soluzione non è globalmente definita e per il Teorema di fuga dai compatti (caso della striscia) si avrà $y_\alpha \in \partial\mathbb{R}^+$. Per monotonia deve essere necessariamente $y_\alpha = 0$, dunque la soluzione esce dal dominio in tempo finito. Si osservi che di conseguenza $\lim_{t\to\alpha^+} y'(t) = +\infty$ quindi la soluzione esce dal dominio con tangente verticale;

ii) altrimenti esiste $t_1 \in]0, t_0]$ tale che $y(t_1) = t_1$. Poiché $u(t)$ è sottosoluzione in passato, si ha $y(t) > t$ per ogni $t \in]\alpha, t_1[$ per cui $y(t)$ è ivi decrescente e t_1 è un punto di minimo. Ci si riconduce così al caso $y_0 \ge t_0$ che verrà analizzato successivamente.

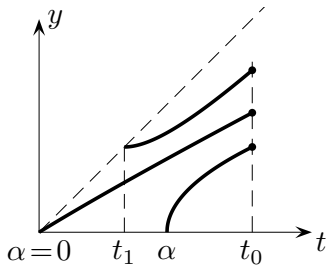


Figura 12.3: Possibili andamenti in passato, caso $y_0 \le t_0$

Il caso i) può effettivamente accadere. Ciò deve essere previsto perché per ogni fissato $t > 0$ si ha $\lim_{y\to 0^+} f(t, y) = +\infty$ quindi il campo vettoriale tende a essere verticale per i punti vicini all'asse y, quindi le soluzioni ivi originatesi tenderanno a uscire dal primo quadrante in passato. Più precisamente, per dimostrare l'esistenza di soluzioni che tendono al bordo in tempo finito si può utilizzare il Teorema del confronto, per esempio verificando se esistono funzioni lineari che sono soprasoluzioni in passato. Cerchiamo dunque una funzione del tipo $u(t) = at - b$, con $a > 0$ e $b \ge 0$, che sia soprasoluzione (almeno) in un intervallo destro del punto in cui si annulla, cioè in $]b/a, b/a + \delta]$. Per tali t dovrà essere

$$u'(t) \le f(t, u(t)) \iff a \le \frac{t^2 - (at - b)^2}{2t(at - b)} \iff (1-3a^2)t^2+4abt-b^2 \ge 0.$$

Essendo, per $t \geq b/a$, $(1-3a^2)t^2+4abt-b^2 \geq (1-3a^2)t^2+3b^2$, è sufficiente che sia $1-3a^2 \geq 0$, ovvero $a \leq 1/\sqrt{3}$. Di conseguenza, ogni funzione $u(t) = at-b$ con $0 < a \leq 1/\sqrt{3}$ e $b \geq 0$ è, se ristretta all'intervallo $]b/a, +\infty[$, sottosoluzione in futuro e soprasoluzione in passato. Fissato quindi un dato iniziale (t_0, y_0) con $y_0 \leq at_0 - b$ con a, b come sopra e $t_0 > b/a$ si ha che la relativa soluzione verifica $y(t) \leq u(t) = at-b$ per ogni $t \leq t_0$ in un intervallo comune di definizione. Allora $y(t)$ deve uscire attraverso la retta $y = 0$ per $t \to \alpha^+$ per qualche α con $b/a \leq \alpha < t_0$, come in Figura 12.4.

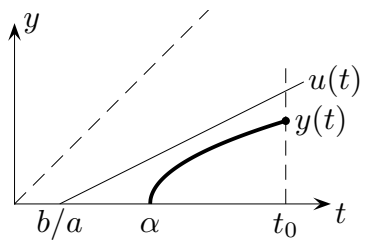


Figura 12.4: Soluzioni non globalmente definite in passato

Resterebbe ancora da provare che esistono effettivamente soluzioni le cui traiettorie tendono all'origine; ciò è possibile dimostrando che esistono soluzioni che in passato rimangono confinate tra la soprasoluzione $u(t) = at$ con a fissato tale che $a < 1/\sqrt{3}$ e la sottosoluzione $v(t) = t$; si osservi che $u(t) < v(t)$ cioè la sottosoluzione sta *sopra* la soprasoluzione, perciò il risultato non è banale. In questo caso (con un po' d'occhio!) si può osservare che la disequazione sopra trovata $(1-3a^2)t^2+4abt-b^2 \geq 0$ è in realtà un'identità se $a = 1/\sqrt{3}$ e $b = 0$, cioè la funzione $y_+(t) := t/\sqrt{3}$ è una soluzione dell'equazione differenziale, e tende a 0 per $t \to 0^+$; tale soluzione era già stata trovata nell'Esercizio 7.12. In definitiva, tutte le situazioni rappresentate in Figura 12.3 effettivamente accadono. Si può anche essere più precisi verificando che *tutte* le soluzioni con dati iniziali $y_0 < t_0/\sqrt{3}$ non sono globalmente definite in passato; infatti, fissato tale dato iniziale e detta $y(t)$ la relativa soluzione, la funzione $u(t) = t/\sqrt{3} - b_0$ con $b_0 = t_0/\sqrt{3} - y_0 > 0$ è per quanto visto sopra una soprasoluzione in passato per $y(t)$ che dunque deve uscire dal dominio in un tempo $\alpha > \sqrt{3}b_0 > 0$. In maniera analoga si verifica che tutte le funzioni del tipo $u(t) = at - b$ con $a > 1\sqrt{3}$ e $b \leq 0$ sono sottosoluzioni in passato, e grazie a queste si dimostra che ogni soluzione con dato iniziale tale che $t_0/\sqrt{3} < y_0 < t_0$ interseca le retta $y = t$ in un tempo positivo (svolgere i dettagli per esercizio). Da ciò segue anche che $y_+(t)$ è l'unica soluzione tale che $\lim_{t\to 0^+} y_+(t) = 0$.

Passiamo ora a studiare il caso di una soluzione con dato iniziale (t_0, y_0)

con $y_0 \geq t_0$ (al quale ci si riconduce partendo da una soluzione con $y_0 < t_0$ tale che $y(t_1) = t_1$ per qualche $t_1 < t_0$). Detta $y(t)$ la relativa soluzione, poiché la funzione $u(t) = t$ è sottosoluzione in passato, per confronto si ha $y(t) > t$ per $t < t_0$, dunque $y(t)$ è ivi decrescente. Per $t > t_0$, invece, la soluzione è ancora decrescente finché il grafico non interseca la retta $y = t$; per trasversalità ciò deve avvenire in tempo finito, sia t_2. Per $t > t_2$ la traiettoria entrerà nella regione $y < t$, caso già trattato in precedenza.

Consideriamo quindi il caso $y_0 \geq t_0$ e studiamo l'andamento in passato delle soluzioni. Ci sono sostanzialmente tre possibili casi, rappresentati in Figura 12.5

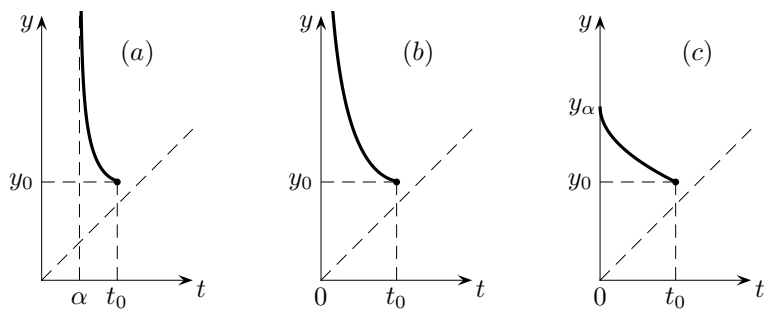


Figura 12.5: Possibili andamenti in passato, per $y_0 \geq t_0$: (a) caso $\alpha > 0$, $y_\alpha = +\infty$; (b) caso $\alpha = 0$, $y_\alpha = +\infty$; (c) caso $\alpha = 0$, $y_\alpha < +\infty$

Ora vogliamo dimostrare che tutte le soluzioni con $y_0 \geq t_0$ sono globalmente definite in passato in $]0, t_0]$ e che soddisfano $\lim_{t\to 0^+} y(t) = +\infty$, cioè può accadere solo il caso (b) in Figura 12.5. Tornano ancora utili opportune sopra e sottosoluzioni. Più precisamente (con riferimento alla Figura 12.6)

(a) per dimostrare che $\alpha = 0$ è sufficiente provare che esiste $z(t)$ definita e continua in $]0, t_0[$, tale che $y(t) \leq z(t)$ per $t \leq t_0$;

(b) a questo punto, per dimostrare che $\underline{y} := \lim_{t\to 0^+} y(t) = +\infty$ è sufficiente trovare $w(t)$ definita in $]0, t_0[$, con $w(t) \leq y(t)$ per $t \leq t_0$ e tale che $\lim_{t\to 0^+} w(t) = +\infty$.

Per quanto riguarda (a) un'idea è di trovare una funzione definita in $]0, t_0[$ e che sta sopra $y(t)$. Per esempio esistono due possibilità:

a1) trovare una soprasoluzione $z(t)$ di $y' = f(t, y)$ in passato per $0 < t < t_0$ cioè tale che

$$\begin{cases} z'(t) \leq f(t, z(t)) \\ z(t_0) = z_0 \geq y_0, \end{cases} \qquad \text{per } 0 < t < t_0,$$

oppure, alternativamente,

a2) dimostrare che $y(t)$ è sottosoluzione in passato per un'opportuna equazione (da trovare!) $z' = g(t, z)$, ovvero verifica

$$\begin{cases} y'(t) \geq g(t, y(t)) \\ z(t_0) = z_0 \geq y_0, \end{cases} \qquad \text{per } 0 < t < t_0,$$

dove g è tale che la soluzione del problema di Cauchy $z' = g(t, z)$, $z(t_0) = z_0$ sia globalmente definita in passato in $]0, t_0]$.

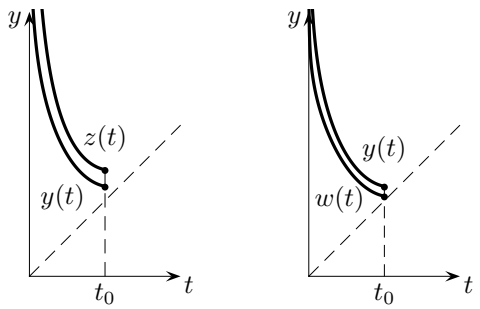


Figura 12.6: Esistenza globale in passato, caso $y_0 \geq t_0$

Si osservi la differente difficoltà dei due approcci: in a1) bisogna "indovinare" una soprasoluzione; a volte ciò può essere raggiunto per tentativi andando a studiare l'andamento di f. In a2) bisogna invece trovare un opportuno campo vettoriale g con soluzioni globalmente definite; ciò può essere ottenuto stimando dal basso il campo vettoriale f lungo la soluzione $y(t)$. Per completezza, svilupperemo entrambe le strategie. Nel seguito supporremo che $y(t_0) = y_0$; visto che ogni soluzione considerata incontra la retta $y = t$ per $t > t_0$, non è restrittivo prendere il punto intersezione come dato iniziale. Iniziamo col sviluppare a1): poiché $f(t, y)$ esplode quando t tende a 0, conviene cercare una soprasoluzione in passato e tale che esploda per $t \to 0^+$. Un prototipo potrebbe essere una funzione potenza del tipo $t \mapsto c/t^p$ per qualche $c, p > 0$. Verifichiamo se per caso una tale funzione può essere soprasoluzione per $t < t_0$. Il caso più semplice si ha per $p = 1$ per cui sia $z(t) = c/t$. Imponiamo ora che valga $z(t_0) = z_0 \geq y_0 = t_0$; il caso limite $z_0 = y_0$ conduce a $c = t_0^2$ per cui alla fine prendiamo $z(t) = t_0^2/t$. Tale funzione è soprasoluzione in passato se e solo se

$$z'(t) - f(t, z(t)) \leq 0 \iff -\frac{t_0^2}{t^2} - \frac{t^2 - (t_0^2/t)^2}{2t(t_0^2/t)} \leq 0 \iff -\frac{t^4 + t_0^4}{2t^2 t_0^2} \leq 0,$$

che è sempre vera per $t > 0$. Dunque $z(t)$ è soprasoluzione in passato per $y(t)$, da cui $y(t) < t_0^2/t$ in un intervallo comune di esistenza. Se ora $y(t)$ non fosse globalmente definita in passato, cioè $\alpha > 0$, per il Teorema della fuga dai compatti $y(t)$ dovrebbe tendere al bordo di $\mathbb{R}^+$. Essendo $y(t)$ ivi decrescente, necessariamente si avrebbe $\lim_{t\to\alpha^+} y(t) = +\infty$, e passando al limite per $\alpha \to 0^+$ nella disuguaglianza $y(t) < z(t)$ si avrebbe $+\infty \le t_0^2/\alpha$, un assurdo. Quindi necessariamente $\alpha = 0$. Per esercizio, verificare che come soprasoluzione si poteva anche scegliere $z(t) = t_0\sqrt{t_0}/\sqrt{t}$, ottenendo una migliore stima per eccesso per la soluzione $y(t)$.

Proviamo ora a seguire la strada indicata da a2). Essendo $t, y > 0$ si ha

$$y'(t) = \frac{t}{2y(t)} - \frac{y(t)}{2t} \ge -\frac{y(t)}{2t} =: g(t, y(t)),$$

perciò $y(t)$ è sottosoluzione in passato dell'equazione $z' = g(t, z)$, $z(t_0) = y_0 = t_0$. Per il Teorema del confronto si ha $y(t) \le z(t)$ per $t \le t_0$. Poiché $g(t, z) = h(t)z$ con $h(t) = -1/(2t)$, l'equazione $z' = g(t, z)$ è lineare dunque ha soluzioni $z(t)$ globalmente definite con intervallo massimale di esistenza coincidente con l'intervallo di definizione di h, cioè $]0, +\infty[$. Ragionando come sopra si ottiene nuovamente che $y(t)$ è globalmente definita in passato. Si osservi che la soluzione $z(t)$ si può ottenere esplicitamente, essendo

$$z(t) = z_0 \exp\Big(-\int_{t_0}^{t} \frac{1}{2s}\, ds\Big) = t_0 \exp\Big(-\frac{1}{2}\ln(t/t_0)\Big) = \frac{t_0\sqrt{t_0}}{\sqrt{t}}.$$

Per quanto riguarda (b) l'idea è di trovare una funzione che esplode per $t \to 0^+$ e che sta sotto $y(t)$. Come per (a) si possono tentare due strategie:

b1) trovare una sottosoluzione $w(t)$ di $y' = f(t, y)$ in passato per $0 < t < t_0$, ovvero

$$\begin{cases} w'(t) \ge f(t, w(t)) \\ w(t_0) = w_0 \le y_0, \end{cases} \qquad \text{per } 0 < t < t_0,$$

che esplode per $t \to 0^+$, oppure, alternativamente

b2) dimostrare che $y(t)$ è soprasoluzione in passato per un'opportuna equazione (sempre da trovare!) $w' = h(t, w)$, ovvero

$$\begin{cases} y'(t) \le h(t, y(t)) \\ w(t_0) = w_0 \le y_0, \end{cases} \qquad \text{per } 0 < t < t_0,$$

dove h è tale che la soluzione del problema di Cauchy $w' = h(t, w)$, $w(t_0) = w_0$ sia globalmente definita in passato in $]0, t_0]$ e valga ancora $\lim_{t\to 0^+} w(t) = +\infty$.

Si osservi che il fatto che le soluzioni $y(t)$ tendano all'infinito non è a priori del tutto banale. Il campo f tende all'infinito per $t \to 0^+$ e questa proprietà suggerisce che per $t \to 0^+$ le soluzioni tendono al bordo $t = 0$ con derivata infinita, ovvero con tangente verticale; potrebbero però tendere a un punto al *finito* con derivata infinita (per esempio, similmente al comportamento della funzione $t \mapsto 1 - \sqrt{t}$ in $t = 0$). Per dimostrare che f tende all'infinito proviamo quindi a sviluppare il punto b1). In questo caso la situazione è più complicata di a1) perché le funzioni potenza $w_p(t) = c/t^p$ $(c, p > 0)$ non possono *mai* essere sottosoluzioni in $]0, t_0]$ dell'equazione $y' = f(t, y)$. Infatti, essendo $y(t_0) = t_0$ si ha $y'(t_0) = 0$ mentre per qualsiasi scelta di p si ha $w_p'(t_0) = -cp/t_0^{p+1} < 0$ dunque in un intorno sinistro di t_0 si avrà $y(t) < w_p(t)$. Tuttavia ci aspettiamo che per qualche funzione $w_p(t)$ si abbia $w_p(t) < y(t)$ in un intorno destro di 0, ma per quanto visto non potrà mai valere su tutto $]0, t_0]$: osservando che dalla formula esplicita (7.18) per la soluzione $y(t) = \sqrt{(t^3 + 2t_0^3)/3t}$ si ha $y(t) \sim \sqrt{2t_0^3/(3t)} \sim c/\sqrt{t}$ per $t \sim 0$, ciò dovrebbe essere vero per $p < 1/2$. Un altro modo per vederlo è osservare che l'equazione differenziale può essere scritta nella forma

$$y'(t) = \frac{t}{2y(t)} - \frac{y(t)}{2t},$$

dove il primo termine $t/(2y(t))$ è infinitesimo per $t \to 0^+$ indipendentemente dal comportamento di $y(t)$, mentre il secondo tende sempre all'infinito; essenzialmente si ha che $y'(t) \sim -y(t)/(2t)$ per $t \to 0^+$ quindi dobbiamo aspettarci che le soluzioni dell'equazione differenziale in oggetto siano approssimabili per $t \sim 0^+$ da quelle dell'equazione $z' = -z'/(2t)$ le quali (si veda sopra) sono proprio della forma $z(t) = c/\sqrt{t}$.

Proviamo dunque a utilizzare la strategia b2): essendo $y(t) > y(t_0) = t_0$ per $t < t_0$ si ha

$$y'(t) = \frac{t}{2y(t)} - \frac{y(t)}{2t} \leq \frac{1}{2} - \frac{y(t)}{2t} =: h(t, y(t)).$$

Quindi $y(t)$ è soprasoluzione in passato per la soluzione del problema di Cauchy $w' = h(t, w)$, $w(t_0) = y_0 = t_0$. Anche in questo caso l'equazione $w' = h(t, w)$ è lineare (non omogenea). La soluzione $w(t)$ (ottenibile mediante (8.5), il metodo per le equazioni omogenee di grado zero (8.9), oppure il metodo per simiglianza) è data da

$$w(t) = \frac{2t_0\sqrt{t_0}}{3\sqrt{t}} + \frac{t}{3}.$$

Per il Teorema del confronto si avrà quindi $y(t) \geq w(t)$ per $0 < t \leq t_0$ da cui facilmente $\lim_{t\to 0^+} y(t) = +\infty$. Alternativamente, per verificare (b) si poteva utilizzare anche la seguente strategia:

b3) dimostrare che $y'(t) \leq h(t)$ dove h è continua e con primitiva $H(t)$ che esplode per $t \to 0^+$. Infatti, in tal caso si avrebbe

$$\int_t^{t_0} y'(s)\,ds \leq \int_t^{t_0} h(s)\,ds$$

da cui $y(t) \geq y(t_0) - H(t_0) + H(t) \to +\infty$ per $t \to 0^+$.

Nel presente caso, per $t \leq t_0$ si ottiene facilmente

$$y'(t) \leq \frac{1}{2} - \frac{y(t)}{2t} \leq \frac{1}{2} - \frac{y(t_0)}{2t} = \frac{1}{2} - \frac{t_0}{2t} =: h(t),$$

da cui segue $y(t) \geq \frac{1}{2}(t_0 + t_0 \ln t_0) + \frac{1}{2}(t - t_0 \ln t) \to +\infty$ se $t \to 0^+$.

È interessante osservare che dall'equazione differenziale è possibile individuare i termini delle possibili espansioni in serie di potenze delle soluzioni anche vicino al punto $t = 0$ dove non sono definite. *Supponendo* che $y(t) \sim ct^\alpha$ con $\alpha \in \mathbb{R}$ per t vicino a 0, nel senso che $y(t) = ct^\alpha + o(t^\alpha)$, si avrà $y'(t) \sim c\alpha t^{\alpha-1}$ che inserita nell'equazione porta a

$$c\alpha t^{\alpha-1} \sim \frac{t}{2ct^\alpha} - \frac{ct^\alpha}{2t} \quad \text{cioè} \quad c\alpha t^{\alpha-1} \sim \frac{1}{2c}t^{1-\alpha} - \frac{c}{2}t^{\alpha-1}.$$

Ci sono tre casi: se $\alpha = 1$ si ottiene l'equazione $c = \frac{1}{2c} - \frac{c}{2}$ che ha come soluzione $c = \pm 1/\sqrt{3}$. Si osservi che in questo caso le funzioni così ottenute $y(t) = \pm t/\sqrt{3}$, al posto di $\sim$ realizzano l'uguaglianza per ogni t, e dunque sono soluzioni. Nel secondo caso $\alpha > 1$ si ha che $t^{\alpha-1} = o(t^{1-\alpha})$ ed è trascurabile rispetto a $t^{1-\alpha}$ quando $t \sim 0$; dalla relazione sopra si ottiene quindi

$$0 \sim \frac{1}{2c}t^{1-\alpha},$$

che non può essere mai verificata per alcun valore di c. Nell'ultimo caso $\alpha < 1$ si ha invece che $t^{1-\alpha} = o(t^{\alpha-1})$ è trascurabile rispetto a $t^{\alpha-1}$ quando $t \sim 0$ e si trova

$$c\alpha t^{\alpha-1} \sim -\frac{c}{2}t^{\alpha-1},$$

verificata (indipendentemente da $c \neq 0$) se $\alpha = -1/2$; si ottiene pertanto che un'ulteriore espansione per $y(t)$ vicino a $t = 0$ e compatibile con l'equazione differenziale è $y(t) \sim c/\sqrt{t}$. Si osservi come questa informazione suggerisca

anche quali sotto/soprasoluzioni ricercare per t vicino a zero; infatti ci si aspetta che per le soluzioni che esplodono si abbia $t^\beta < y(t) < t^\gamma$ per $\beta > -1/2 > \gamma$ e t vicino a 0. L'analisi può essere estesa anche per calcolare i primi due termini dello sviluppo. *Supponendo* che $y(t) \sim ct^\alpha + bt^\beta$ con $\alpha > \beta$ e $c, b \neq 0$, per cui $y'(t) \sim c\alpha t^{\alpha-1} + b\beta t^{\beta-1}$, sostituendo si ottiene

$$c\alpha t^{\alpha-1} + b\beta t^{\beta-1} \sim \frac{t}{2(ct^\alpha + bt^\beta)} - \frac{ct^\alpha + bt^\beta}{2t},$$

ovvero

$$c\alpha t^{\alpha-1} + b\beta t^{\beta-1} \sim \frac{t^{1-\beta}}{2(ct^{\alpha-\beta} + b)} - \frac{c}{2}t^{\alpha-1} - \frac{b}{2}t^{\beta-1}.$$

Se $\beta > 1$, dunque anche $\alpha > 1$ il primo termine sulla destra domina tutti gli altri e si ha un assurdo. Sarà quindi $\beta \leq 1$. Se $1 \geq \alpha > \beta$ si ha che il primo termine sulla destra è trascurabile, per cui

$$c\alpha t^{\alpha-1} + b\beta t^{\beta-1} \sim -\frac{c}{2}t^{\alpha-1} - \frac{b}{2}t^{\beta-1},$$

e si ottiene $\alpha = -1/2$, $\beta = -1/2$, non accettabile perché si assume $\alpha > \beta$. Siano allora $\alpha > 1$ e $\beta \leq 1$; in particolare se $\beta = 1$, essendo anche

$$\frac{1}{2(ct^{\alpha-1} + b)} \sim \frac{1}{2b}(1 - \frac{c}{b}t^{\alpha-1}) = \frac{1}{2b} - \frac{c}{2b^2}t^{\alpha-1},$$

si ottiene

$$c\alpha t^{\alpha-1} + b \sim \frac{1}{2b} - \frac{c}{2b^2}t^{\alpha-1} - \frac{c}{2}t^{\alpha-1} - \frac{b}{2},$$

che porta a $b = \frac{1}{2b} - \frac{b}{2}$, da cui $b = \pm 1/\sqrt{3}$, e $\alpha = -1/(2b^2) - 1/2$, da cui $\alpha = -2$ assurdo. Siano infine $\alpha > 1$ e $\beta < 1$; come sopra si ottiene

$$\frac{t^{1-\beta}}{2(ct^{\alpha-1} + b)} \sim \frac{t^{1-\beta}}{2b}(1 - \frac{c}{b}t^{\alpha-\beta}) = \frac{t^{1-\beta}}{2b} - \frac{c}{2b^2}t^{\alpha-2\beta+1},$$

da cui

$$c\alpha t^{\alpha-1} + b\beta t^{\beta-1} \sim \frac{t^{1-\beta}}{2b} - \frac{c}{2b^2}t^{\alpha-2\beta+1} - \frac{c}{2}t^{\alpha-1} - \frac{b}{2}t^{\beta-1}.$$

Essendo $\alpha - 1, 1 - \beta, \alpha - 2\beta + 1 > 0$ e $\beta - 1 < 0$, si ottiene subito che deve essere $b\beta = -b/2$ da cui $\beta = -1/2$ perciò $1 - \beta = 3/2$ e $\alpha - 2\beta + 1 = \alpha + 2$. Allora $t^{\alpha-2\beta+1} = t^{\alpha+2} = o(t^{\alpha-1})$ è trascurabile e l'unico modo affinché la

relazione sopra possa essere soddisfatta è che $\alpha - 1 = 1 - \beta$ ovvero $\alpha = 5/2$; inoltre $c\alpha = 1/(2b) - c/2$ da cui $c = 1/(6b)$. Il possibile sviluppo è allora

$$y(t) \sim \frac{1}{6b} t^{5/2} + b t^{-1/2} = \frac{b}{\sqrt{t}} + \frac{t^2\sqrt{t}}{6b}. \tag{12.1}$$

Dalla formula esplicita (7.18) si ottiene effettivamente lo sviluppo

$$\begin{aligned} y(t) &= \sqrt{\frac{t^2}{3} + \frac{d}{t}} = \sqrt{\frac{d}{t}}\sqrt{1 + \frac{t^3}{3d}} \\ &= \sqrt{\frac{d}{t}}\Big(1 + \frac{1}{2}\cdot\frac{t^3}{3d} + o(t^3)\Big) = \sqrt{\frac{d}{t}} + \frac{t^2\sqrt{t}}{6\sqrt{d}} + o(t^{5/2}), \end{aligned}$$

che coincide con il precedente scegliendo $b = \sqrt{d}$. Per la soluzione tale che $y(t_0) = t_0$ si ottiene $d = 2t_0^3/3$ e lo sviluppo diventa più precisamente

$$y(t) = \sqrt{\frac{2t_0^3}{3t}} + \frac{1}{2\sqrt{6}}\cdot\frac{t^2\sqrt{t}}{t_0\sqrt{t_0}} + o(t^{5/2}).$$

Quest'analisi suggerisce anche un'altra strategia per affrontare l'equazione differenziale (7.17): volendo giustificare formalmente l'espansione trovata, si osservi che da (12.1) segue che

$$\sqrt{t}y(t) \sim b + \frac{t^3}{6b}.$$

Ciò suggerisce che il cambio di variabili $x(t) := \sqrt{t}y(t)$ potrebbe trasformare l'equazione differenziale per l'incognita $y(t)$ in un'altra equazione per la nuova incognita $x(t)$, per la quale si possa effettivamente espandere la soluzione in serie di potenze a esponente naturale (giustificando infine l'espansione (12.1) per $y(t)$). Operando il cambio di variabili, l'equazione per $x(t)$ risulta

$$x' = \frac{y}{2\sqrt{t}} + \sqrt{t}y' = \frac{y}{2\sqrt{t}} + \sqrt{t}\Big(\frac{t}{2y} - \frac{y}{2t}\Big) = \frac{t\sqrt{t}}{2y} = \frac{t^2}{2x},$$

che è a variabili separabili e dunque, non solo permetterà di giustificare l'espansione in serie di potenze, ma fornisce addirittura un terzo metodo per integrare l'equazione (7.17), dopo quelli visti nell'Esempio 7.12 e nell'Esempio 8.2! Terminando l'analisi, per separazione delle variabili si ottiene facilmente $(x^2)' = t^2$ da cui, integrando,

$$x^2(t) = \frac{t^3}{3} + d,$$

per qualche $d \in \mathbb{R}$, e ritornando alla variabile $y(t)$, nuovamente

$$ty^2(t) = \frac{t^3}{3} + d \qquad \Longrightarrow \qquad y(t) = \sqrt{\frac{t^2}{3} + \frac{d}{t}}.$$

Studiamo ora la convessità delle soluzioni. Poiché il campo vettoriale $f(t, y)$ è di classe C^∞ tali sono anche le soluzioni; in particolare sono di classe C^2 dunque per studiare la convessità è sufficiente studiare il segno della derivata seconda. Derivando ulteriormente l'equazione differenziale (ciò è possibile proprio perché le soluzioni sono di classe C^∞) si ottiene

$$\begin{aligned} y''(t) &= \frac{2(t - y(t)y'(t))ty(t) - (t^2 - y(t))(y(t) + ty'(t))}{2(ty(t))^2} = \frac{(y - ty')(t^2 + y^2)}{2(ty)^2} \\ &= \frac{(2y^2 - (t^2 - y^2))(t^2 + y^2)}{4t^2y^3} = \frac{(t^2 + y^2(t))}{4t^2y^3(t)}(3y^2(t) - t^2). \end{aligned}$$

Si ha $y''(t) \geq 0$ se e solo se $|y(t)| \geq |t|/\sqrt{3}$; in particolare, nel primo quadrante, se $y(t) > t/\sqrt{3}$. Da questa equazione si scopre anche che $y_+(t) = t/\sqrt{3}$ è soluzione. In definitiva, tutte le soluzioni la cui traiettoria sta sopra $y_+(t)$ sono convesse, quelle per cui sta sotto sono concave, si veda la Figura 12.7.

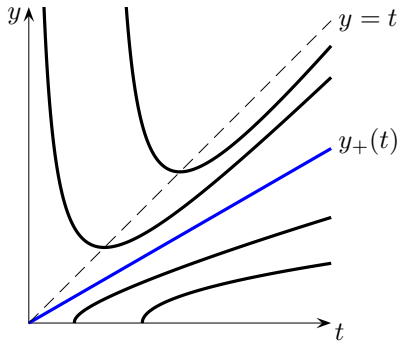


Figura 12.7: Quadro globale: andamento e convessità delle soluzioni. In blu è rappresentata la soluzione particolare $y_+(t) = t/\sqrt{3}$

Volendo essere più precisi, dimostriamo che non solo l'andamento qualitativo delle soluzioni è quello delineato in Figura 12.7, ma che ogni soluzione $y(t)$ tende a $y_+(t)$ per $t \to +\infty$, cioè che la funzione $d(t) := y(t) - y_+(t) \to 0$ per $t \to +\infty$. Un modo per farlo è sfruttare l'equazione differenziale per y e y_+ per ottenere una equazione/disequazione differenziale per $d(t)$. Essendo

$y(t)$ e $y_+(t)$ soluzioni, si ha

$$\begin{aligned} d'(t) = y'(t) - y'_+(t) = f(t, y(t)) - f(t, y_+(t)) &= \frac{t^2 - y^2(t)}{2ty(t)} - \frac{t^2 - y_+^2(t)}{2ty_+(t)} \\ &= \frac{(t^2 - y^2)y_+ - (t^2 - y_+^2)y}{2tyy_+} = \frac{(y_+ - y)(t^2 + yy_+)}{2tyy_+} \\ &= -\Big(\frac{t}{2y(t)y_+(t)} + \frac{1}{2t}\Big)d(t), \end{aligned}$$

quindi $d(t)$ è soluzione dell'equazione differenziale lineare $d' = \theta(t)d$ con $\theta(t) = -(\frac{t}{2y(t)y_+(t)} + \frac{1}{2t})$. Si osservi che $\theta(t)$ non è nota perché non lo è $y(t)$; si può però stimarla. Supponiamo inizialmente che $d(t_0) > 0$; allora, per quanto visto sopra e per l'unicità delle soluzioni sarà $d(t) > 0$ per ogni $t > t_0$ e poiché le soluzioni $y(t)$ e $y_+(t)$ sono positive si ha

$$d'(t) < -\frac{1}{2t}d(t).$$

Dunque $d(t)$ è sottosoluzione in futuro per la soluzione del problema di Cauchy $r' = -\frac{1}{2t}r$, $r(t_0) = d(t_0)$, ovvero per $r(t) = d(t_0)\sqrt{t_0/t}$. Per il Teorema del confronto si ottiene $0 < d(t) < d(t_0)\sqrt{t_0/t}$ e passando al limite per $t \to +\infty$ si ricava $d(t) \to 0$. Nel caso in cui $d(t_0) < 0$ si ha $d(t) < 0$ per ogni $t > t_0$, per cui

$$d'(t) = -\Big(\frac{t}{2y(t)y_+(t)} + \frac{1}{2t}\Big)d(t) > -\frac{1}{2t}d(t),$$

e procedendo come sopra, per confronto si perviene a $0 > d(t) > d(t_0)\sqrt{t_0/t}$, da cui nuovamente la tesi passando al limite per $t \to +\infty$.

Alternativamente, invece della funzione $d(t)$ si poteva (e conveniva) utilizzare $e(t) := d^2(t)$, sempre positiva, per cui

$$e'(t) = 2d(t)d'(t) = 2d(t)\theta(t)d(t) = 2\theta(t)e(t) < -\frac{1}{t}e(t),$$

ottenendo, per ogni soluzione $y(t)$, la disuguaglianza $0 < e(t) < e(t_0)t_0/t$, da cui, per confronto, ancora la tesi.

Volendo dimostrare, invece, che $y(t)$ è solamente asintotica a $y_+(t)$ per $t \to +\infty$, cioè che $y(t)/y_+(t) \to 1$ per $t \to +\infty$, conviene studiare l'evoluzione della funzione $w(t) = y(t)/y_+(t) = \sqrt{3}y(t)/t$ oppure, per facilità, di $z(t) = y(t)/t$ (si noti comunque che tale proprietà di asintoticità discende

direttamente dalla validità del limite $d(t) \to 0$; non vale invece il viceversa). Derivando si ha

$$z'(t) = \frac{ty'(t) - y(t)}{t^2} = \frac{(t^2 - y^2(t)) - 2y^2(t)}{2t^2 y(t)} = \frac{1 - 3z^2(t)}{2tz(t)},$$

equazione facilmente studiabile (e risolvibile!) perché a variabili separabili. Si noti che la precedente equazione coincide con l'equazione ottenuta nell'Esempio 8.2 tramite il metodo per le equazioni omogenee, proprio utilizzando la posizione $y = tz$. Pur non conoscendo tale metodo, mediante un'analisi qualitativa svolta in maniera approfondita avremmo comunque trovato che tale trasformazione permette di integrare l'equazione differenziale!

Un altro modo per studiare il comportamento di $y(t)/t$ senza passare attraverso l'equazione per $z(t)$ è il seguente: poiché $y(t)$ tende all'infinito per $t \to +\infty$, per de L'Hôpital il limite $\lim_{t\to+\infty} y(t)/t$ coincide con il limite di $\lim_{t\to+\infty} y'(t)$, quando questo esiste. L'esistenza di quest'ultimo limite deriva dalla convessità/concavità delle soluzioni (cioè dallo studio di $y''(t)$) che implica la monotonia di $y'(t)$ (crescente se $y(t) > y_+(t)$, decrescente se $y(t) < y_+(t)$); esiste allora $\lim_{t\to+\infty} y(t)/t = \lim_{t\to+\infty} y'(t) =: \lambda$, con $\lambda \in [0, +\infty]$ perché ci si è ristretti al primo quadrante. Se fosse $\lambda = +\infty$, passando al limite per $t \to +\infty$ nell'equazione

$$y'(t) = \frac{t}{2y(t)} - \frac{y(t)}{2t},$$

si otterrebbe $+\infty = -\infty$, un assurdo. Deve allora essere $\lambda \in \mathbb{R}$ e sempre passando al limite si ottiene

$$\lim_{t\to+\infty} y'(t) = \lim_{t\to+\infty} \left(\frac{t}{2y(t)} - \frac{y(t)}{2t} \right) \quad \Longrightarrow \quad \lambda = \frac{1}{2\lambda} - \frac{\lambda}{2},$$

da cui segue $\lambda = \pm 1/\sqrt{3}$ e in questo caso necessariamente $\lambda = 1/\sqrt{3}$. In definitiva $\lim_{t\to+\infty} y(t)/t = 1/\sqrt{3}$ e $y(t)$ è asintotica a $t/\sqrt{3}$.

Concludendo, tenendo conto di tutte le informazioni raccolte dall'analisi qualitativa svolta in questa sezione e che $y(t) - y_+(t) \to 0$ per $t \to +\infty$, la Figura 12.7 può essere perfezionata disegnando tutte le soluzioni prossime a y_+ per $t \to +\infty$, ottenendo quindi un quadro globale che rispecchia con una buona approssimazione quello preciso trovato in Figura 7.10.

Analisi qualitativa delle soluzioni del sistema (7.22)

Proseguiamo e completiamo l'analisi del sistema (7.22), già trattato nell'Esempio 7.15. Il campo vettoriale $f(x, y) = (2y, x^2 - y^2 + 2x)$ è di classe

$C^\infty(\mathbb{R}^2)$ dunque ci sono esistenza e unicità delle soluzioni dei problemi di Cauchy associati. Poiché f ha crescita quadratica non è possibile applicare i teoremi di esistenza globale. Gli equilibri, soluzioni di $f(x,y)=0$, sono $E_1=(0,0)$ ed $E_2=(-2,0)$. Studiamo la loro stabilità lineare: essendo

$$Df(x,y)=\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2x+2 & -2y \end{pmatrix},$$

si ha dunque

$$Df(0,0)=\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}, \qquad Df(-2,0)=\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}.$$

La prima matrice ha un autovalore 2 positivo e l'altro -2 negativo quindi, per il Teorema 6.23, E_1 è un equilibrio linearmente instabile; la seconda matrice ha due autovalori $\pm 2i$ immaginari puri con parte reale nulla dunque, sempre per il Teorema 6.23, E_2 è linearmente stabile. Per il Teorema 6.22 E_1 è instabile anche per il sistema (7.22), mentre nulla si può dire a priori sulla stabilità (nonlineare) di E_2. Il segno delle componenti del campo vettoriale in un punto P, dal quale si deduce indicativamente la sua direzione, dipende dalla posizione di P relativamente alla retta $y=0$ e all'iperbole $x^2+2x-y^2=0$, insiemi dove una delle due componenti si annulla. Il quadro globale del segno delle componenti e l'andamento del campo vettoriale sono rappresentati in Figura 12.8, dalla quale si intuisce che esistono orbite che si avvolgono attorno all'equilibrio E_2 e che in relazione a queste potrebbero esistere soluzioni periodiche.

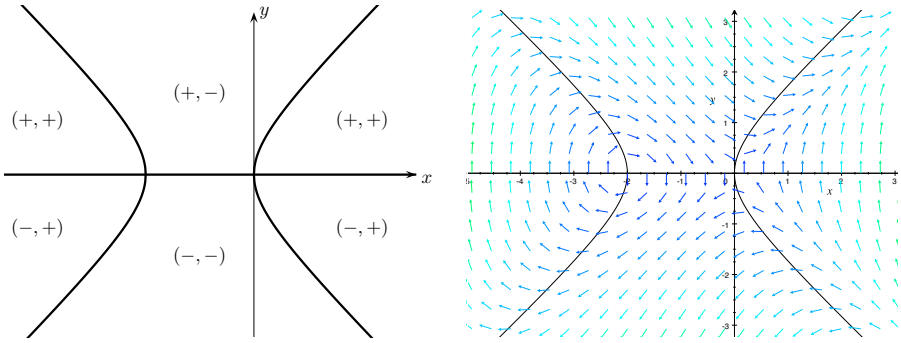


Figura 12.8: Segno delle componenti e andamento del campo vettoriale

Dall'analisi svolta nell'Esempio 7.15, il sistema ammette l'integrale primo $F(x,y)=(y^2-x^2)\mathrm{e}^x$. Studiamone gli insiemi F_c di livello c; essenzialmente

bisogna studiare gli insiemi di livello della funzione di due variabili $z = F(x, y)$. Poiché $\nabla F(x, y) = \lambda\omega(x, y) = \big((y^2 - x^2 - 2x)\mathrm{e}^x, 2y\mathrm{e}^x\big)$ gli equilibri sono punti stazionari di F; essendo inoltre

$$HF(x, y) = \begin{pmatrix} (y^2 - x^2 - 4x - 2)\mathrm{e}^x & 2y\mathrm{e}^x \\ 2y\mathrm{e}^x & 2\mathrm{e}^x \end{pmatrix},$$

e quindi

$$HF(0, 0) = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \qquad HF(-2, 0) = \begin{pmatrix} 2\mathrm{e}^{-2} & 0 \\ 0 & 2\mathrm{e}^{-2} \end{pmatrix},$$

si ricava che E_1 è un punto di sella (dunque, come già visto sopra, instabile), mentre E_2 è un punto di minimo relativo stretto, quindi ci aspettiamo che E_2 sia un equilibrio stabile e che l'insieme di livello c con c leggermente maggiore del valore assunto da F in E_2 sia, localmente vicino a E_2, una curva chiusa. Studiamo quindi F_c al variare di c. Se $c = 0$ l'insieme F_c si riduce alle due rette di equazione $y = \pm x$ che sono dunque il supporto di soluzioni del sistema; tale insieme contiene anche l'equilibrio E_1. Se dunque $x_0 = y_0$ sarà $x(t) = y(t)$ per ogni t di definizione e dall'equazione si ottiene $(x(t), y(t)) = (x_0\mathrm{e}^{2t}, y_0\mathrm{e}^{2t})$; le soluzioni sono allora globalmente definite, e si ha che $|x(t)|, |y(t)| \to +\infty$ se $t \to +\infty$, mentre $(x(t), y(t)) \to (0, 0)$ se $t \to -\infty$. Dunque, tali soluzioni si allontano dall'equilibrio E_1, da cui la sua instabilità. Nel caso in cui $x_0 = -y_0$ sarà $x(t) = -y(t)$ per ogni t e si trovano le soluzioni $(x(t), y(t)) = (x_0\mathrm{e}^{-2t}, y_0\mathrm{e}^{-2t})$ che tendono all'equilibrio per $t \to +\infty$ ed esplodono per $t \to -\infty$.

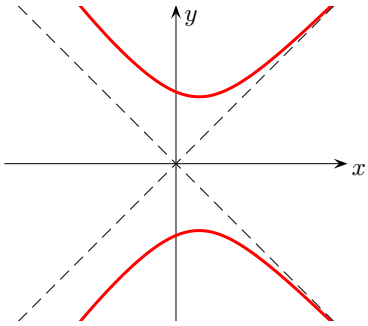


Figura 12.9: Curve di livello F_c: caso $c > 0$

Sia ora $c \neq 0$. Essendo $F(x, y) = F(x, -y)$ l'insieme F_c è simmetrico rispetto all'asse x; inoltre è possibile esplicitare l'equazione $F(x, y) = c$ nell'incognita y ottenendo $y = y(x) = \pm\sqrt{x^2 + c\mathrm{e}^{-x}}$. Se $c > 0$ l'argomento

della radice è sempre positivo; inoltre la funzione $x^2 + ce^{-x}$ è asintotica a x^2 per $x \to +\infty$, mentre è asintotica a $ce^{-x} = ce^{|x|}$ per $x \to -\infty$. Di conseguenza $y(x)$ è asintotica a x per $x \to +\infty$, mentre è asintotica a $\sqrt{c}e^{|x|/2}$ per $x \to -\infty$. È facile vedere che $y(x)$ è decrescente per $x < x_c$ e crescente per $x > x_c$ dove $x_c = k^{-1}(c)$ essendo k^{-1} l'inversa della funzione crescente $x \mapsto 2xe^x$ ristretta agli $x > 0$. Si osservi che il punto $(x_c, y(x_c))$ appartiene all'iperbole di equazione $x^2 + 2x - y^2 = 0$. In definitiva, l'insieme di livello $c > 0$ ha un grafico come in Figura 12.9.

Sia ora $c < 0$; si ha $y(x) = \pm\sqrt{(x^2e^x - |c|)/e^x}$ e tale funzione è definita solamente per $x^2e^x - |c| \geq 0$. È sufficiente allora studiare il segno della funzione $h(x) := x^2e^x$ e poi argomentare per traslazione, essendo $x^2e^x - |c| = h(x) - |c| =: h_c(x)$. La funzione h è sempre non negativa, tende a 0 per $x \to -\infty$, tende a $+\infty$ per $x \to +\infty$, ha un minimo relativo e assoluto in $x = 0$, e un massimo relativo in $x = -2$ con $h(-2) = (2/e)^2$; il grafico è delineato in Figura 12.10.

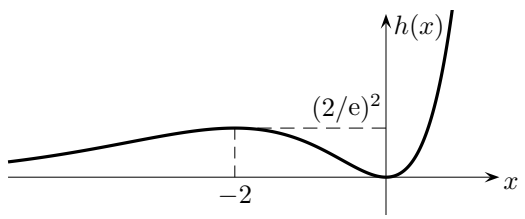
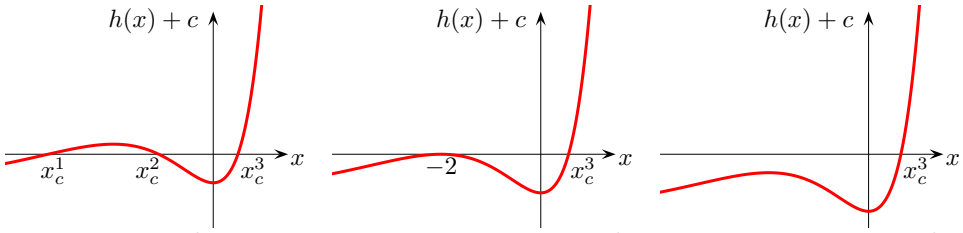


Figura 12.10: Grafico della funzione $h(x) = x^2e^x$

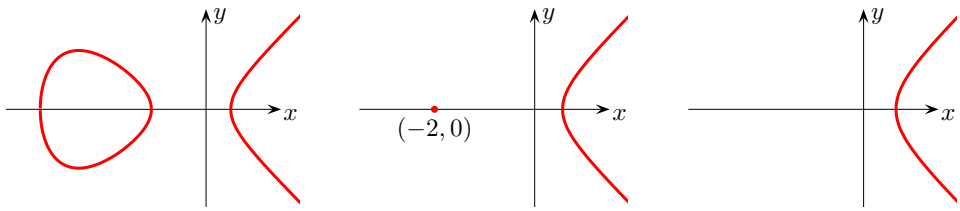
Ne discende subito che l'intervallo su cui $h_c \geq 0$ è una semiretta $[x_c^3, +\infty[$ se $c < -(2/e)^2$, mentre è l'unione di un intervallo $[x_c^1, x_c^2]$ e di una semiretta $[x_c^3, +\infty[$ se $-(2/e)^2 < c < 0$. Nel caso limite $c = -(2/e)^2$ il dominio è dato da una semiretta $[x_c^3, +\infty[$ e dal punto -2.
Corrispondentemente, F_c è una curva illimitata se $c < -(2/e)^2$, l'unione di una curva illimitata e di una curva chiusa semplice se $-(2/e)^2 < c < 0$, mentre è l'unione di una curva illimitata e l'equilibrio E_2 se $c = -(2/e)^2$, si veda la Figura 12.11. Il quadro globale delle curve di livello, e conseguentemente delle orbite del sistema, è riportato in Figura 12.12.

Se il dato iniziale appartiene alla componente connessa limitata dell'insieme F_c con $c < 0$, allora l'orbita è contenuta in una curva chiusa semplice e per compattezza la relativa soluzione è globalmente definita in $\mathbb{R}$. Argomentando come nel caso del pendolo senza attrito o del sistema preda-predatore di Lotka-Volterra è possibile verificare che l'orbita coincide con tale curva chiusa, dunque la soluzione è periodica. Ciò si può anche vedere



Caso: $-(2/\mathrm{e})^2 < c < 0$ Caso: $c = -(2/\mathrm{e})^2$ Caso: $c < -(2/\mathrm{e})^2$

Figura 12.11: Grafico della funzione $h_c(x) = x^2\mathrm{e}^x + c$, con $c < 0$



Caso: $-(2/\mathrm{e})^2 < c < 0$ Caso: $c = -(2/\mathrm{e})^2$ Caso: $c < -(2/\mathrm{e})^2$

Figura 12.12: Curve di livello F_c: caso $c < 0$

verificando che il tempo impiegato dalle soluzioni per percorrere l'insieme di livello dal punto di ascissa x_c^1 a quello di ascissa x_c^2 è finito; infatti, relativamente alla parte di tale orbita contenuta nel semipiano $y > 0$ si ha $y = y(x) = \sqrt{x^2 + c\mathrm{e}^{-x}}$ da cui si ottiene l'equazione di ordine 1 per la prima componente $x(t)$

$$x' = 2\sqrt{x^2 + c\mathrm{e}^{-x}} =: g(x),$$

perciò tale tempo di percorrenza è

$$\int_{x_c^1}^{x_c^2} \frac{1}{2\sqrt{x^2 + c\mathrm{e}^{-x}}}\, dx. \tag{12.2}$$

La funzione $k_c(x) := x^2 + c\mathrm{e}^{-x}$ ha in x_c^1 e x_c^2 due zeri semplici, nel senso che il suo sviluppo di Taylor in un loro intorno è $k_c(x) = a_c^1(x - x_c^1) + o(x - x_c^1)$ e, rispettivamente, $k_c(x) = a_c^2(x - x_c^2) + o(x - x_c^2)$ per opportune costanti *non nulle* a_c^1, a_c^2. Allora

$$\int^{x_c^2} \frac{1}{2\sqrt{x^2 + c\mathrm{e}^{-x}}}\, dx \sim \int^{x_c^2} \frac{1}{\sqrt{x_c^2 - x}}\, dx < +\infty,$$

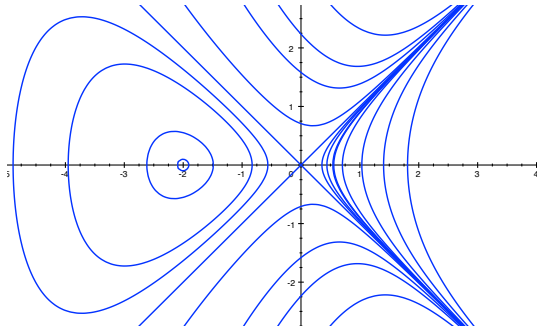


Figura 12.13: Quadro globale delle orbite

e analogamente nell'altro estremo x_c^1 dunque, per il criterio di asintoticità per gli integrali impropri, l'integrale (12.2) converge e la soluzione è effettivamente periodica.

Studiamo ora l'intervallo di esistenza delle altre soluzioni iniziando dal caso $c > 0$. Dovendo $(x(t), y(t))$ appartenere al relativo insieme di livello dovrà necessariamente essere $x(t), y(t) \to +\infty$ per $t \to \beta^-$, essendo β l'estremo destro dell'intervallo massimale d'esistenza. Ma allora si avrà $x'(t) = 2\sqrt{x^2(t) + c\mathrm{e}^{-x(t)}} \sim x(t)$ perciò "l'equazione è asintoticamente lineare in futuro" e ci si aspetta esistenza globale in futuro cioè $\beta = +\infty$. Volendolo dimostrare con precisione, fissato il dato iniziale $(x_0, y_0) = (x(0), y(0))$ con $y_0 > 0$, poiché $x(t)$ è crescente, per $t \geq 0$ si ha

$$x'(t) \leq 2\sqrt{x^2(t) + c\mathrm{e}^{-x_0}} =: g_c(x(t)).$$

Allora $x(t)$ è sottosoluzione in futuro della soluzione dell'equazione differenziale $z' = g_c(z)$, $z(0) = x_0$. Essendo $|g_c(z)| \leq 2|z| + 2\sqrt{c\mathrm{e}^{-x_0}}$, g_c è sublineare, dunque $z(t)$ è globalmente definita in futuro. Essendo $x_0 \leq x(t) \leq z(t)$, $x(t)$ non può esplodere in tempo finito, dunque è globalmente definita; da ciò segue che anche $y(t) = \sqrt{x^2(t) + c\mathrm{e}^{-x(t)}}$ è globalmente definita e dovendo l'orbita appartenere all'insieme di livello F_c, privo di equilibri, sarà necessariamente $x(t), y(t) \to +\infty$ per $t \to +\infty$. In passato: sia $]\alpha, +\infty[$ l'intervallo massimale d'esistenza con $\alpha \geq -\infty$. Ragionando analogamente a sopra, dovrà essere $x'(t) \sim 2\sqrt{c}\mathrm{e}^{|x(t)|/2}$ e ci si aspetta che le soluzioni non siano globalmente definite in passato. Più precisamente, se $\alpha = -\infty$, come prima dev'essere $\lim_{t\to-\infty} x(t) = -\infty$; se $\alpha \in \mathbb{R}$ per il Teorema della fuga dai compatti $\|(x(t), y(t)\| \to +\infty$ per $t \to \alpha^+$ da cui necessariamente $\lim_{t\to\alpha^+} x(t) = -\infty$ e $\lim_{t\to\alpha^+} y(t) = +\infty$. Dunque in ogni caso $\lim_{t\to\alpha^+} x(t) = -\infty$ e in un intorno destro di α del tipo $]\alpha, t_1]$ si avrà definitivamente $x^2(t) + c\,\mathrm{e}^{-x(t)} \leq 4c\,\mathrm{e}^{-x(t)}$ perciò $x'(t) \leq 4\sqrt{c}\,\mathrm{e}^{-x(t)/2} =: m_c(x(t))$,

per cui $x(t)$ è soprasoluzione in passato per la soluzione del problema di Cauchy $w' = m_c(w)$, $w(t_1) = x(t_1)$, la quale esplode in tempo finito in passato. Essendo $x(t) \geq w(t)$ per $t < t_1$ anche $x(t)$, e di conseguenza $y(t)$, esplodono in tempo finito. Per simmetria, se $y_0 < 0$ si ottengono analoghe considerazioni. Si può giungere alle medesime considerazioni anche studiando il tempo di percorrenza dell'orbita; per le soluzioni con $c > 0$ si ha

$$\int^{+\infty} \frac{1}{2\sqrt{x^2 + c\mathrm{e}^{-x}}}\, dx \sim \int^{+\infty} \frac{1}{2x}\, dx = +\infty,$$

dunque c'è esistenza globale in futuro, mentre

$$\int_{-\infty} \frac{1}{2\sqrt{x^2 + c\mathrm{e}^{-x}}}\, dx \sim \int_{-\infty} \frac{1}{2\sqrt{c}\,\mathrm{e}^{|x|/2}}\, dx < +\infty,$$

e non c'è esistenza globale in passato. In definitiva, ogni soluzione con dato iniziale appartente a F_c, con $c > 0$, è definita in un intervallo $]\alpha_c, +\infty[$ e l'orbita copre interamente la componente dell'insieme F_c a cui appartiene. Per terminare l'analisi, se $c < 0$ e il dato iniziale (x_0, y_0) appartiene alla componente di F_c situata nel semipiano $x > 0$, poiché su tale semipiano vale $|g(x)| \leq 2|x|$, si ha che il campo vettoriale è sublineare e ogni soluzioni ivi contenuta è globalmente definita in futuro e passato.

Analisi delle soluzioni del sistema (7.5)

Proseguiamo l'analisi del sistema

$$\begin{cases} x' = yz \\ y' = -xz \\ z' = -k^2 xy, \end{cases} \tag{12.3}$$

con $k > 0$ costante, già trattato nell'Esempio 7.5 dove si era verificato che $E^1(x, y, z) = x^2 + y^2$ e $E^2(x, y, z) = k^2x^2 + z^2$ sono due integrali primi e che tutte le soluzioni del sistema sono globalmente definite in futuro e passato. Studiamo ora la natura delle soluzioni; anzitutto ricordiamo che il campo vettoriale associato $g(x, y, z) = (yz, -xz, -k^2xy)$ è di classe $C^\infty(\mathbb{R}^3)$ quindi il sistema ha esistenza e unicità locale per i problemi di Cauchy associati. Gli equilibri sono tutti del tipo $P_1 = (x_0, 0, 0)$, $P_2 = (0, y_0, 0)$, $P_3 = (0, 0, z_0)$ al variare di $x_0, y_0, z_0 \in \mathbb{R}$ e coprono gli assi cartesiani. Valutiamone la stabilità lineare; poiché

$$Dg(x, y, z) = \begin{pmatrix} 0 & z & y \\ -z & 0 & -x \\ -k^2y & -k^2x & 0 \end{pmatrix},$$

si ha dunque

$$Dg(P_1) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -x_0 \\ 0 & -k^2 x_0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad Dg(P_2) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & y_0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -k^2 y_0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$Dg(P_3) = \begin{pmatrix} 0 & z_0 & 0 \\ -z_0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Tranne il caso in cui il punto coincide con l'origine, per cui il relativo differenziale è nullo, negli altri casi $x_0, y_0, z_0 \neq 0$. La prima matrice ha allora un autovalore nullo, uno positivo $k|x_0|$ e uno negativo $-k|x_0|$; la seconda matrice ha sempre un autovalore nullo mentre ha gli altri due autovalori $\pm ik|y_0|$ complessi coniugati con parte reale nulla; infine la terza matrice, come la seconda, ha un autovalore nullo e gli altri due complessi $\pm i|z_0|$ con parte reale nulla. Per il Teorema 6.23, tutti gli equilibri P_1 sono equilibri linearmente instabili, quelli del tipo P_2 e P_3 sono invece linearmente stabili. In questo caso il Teorema 6.22 non si può applicare, dunque nulla si può dire riguardo la stabilità nonlineare degli equilibri (sebbene ci si aspetti che almeno gli equilibri P_1 siano instabili).

Nell'Esempio 7.5 si è visto che le orbite delle soluzioni sono contenute nell'intersezione degli insiemi di livello $E^1_{c_1}$ e $E^2_{c_2}$, rispettivamente di E^1 ed E^2; più precisamente $(x(t), y(t), z(t)) \in E_{c_1,c_2} := E^1_{c_1} \cap E^2_{c_2}$, dove $c_1 = E^1(x_0, y_0, z_0) = x_0^2 + y_0^2$, $c_2 = E^2(x_0, y_0, z_0) = k^2 x_0^2 + z_0^2$, essendo (x_0, y_0, z_0) il dato iniziale al tempo $t_0 = 0$. Gli insiemi di livello di E^1 (quando non degeneri) sono dei cilindri di sezione circolare e asse coincidente con l'asse z, mentre quelli di E^2 sono cilindri di sezione ellittica e asse coincidente con l'asse y (si veda la Figura 12.14). Nel caso degli equilibri P_2 si ha

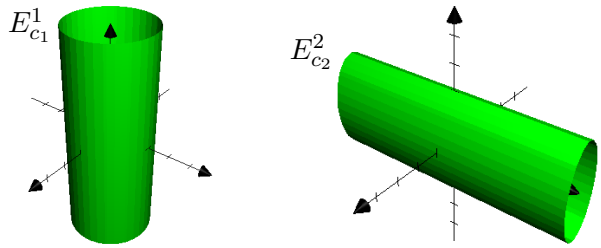


Figura 12.14: Insiemi di livello di E^1 e di E^2

$c_2 = 0$, perciò $E^2_{c_2}$ degenera nell'asse y mentre E_{c_1,c_2} si riduce alla coppia di equilibri $(0, \pm y_0, 0)$; analogamente per gli equilibri P_3 si ha $c_1 = 0$, $E^1_{c_1}$

degenera nell'asse z ed E_{c_1,c_2} si riduce alla coppia di equilibri $(0, 0, \pm z_0)$. Diverso sarà il caso degli equilibri P_1.

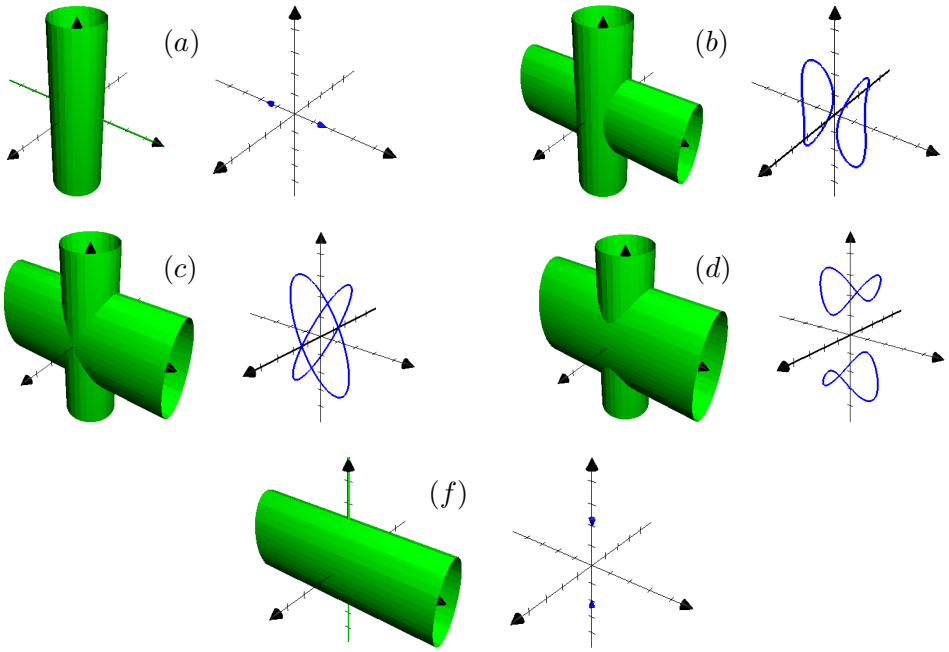


Figura 12.15: Possibili intersezioni tra gli insiemi di livello di E^1 e di E^2

In (a)-(f) di Figura 12.15 sono riportate le varie posizioni reciproche e le relative intersezioni tra gli insiemi di livello $E^1_{c_1}$ e $E^2_{c_2}$, rispettivamente di E^1 e E^2, al variare di $c_1, c_2 \geq 0$. Geometricamente si osserva che per quasi ogni orbita l'insieme $E_{c_1 c_2}$ corrispondente è formato da due curve chiuse semplici (casi (b) e (d)) prive di equilibri; fanno eccezione gli insiemi corrispondenti agli equilibri del tipo P_2 o P_3 che sono formati da una coppia di punti (casi (a) e (f)), oppure gli insiemi corrispondenti agli equilibri del tipo P_1 che sono unione di due curve chiuse semplici non disgiunte e che contengono esattamente due equilibri (caso (c)). Nei casi (b) e (d) le orbite sono sempre periodiche. Un argomento (non del tutto formalmente corretto) è il seguente: se un'orbita $\{(x(t), y(t), z(t)),\ t \in \mathbb{R}\}$ contenuta in una di queste curve chiuse non vi coincidesse, per connessione sarebbe un arco proprio di quest'ultima. Se tale arco possedesse uno dei due estremi, allora esisterebbe t_1 tale che $x'(t_1) = y'(t_1) = z'(t_1) = 0$ e l'estremo sarebbe un equilibrio, assurdo perché la curva non contiene equilibri. Allora l'arco deve essere aperto e gli estremi P_- e P_+ verranno raggiunti dall'orbita in tempo infinito. Si avrà

dunque $\lim_{t\to\pm\infty}(x(t), y(t), z(t)) = P_\pm$ e per il Corollario 6.11 del Criterio dell'asintoto P_- e P_+ saranno equilibri, ancora assurdo. Allora l'orbita della soluzione coincide con tutta la curva chiusa, dunque è periodica. Nel caso (c) esistono equilibri contenuti in $E_{c_1c_2}$ che lo dividono in 4 archi di curva semplice. In questo caso, per unicità, le orbite partenti fuori dagli equilibri non potranno attraversarli ma, per il Corollario 6.11 del Criterio dell'asintoto, si può vedere che vi tenderanno per $t \to \pm\infty$. Nel caso (c) si ottengono così delle orbite (non periodiche) eterocline che connettono per t tendente a $+\infty$ e $-\infty$ due equilibri distinti del tipo P_1 e simmetrici rispetto all'origine.

Vediamo ora di individuare meglio le intersezioni nel caso $c_1, c_2 > 0$. È possibile prendere x come parametro e risolvere le equazioni degli insiemi di livello in funzione di x, ottenendo che

(12.4)
$$(x, y, z) \in E^1_{c_1} \cap E^2_{c_2} \iff \begin{cases} x^2 + y^2 = c_1 \\ k^2x^2 + z^2 = c_2 \end{cases} \iff \begin{cases} y = \pm\sqrt{c_1 - x^2} \\ z = \pm\sqrt{c_2 - k^2x^2}, \end{cases}$$

ovvero una rappresentazione cartesiana dell'insieme intersezione $E_{c_1c_2}$ della forma $(x, y(x), z(x))$, che dunque è formato dall'unione di 4 archi di curve semplici che si uniscono a due a due in due curve chiuse semplici (si veda sempre la Figura 12.15, casi (b)–(d)). L'intervallo di definizione di tali curve è $[-\sqrt{c_1}, \sqrt{c_1}]$ se $k^2c_1 < c_2$, corrispondente al caso (d), mentre è $[-\sqrt{c_2}/k, \sqrt{c_2}/k]$ se $k^2c_1 \geq c_2$, corrispondente al caso (b) per $k^2c_1 < c_2$, al caso limite (c) per $k^2c_1 = c_2$.

Vediamo ora un'argomentazione analitica a supporto del fatto che tutte le orbite nei casi (b) e (d) sono periodiche. Dalla prima equazione $x' = yz$ del sistema e da (12.4) si ottiene

$$x' = \pm\sqrt{c_1 - x^2} \cdot \sqrt{c_2 - k^2x^2},$$

il segno in dipendenza dalla regione di spazio in cui ci si trova. Consideriamo il caso (d), per cui $k^2c_1 < c_2$, analogamente si ragiona nel caso (b). Nell'intervallo di definizione $[-\sqrt{c_1}, \sqrt{c_1}]$ si ha $r(x) = \sqrt{c_2 - k^2x^2} \geq \sqrt{c_2 - k^2c_1^2} > 0$ dunque $r(x)$ è strettamente positiva. Supposto di stare su un ramo della curva, per esempio quella per cui $y, z > 0$, il tempo per percorrere tale ramo è dato da

$$\tau = \int_0^\tau dt = \int_{-\sqrt{c_1}}^{\sqrt{c_1}} \frac{1}{x'}\, dx = \int_{-\sqrt{c_1}}^{\sqrt{c_1}} \frac{1}{r(x)\sqrt{\sqrt{c_1} + x} \cdot \sqrt{\sqrt{c_1} - x}}\, dx.$$

Tale integrale è improprio negli estremi $\pm\sqrt{c_1}$. Poiché vicino a tali punti la funzione integranda è asintotica a $|x \pm \sqrt{c_1}|^{-1/2}$, l'integrale è convergente, τ

è finito e ogni ramo dell'orbita viene percorso in tempo finito: l'orbita copre quindi l'intera componente connessa di $E_{c_1 c_2}$ dunque è periodica.

Più precisamente, vediamo qual è l'evoluzione dell'orbita partendo da un punto (x_0, y_0, z_0) tale che $k^2 c_1 < c_2$ ovvero $k^2(x_0^2 + y_0^2) < k^2 x_0^2 + z_0^2$ cioè $k^2 y_0^2 < z_0^2$. Per esempio si può partire da un punto con $x_0, z_0 > 0$ e $y_0 = 0$, per cui anche $x_0 = \sqrt{c_1}$. Essendo $y'(0) = -x(0)z(0) = -x_0 z_0 < 0$ si ha $y(t) < 0$ in un intorno destro di $t_0 = 0$. Sempre per continuità si ha anche $z(t) > 0$ su tale intorno, perciò da (12.4) segue che

$$y = -\sqrt{c_1 - x^2}, \quad z = \sqrt{c_2 - k^2 x^2}, \quad \text{da cui} \quad x' = -\sqrt{c_1 - x^2} \cdot \sqrt{c_2 - k^2 x^2};$$

inoltre poiché $z = \sqrt{c_2 - k^2 x^2} = r(x)$ non si annulla mai per $x \in [-x_0, x_0]$, z non cambia mai segno e $z(t) > 0$ per ogni t. In particolare i segni $\pm$ nelle equazioni per y e x' sussistono finché l'argomento della radice $\sqrt{c_1 - x^2}$ si annulla, nel qual caso qualche segno potrebbe cambiare. Inizialmente si ha $x'(0) = 0$, $y'(0) < 0$, $z'(0) = 0$; in particolare y è decrescente, e anche $x(t)$ è decrescente grazie alla relazione precedente (almeno finché l'equazione differenziale non "cambia" segno). Per quanto visto, in tempo finito τ si avrà $x(\tau) = -\sqrt{c_1} = -x_0$ da cui $y(\tau) = 0$ (in questo intervallo di tempo l'orbita ha coperto l'arco colorato in blu in Figura 12.16). In particolare, essendo $y(\tau) = 0$, $y'(\tau) = -x(\tau)z(\tau) > 0$, in un intorno destro di τ si avrà $y(t) > 0$ e di conseguenza $x'(t) > 0$, per cui su tale intorno destro di τ varrà

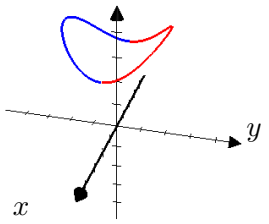


Figura 12.16: Esempio di orbita periodica del sistema

$$y = \sqrt{c_1 - x^2}, \quad z = \sqrt{c_2 - k^2 x^2}, \quad \text{da cui} \quad x' = \sqrt{c_1 - x^2} \cdot \sqrt{c_2 - k^2 x^2}.$$

Dunque $x(t)$ crescerà fino a raggiungere, (per simmetria) in un tempo τ, il valore x_0 tornando così al punto di partenza e completando l'orbita periodica (in questo intervallo di tempo l'orbita copre l'arco colorato in rosso in Figura 12.16). Di conseguenza, il periodo della soluzione periodica è 2τ.

Analizziamo ora il caso (c) di Figura 12.15 per cui $k^2 c_1 = c_2$. Da (12.4) si ottiene $z = \pm k y$, perciò ciascun ramo di $E_{c_1 c_2}$ è contenuto in un piano, come anche le corrispondenti orbite. Ragionando analogamente al caso precedente si ottiene

$$x' = \pm k(c_1 - x^2), \tag{12.5}$$

di conseguenza, scegliendo il segno +, si ha

$$\tau = \int_{-\sqrt{c_1}}^{\sqrt{c_1}} \frac{1}{k(\sqrt{c_1}-x)(\sqrt{c_1}+x)}\,dx = +\infty,$$

dunque la relativa soluzione ha l'orbita che connette in tempo infinito l'equilibrio $(\sqrt{c_1},0,0)$ con l'equilibrio $(-\sqrt{c_1},0,0)$. Si osservi che in questo caso è possibile trovare esplicitamente la soluzione; a tal fine è sufficiente integrare l'equazione (12.5). In termini dei dati iniziali, la condizione $k^2c_1 = c_2$ equivale a $k^2(x_0^2+y_0^2) = k^2x_0^2 + z_0^2$, ovvero $k^2y_0^2 = z_0^2$ mentre x_0 può essere qualsiasi (da questo discende che tutte le orbite delle soluzioni con dati iniziali tali che $z_0 = \pm y_0$ soddisfano $z(t) = \pm y(t)$ per ogni t dunque sono piane e i piani di equazione $z = -y$ e $z = y$ sono insiemi invarianti per il sistema considerato). Per esempio, fissato il dato iniziale (x_0, y_0, ky_0) con $x_0, y_0 > 0$ (per cui nelle equazioni si sceglierà sempre il segno +) integrando si ottiene

$$x(t) = \sqrt{c_1}\tanh\Big(\frac{k}{\sqrt{c_1}}t + \operatorname{settanh}\frac{x_0}{\sqrt{c_1}}\Big) = \frac{x_0+\sqrt{c_1}\tanh(kt/\sqrt{c_1})}{1+x_0\tanh(kt/\sqrt{c_1})/\sqrt{c_1}},$$

essendo $c_1 = x_0^2 + y_0^2$, e per (12.4) segue

$$\begin{aligned} y(t) &= \\ &= \sqrt{c_1 - \Big(\frac{x_0+\sqrt{c_1}\tanh(kt/\sqrt{c_1})}{1+x_0\tanh(kt/\sqrt{c_1})/\sqrt{c_1}}\Big)^2} = \frac{\sqrt{(c_1-x_0^2)(1-\tanh^2(kt/\sqrt{c_1}))}}{1+x_0\tanh(kt/\sqrt{c_1})/\sqrt{c_1}} \\ &= \frac{\sqrt{c_1-x_0^2}}{\cosh(kt/\sqrt{c_1})\big[1+x_0\tanh(kt/\sqrt{c_1})/\sqrt{c_1}\big]} \\ &= \frac{y_0}{\cosh(kt/\sqrt{c_1})+x_0\operatorname{senh}(kt/\sqrt{c_1})/\sqrt{c_1}}, \end{aligned}$$

e infine $z(t) = ky(t)$.

Altri esercizi

Esercizio 12.1 Detta $y(t)$ la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = \sqrt{|y+t|} \\ y(0) = 0, \end{cases}$$

già studiata negli Esercizi 4.20 e 6.17,

a) dimostrare che $y(t)$ non ammette derivata seconda per $t = 0$;

b) dimostrare che $w(t) = t^2/4$ è sottosoluzione per $t \geq 0$; trovare poi un'opportuna soprasoluzione per dimostrare che $y(t)$ è asintotica a $t^2/4$ per $t \to +\infty$;

c) trovare i primi due termini non nulli nello sviluppo di potenze (non necessariamente di esponente intero) di $y(t)$ in $t = 0$; validare analiticamente le proprie affermazioni.

Soluzione. a) Restringiamoci al caso $t > 0$, per $t < 0$ si procede analogamente. Anzitutto, poiché la funzione $t \mapsto \sqrt{|y(t) + t|}$ è continua si ha che $y(t)$ è di classe $C^1(\mathbb{R})$. Inoltre $y(0) = 0$ da cui $y'(0) = 0$, dunque per Taylor $y(t) = o(t)$ e si ha

$$\lim_{t\to 0^+} \frac{y'(t) - y'(0)}{t} = \lim_{t\to 0^+} \frac{\sqrt{y(t) + t}}{t} = \lim_{t\to 0^+} \sqrt{\frac{1 + o(t)/t}{t}} = +\infty,$$

perciò la derivata seconda in $t = 0$ è infinita.

b) Si noti che l'asintoticità di $y(t)$ a $t^2/4$ è già stata dimostrata con altri mezzi nell'Esercizio 6.17. Qui si vuole ottenere il medesimo risultato mediante il Teorema del confronto. Affinché $w(t)$ sia sottosoluzione di $y(t)$ dev'essere $w'(t) \leq f(t, w(t))$ per $t \geq 0$ cioè $t/2 \leq \sqrt{t^2/4 + t}$ che è banalmente verificata per $t \geq 0$, strettamente per $t > 0$. In questo caso è possibile applicare il secondo criterio del confronto per $t \geq 0$ perché è stato dimostrato in c) dell'Esercizio 4.20 che ogni problema di Cauchy ha unicità delle soluzioni; in definitiva $w(t)$ è sottosoluzione di $y(t)$.

Al fine di dimostrare l'asintoticità di $y(t)$ a $t^2/4$ basta ora trovare una soprasoluzione che si comporta come $t^2/4$ all'infinito. Il primo tentativo potrebbe essere del tipo $z(t) = t^2/4 + bt$ con $b > 0$, ma non funziona, per qualsiasi scelta di b. Infatti, la disequazione $z'(t) \geq f(t, z(t))$ equivale a

$$\frac{t}{2} + b \geq \sqrt{\frac{t^2}{4} + bt + t} \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{t^2}{4} + b^2 + bt \geq \frac{t^2}{4} + bt + t,$$

verificata solo per $t \leq b^2$. Si può allora provare con $z(t) = t^2/4 + bt^\alpha$ con $b > 0$ e $1 < \alpha < 2$ da determinare. Dovrà essere

$$\frac{t}{2} + \alpha b t^{\alpha-1} \geq \sqrt{\frac{t^2}{4} + bt^\alpha + t} \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{t^2}{4} + \alpha^2 b^2 t^{2(\alpha-1)} + \alpha b t^\alpha \geq \frac{t^2}{4} + bt^\alpha + t$$

$$\Longleftrightarrow \quad t(\alpha^2 b^2 t^{2\alpha-3} - 1) + (\alpha - 1) b t^\alpha \geq 0.$$

Il secondo termine è sempre non negativo; affinché lo sia anche il primo è sufficiente che $2\alpha - 3 = 0$ e $\alpha^2 b^2 \geq 1$, da cui $\alpha = 3/2$ e $b \geq 2/3$. Si ottiene

quindi che $w(t) = t^2/4+2t^{3/2}/3$ è soprasoluzione in futuro (si compari questo risultato col punto c)). Per confronto $w(t) \le y(t) \le z(t)$ per $t \ge 0$ da cui

$$\frac{1}{4} \le \frac{y(t)}{t^2} \le \frac{1}{4} + \frac{2}{3\sqrt{t}},$$

e passando al limite per $t \to +\infty$ si ottiene la tesi.

Alternativamente, si può cercare una soprasoluzione della forma $z(t) = at^2 + bt$ per qualche $b > 0$, $a > 1/4$; tale funzione dovrà verificare

$$2at + b \ge \sqrt{at^2 + bt + t} \quad \iff \quad 4a^2t^2 + b^2 + 4abt \ge at^2 + bt + t$$
$$\iff \quad a(4a-1)t^2 + (4ab - b - 1)t + b^2 \ge 0,$$

che è verificata per ogni $t \ge 0$ se per esempio $4a - 1 > 0$ e $4ab - b - 1 \ge 0$, cioè $a > 1/4$ e $b \ge 1/(4a-1)$. In definitiva, fissato un qualsiasi $a > 1/4$ esiste un $b = b_a$ tale che $z_a(t) := at^2 + b_a t$ è soprasoluzione per $t \ge 0$. Per confronto $w(t) \le y(t) \le z_a(t)$ da cui $1/4 \le y(t)/t^2 \le a + b_a/t$. Passando al $\liminf/\limsup$ per $t \to +\infty$ si ottiene

$$\frac{1}{4} \le \liminf_{t\to+\infty} \frac{y(t)}{t^2} \le \limsup_{t\to+\infty} \frac{y(t)}{t^2} \le a,$$

per ogni $a > 1/4$, e facendo poi tendere $a \to (1/4)^+$ si ottiene la tesi.

c) Poiché $y(t) = o(t)$ si ha

$$y'(t) = \sqrt{o(t) + t} = \sqrt{t} + o(\sqrt{t}),$$

e per integrazione si ottiene $y(t) = 2t^{3/2}/3+o(t^{3/2})$, quindi $2t^{3/2}/3$ è il primo termine nello sviluppo. Procedendo oltre si ha

$$y'(t)-\sqrt{t} = \sqrt{y(t)+t}-\sqrt{t} = \frac{y(t)}{\sqrt{y(t)+t}+\sqrt{t}} = \frac{2t\sqrt{t}/3 + o(t\sqrt{t})}{\sqrt{t+o(t)}+\sqrt{t}} = \frac{t}{3}+o(t),$$

e in definitiva $y'(t) = \sqrt{t} + t/3 + o(t)$. Integrando si ha

$$y(t) = \frac{2}{3}t^{3/2} + \frac{t^2}{6} + o(t^2),$$

che è lo sviluppo cercato. Si osservi che a tale risultato si poteva pervenire (formalmente) direttamente dall'equazione (4.2) o da quella equivalente per $z(t) = y(t) + t$ ovvero (per $z > 0$) $2\sqrt{z(t)} - 2\ln(1 + \sqrt{z(t)}) - t = 0$, dalla quale, essendo $z(0) = 0$ e sviluppando in serie il logaritmo, si ottiene

$$2\sqrt{z}-2\Big(\sqrt{z}-\frac{(\sqrt{z})^2}{2}+\frac{(\sqrt{z})^3}{3}-\dots\Big)-t = 0 \quad \Longrightarrow \quad 2\Big(\frac{z}{2}-\frac{z\sqrt{z}}{3}+\dots\Big)-t = 0.$$

Infatti, *supposto* che esista uno sviluppo del tipo $z(t) = at^\alpha + o(t^\alpha)$ per qualche $\alpha \geq 1$, si dovrà avere

$$2\Big(\frac{at^\alpha + o(t^\alpha)}{2} - \frac{(at^\alpha + o(t^\alpha))^{3/2}}{3} + \dots\Big) - t = 0 \quad \Longrightarrow \quad at^\alpha + o(t^\alpha) - t = 0,$$

da cui segue necessariamente $\alpha = a = 1$. Supposto ora che valga $z(t) = t + bt^\beta + o(t^\beta)$ con $\beta > 1$ si dovrà avere

$$2\Big(\frac{t + bt^\beta + o(t^\beta)}{2} - \frac{(t + bt^\beta + o(t^\beta))^{3/2}}{3} + \dots\Big) - t = 0 \quad \Longrightarrow$$
$$\Longrightarrow \quad bt^\beta - \frac{2}{3}t^{3/2} + o(t^{3/2}) + o(t^\beta) = 0,$$

da cui $\beta = 3/2$, $b = 2/3$. Infine, se $\gamma > 3/2$ e $z(t) = t + 2t^{3/2}/3 + ct^\gamma + o(t^\gamma)$

$$2\Big(\frac{t + \frac{2}{3}t^{3/2} + ct^\gamma + o(t^\gamma)}{2} - \frac{(t + \frac{2}{3}t^{3/2} + ct^\gamma + o(t^\gamma))^{3/2}}{3} +$$
$$+ \frac{(t + \frac{2}{3}t^{3/2} + ct^\gamma + o(t^\gamma))^2}{4} - \dots\Big) - t = 0$$

ed essendo

$$(t + \frac{2}{3}t^{3/2} + ct^\gamma + o(t^\gamma))^{3/2} = t\sqrt{t}\big(1 + \frac{2}{3}\sqrt{t} + o(\sqrt{t})\big)^{3/2}$$
$$= t\sqrt{t}\big(1 + \sqrt{t} + o(\sqrt{t})\big) = t\sqrt{t} + t^2 + o(t^2),$$

si ottiene

$$ct^\gamma - \frac{2}{3}t^2 + \frac{t^2}{2} + o(t^2) + o(t^\gamma) = 0,$$

da cui segue $\gamma = 2$ e $c = 2/3 - 1/2 = 1/6$, cioè

$$z(t) = t + \frac{2}{3}t^{3/2} + \frac{t^2}{6} + o(t^2) \quad \Longrightarrow \quad y(t) = \frac{2}{3}t^{3/2} + \frac{t^2}{6} + o(t^2).$$

Esercizio 12.2 Data l'equazione differenziale

$$y' = \sqrt{y^2 + t^2} - 2t \tag{12.6}$$

a) studiare l'esistenza e l'unicità locale/globale delle soluzioni;

b) rappresentare le regioni dove le soluzioni sono crescenti/decrescenti;

c) sia $y(t)$ la soluzione del problema di Cauchy con condizione iniziale $y(0) = -1$. Dimostrare che $y(t)$ è globalmente definita e definitivamente monotona per $t \to -\infty$ e per $t \to +\infty$;

d) calcolare i limiti $\lim_{t\to+\infty} y(t)$ e $\lim_{t\to-\infty} y(t)$ con $y(t)$ come in c).

e) Esistono soluzioni che tendono a $+\infty$ in tempo finito? E in tempo infinito? Esistono soluzioni che tendono a $+\infty$ esponenzialmente?

f) Dimostrare che l'unico eventuale asintoto obliquo per le soluzioni positive può essere la retta di equazione $y = \sqrt{3}t + 2$;

g) verificare che esiste almeno una soluzione che ha tale retta come asintoto; studiare in generale l'andamento asintotico di tutte le soluzioni;

h) provare che tutte le soluzioni definitivamente decrescenti hanno come asintoto la retta di equazione $y = -\sqrt{3}t + 2$.

Soluzione. a) Il campo vettoriale $f(t,y) = \sqrt{y^2+t^2} - 2t$ è di classe C^∞ in tutti i punti di $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, in particolare è ivi localmente lipschitziano rispetto a y. Si hanno dunque esistenza e unicità locale per le soluzioni dei problemi di Cauchy con dati iniziali $(t_0, y_0) \neq (0,0)$. In $(0,0)$ il campo vettoriale non è differenziabile ma è comunque lipschitziano; infatti più precisamente si ha $f(t,y) = \|(t,y)\| - 2t$ dove $\|(t,y)\|$ è la norma euclidea in $\mathbb{R}^2$, funzione lipschitziana rispetto alle sue variabili. In definitiva, anche il problema di Cauchy con dato iniziale $(0,0)$ ammette un'unica soluzione globale. Per quanto riguarda l'esistenza globale, ricordando la disuguaglianza della norma $\big|\|(t_1,y_1)\| - \|(t_2,y_2)\|\big| \leq \big\|(t_1-t_2, y_1-y_2)\big\|$, si ottiene

$$\big|f(t,y_1) - f(t,y_2)\big| = \big|\|(t,y_1)\| - \|(t,y_2)\|\big| \leq \big\|(0, y_1-y_2)\big\| = |y_1 - y_2|,$$

dunque f è globalmente 1-lipschitziana rispetto alla seconda variabile e valgono le ipotesi del Teorema di esistenza e unicità globale 4.13. In definitiva, ogni problema di Cauchy ammette un'unica soluzione globalmente definita in $\mathbb{R}$. Si osservi che per quanto riguardo l'esistenza globale (ma non l'unicità) si ha più semplicemente

$$|f(t,y)| \leq \sqrt{y^2+t^2} + 2|t| \leq |y| + 3|t|,$$

da cui la sublinearità di f e la possibilità di applicare il Teorema 4.12.

b) Se $t < 0$ banalmente si ha $f(t,y) > 0$, mentre se $t = 0$ si ha $f(t,y) > 0$ per ogni $y \neq 0$; inoltre $f(0,0) = 0$. Infine, se $t > 0$ riscrivendo il campo vettoriale come segue

$$f(t,y) = \frac{y^2 - 3t^2}{\sqrt{y^2+t^2} + 2t},$$

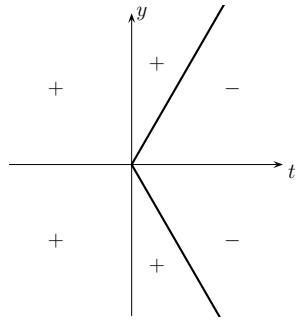


Figura 12.17: Segno del campo vettoriale dell'equazione (12.6)

si ha $f(t, y) \geq 0$ se e solo se $y^2 - 3t^2 \geq 0$ ovvero $|y| \geq \sqrt{3}|t|$. Il segno del campo vettoriale è rappresentato in Figura 12.17.

c) Sia $y(t)$ la soluzione massimale del problema in oggetto, globalmente definita in $\mathbb{R}$ per il punto a). Poiché $y'(0) = f(0, -1) > 0$ la soluzione è localmente crescente vicino a $t_0 = 0$ e rimane crescente finché non esce eventualmente dalla regione dove $f(t, y) > 0$. Posto $z(t) = -\sqrt{3}t$, per trasversalità esiste $t_1 > 0$ tale che $y(t_1) = z(t_1)$ e y entra nella regione in cui f è negativo, perciò y è localmente decrescente a destra di t_1. Verifichiamo che y non esce mai da tale regione, per cui è decrescente per ogni $t > t_1$. Utilizziamo il confronto con z: si ha $z'(t) = -\sqrt{3}$ e $f(t, z(t)) \equiv 0$, dunque $z'(t) < f(t, z(t))$ ed essendo anche $y(t_1) = z(t_1)$ segue che $z(t)$ è sottosoluzione di $y(t)$ per $t > t_1$ (analogamente si dimostra che $m(t) = \sqrt{3}t$ è soprasoluzione per l'equazione). Per il Teorema del confronto si ha $y(t) > z(t)$ per $t > t_1$, perciò $y'(t) < 0$ e $y(t)$ è decrescente per $t > t_1$.

Infine, se $t < 0$ il campo vettoriale è sempre positivo dunque $y(t)$, come ogni altra soluzione, è ivi banalmente strettamente crescente. Il grafico di $y(t)$ è qualitativamente rappresentato in Figura 12.18.

d) Per c) la soluzione è definitivamente decrescente per $t \to +\infty$ e crescente per $t \to -\infty$, dunque esistono i limiti $\lim_{t\to\pm\infty} y(t)$, diciamoli $y_{\pm\infty}$ rispettivamente. Se fosse $y_{+\infty} \in \mathbb{R}$ si avrebbe

$$\lim_{t\to+\infty} y'(t) = \lim_{t\to+\infty} \left(\sqrt{y^2(t) + t^2} - 2t\right) = \lim_{t\to+\infty} t\left(\sqrt{\frac{y^2(t)}{t^2} + 1} - 2\right) = -\infty,$$

assurdo per il Criterio dell'asintoto. Dunque necessariamente $y_{+\infty} = -\infty$. Analogamente si dimostra che $y_{-\infty} = -\infty$.

e) D'ora in avanti $y(t)$ denoterà la generica soluzione massimale di (12.6); si supporrà inoltre $t, y \geq 0$. Per il punto a) ogni soluzione è globalmente definita dunque non può esplodere in tempo finito. Per quanto riguarda

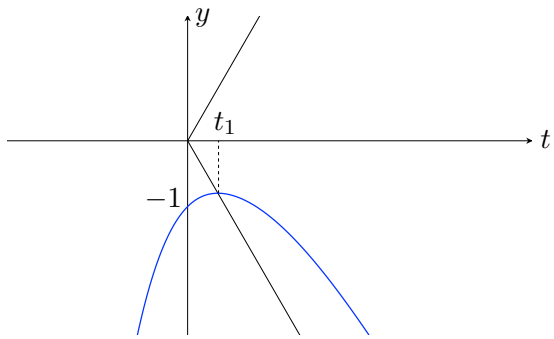


Figura 12.18: Il grafico della soluzione del punto c)

un'eventuale esplosione per $t \to +\infty$, ragioniamo come segue: se y è molto maggiore di t, anzi, di $2t$, si ha $\sqrt{y^2+t^2}-2t \sim y-2t \sim y$, perciò l'equazione in oggetto in tali condizioni si comporta asintoticamente come l'equazione $w' = w$ le cui soluzioni sono della forma $w(t) = ce^t$. Dunque ci si aspetta l'esistenza di soluzioni che esplodono esponenzialmente per $t \to +\infty$. Per verificarlo analiticamente si potrebbe provare a confrontare le soluzioni $y(t)$ con funzioni del tipo $w(t) = ce^t$, con $c > 0$. Purtroppo tali funzioni sono delle sopra e non sottosoluzioni, dunque non sono utili al fine di dimostrare che y tende all'infinito esponenzialmente. Infatti si verifica che per $y, t > 0$

$$f(t,y) = \sqrt{y^2+t^2} - 2t \le |y| + |t| - 2t = y - t < y,$$

dunque $f(t,y) < y$ e ogni soluzione con dati iniziali (t_0, y_0) con $t_0, y_0 > 0$ è una sottosoluzione della relativa soluzione di $w' = w$ che passa per il medesimo punto. La medesima disequazione implica anche che $w'(t) \ge f(t, w(t))$, perciò $w(t)$ è soprasoluzione dell'equazione in oggetto. In ogni caso quest'analisi dimostra che le soluzioni possono esplodere *al più* esponenzialmente.

Per verificare che y può effettivamente esplodere in tempo infinito si può provare inizialmente a dimostrare che esistono sottosoluzioni con andamento lineare crescente, da cui ovviamente la tesi. Presa dunque $w_a(t) = at$, con $a > 0$, imponiamo la condizione che w_a sia sottosoluzione per $t > 0$. Chiaramente il grafico di w dovrà essere contenuto nella regione $y > \sqrt{3}t$; ciò comporta $a > \sqrt{3}$ per cui $\sqrt{a^2+1} - 2 > 0$. Si ha dunque

$$w_a'(t) \le f(t, w_a(t)) \iff a \le \sqrt{a^2t^2+t^2} - 2t \iff t \ge t_a := \frac{a}{\sqrt{a^2+1}-2}.$$

Considerata quindi la soluzione $y(t)$ del problema di Cauchy relativa a un qualsiasi dato iniziale (t_0, y_0) con $t_0 \ge t_a$ e $y_0 \ge w_a(t_0)$, per il Teorema del confronto si avrà $y(t) > w_a(t) = at$ per $t \ge t_0$, da cui l'esplosione a $+\infty$ di $y(t)$ per $t \to +\infty$.

Si noti che l'insieme del piano dei punti "minimi" per cui la soluzione sta in futuro sopra la funzione lineare $w_a(t)$ è descritto dalla curva parametrica $a \mapsto (t_a, w_a(t_a)) = (t_a, at_a)$ con $a > \sqrt{3}$, il cui supporto è rappresentato e confrontato con la retta $y = \sqrt{3}t + 2$ in Figura 12.19. Volendo una

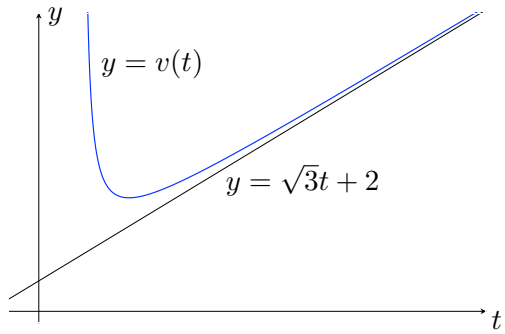


Figura 12.19: La sottosoluzione $v(t)$ per l'equazione (12.6)

rappresentazione cartesiana di tale curva del tipo $t \mapsto (t, v(t))$, basta invertire t_a, ottenere il parametro a in funzione di t e sostituirlo in $w_a(t_a)$. Più precisamente si trova

$$t = t_a \iff t(\sqrt{a^2+1} - 2) = a \iff t\sqrt{a^2+1} = a + 2t \iff$$
$$\iff t^2(a^2+1) = a^2 + 4at + 4t^2 \iff (t^2-1)a^2 - 4at - 3t^2 = 0$$
$$\implies a = a(t) = \frac{2t + \sqrt{3t^4 + t^2}}{t^2 - 1} = \frac{t(2 + \sqrt{1+3t^2})}{t^2-1},$$

dove si è anche utilizzato che $t > 1$ se e solo se $a > \sqrt{3}$. Si ottiene infine

$$v(t) := w_{a(t)}(t) = a(t)t = \frac{t^2(2 + \sqrt{1+3t^2})}{t^2-1}.$$

Intuitivamente t_a cresce al tendere di $a \to \sqrt{3}^+$ da destra (cioè decrescendo), perciò la funzione $a \to t_a$ dovrebbe essere decrescente (cosa che in effetti si può facilmente verificare), perciò ci si aspetta che $v(t)$ sia una sottosoluzione dell'equazione. Essenzialmente, per $t = t_a$ la derivata $w_a'(t)$ coincide col campo vettoriale nel punto e poiché t_a è decrescente il grafico di $v(t)$ sta sotto quello w_a per $t > t_a$, da cui $v'(t_a) < w_a'(t_a) = f(t_a, w_a(t_a)) = f(t_a, v(t_a))$. Più precisamente, essendo $a'(t) < 0$ si ha

$$v'(t) - f(t, v(t)) = a(t) + a'(t)t - f(t, w_{a(t)}(t)) = a'(t)t < 0.$$

Si potrebbe in effetti calcolare tale derivata, trovando

$$a'(t) = -\frac{2(t^2+1)\sqrt{1+3t^2} + 7t^2 + 1}{(t^2-1)^2\sqrt{1+3t^2}} (< 0),$$

sebbene in questo caso sia più comodo e veloce calcolare

$$\frac{dt_a}{da} = \frac{d}{da}\Big(\frac{a}{\sqrt{a^2+1}-2}\Big) = \frac{1-2\sqrt{a^2+1}}{\sqrt{a^2+1}(\sqrt{a^2+1}-1)^2} < 0,$$

ed essendo $a(t)$ la funzione inversa di t_a si ottiene nuovamente $da/dt < 0$.

L'utilità di $v(t)$ appare chiara osservando che mentre ciascuna $w_a(t)$ è asintotica (è uguale!) ad at con a strettamente maggiore di $\sqrt{3}$, si ha invece $v(t) \sim \sqrt{3}t$ per $t \to +\infty$. Più precisamente $v(t)$ ha come asintoto obliquo la retta $y = \sqrt{3}t + 2$, infatti

$$v(t) - (\sqrt{3}t + 2) = \frac{2+\sqrt{3}t}{t^2-1} + \frac{t^2}{(t^2-1)(\sqrt{1+3t^2}+\sqrt{3}t)},$$

che tende a 0^+ per $t \to +\infty$. Riassumendo, ci si trova nella situazione di avere una sottosoluzione, $v(t)$ per $t > 1$, che sta sopra una soprasoluzione, $m(t) = \sqrt{3}t$, entrambe asintotiche a $\sqrt{3}t$. Per un (ormai) classico procedimento, esiste una soluzione $\overline{y}(t)$ compresa tra le due, per confronto anch'essa asintotica a $\sqrt{3}t$, in particolare asintoticamente lineare.

Per verificare che esistono soluzioni che esplodono esponenzialmente, come già osservato, non è possibile percorrere la strada di trovare sottosoluzioni del tipo $w(t) = c\mathrm{e}^t$. Allo stesso tempo, se $y_0 \gg 2t_0$ le soluzioni hanno un comportamento asintotico governato dall'equazione $w' = w$, dunque con soluzioni effettivamente di tipo esponenziale. L'idea potrebbe allora essere quella di cercare sottosoluzioni della forma $w_\varepsilon(t) = 2c\mathrm{e}^{(1-\varepsilon)t}$ con $\varepsilon > 0$ (il fattore 2 è inserito solo per comodità), perché ci si aspetta che definitivamente le soluzioni $y(t)$ siano maggiori di $w_\varepsilon(t)$. Per esempio, per $\varepsilon = 1/2$ si ha che $\widetilde{w}(t) := w_{1/2}(t) = 2c\mathrm{e}^{t/2}$ è sottosoluzione per $t > 0$ se

$$\begin{gathered}\widetilde{w}'(t) \le f(t, \widetilde{w}(t)) \iff c\mathrm{e}^{t/2} \le \sqrt{4c^2\mathrm{e}^t + t^2} - 2t \iff \\ \iff c\mathrm{e}^{t/2} + 2t \le \sqrt{4c^2\mathrm{e}^t + t^2} \iff c^2\mathrm{e}^t + 4ct\mathrm{e}^{t/2} + 4t^2 \le 4c^2\mathrm{e}^t + t^2 \\ \iff p_c(t) := 3c^2\mathrm{e}^t - 4ct\mathrm{e}^{t/2} - 3t^2 \ge 0.\end{gathered}$$

Essendo $\lim_{t\to+\infty} p_c(t) = +\infty$ esiste $t_c > 0$ tale che per $t > t_c$ vale $p_c(t) > 0$ cioè $\widetilde{w}(t)$ è sottosoluzione. Come prima, presa la soluzione $y(t)$ del problema di Cauchy relativa a un dato iniziale (t_0, y_0) con $t_0 \ge t_c$ e $y_0 \ge \widetilde{w}(t_0)$, per il Teorema del confronto si avrà $y(t) > \widetilde{w}(t) = 2c\mathrm{e}^{t/2}$ per $t \ge t_0$, da cui l'esplosione esponenziale di $y(t)$ all'infinito per $t \to +\infty$.

Alternativamente, e la seguente è probabilmente la maniera più semplice di procedere per rispondere a entrambe le domande del quesito, si poteva

osservare che $f(t,y) > y - 2t$ per ogni $y, t > 0$, quindi ogni soluzione positiva di $y' = f(t,y)$ è soprasoluzione per le soluzioni di $z' = z - 2t$. Dal metodo per simiglianza, quest'ultima ha soluzioni del tipo $z(t) = c\mathrm{e}^t + 2t + 2$; per $c > 0$ si ha $z(t) > \sqrt{3}t$ per ogni $t > 0$ con $\lim_{t\to+\infty} z(t) = +\infty$ esponenzialmente, e per confronto con $z(t)$ si ottiene ancora l'esistenza di soluzioni che tendono esponenzialmente a $+\infty$. Si osservi che $c > 0$ corrisponde a $z(t_0) > 2t_0 + 2$. In definitiva, per confronto con $z(t)$ tutte le soluzioni dell'equazione (12.6) con dati iniziali $y_0 > 2t_0 + 2$ esplodono all'infinito esponenzialmente. Da questa analisi discende anche che tutte le soluzioni che tendono all'infinito meno che esponenzialmente devono avere grafico contenuto nella striscia $\sqrt{3}t < y \le 2t + 2$ dunque saranno necessariamente asintoticamente lineari (si veda anche l'analisi in g)).

Per terminare, si osservi che la disuguaglianza $f(t,y) \le y - t$ per ogni $y, t > 0$, implica che ogni soluzione positiva di $y' = f(t,y)$ è sottosoluzione per le soluzioni di $w' = w - t$, ovvero del tipo $w(t) = c\mathrm{e}^t + t + 1$; per $c \le 0$ tali funzioni hanno grafico definitivamente contenuto nel semipiano $y < \sqrt{3}t$. Di conseguenza, preso $w(t_0) = y_0$, le soluzioni con dati $y_0 \le t_0 + 1$ verificheranno $y(t) \le w(t) = (y_0 - t_0 - 1)\mathrm{e}^{t-t_0} + t + 1$ (almeno finché sono positive) e definitivamente entreranno nella regione $|y| \le \sqrt{3}t$ per cui, grazie all'analisi in c), tenderanno a $-\infty$ per $t \to +\infty$.

f) Più in generale verifichiamo che gli unici possibili asintoti rettilinei per una soluzione sono le rette di equazione $y = \pm\sqrt{3}t + 2$. Infatti, supponendo che $r(t) := y(t) - (at + b) = o(1)$ per $t \to +\infty$, con $a, b \in \mathbb{R}$, ovvero che la retta di equazione $y = at + b$ sia un asintoto per la soluzione $y(t)$, si ottiene la seguente equazione per $r(t)$:

$$\begin{aligned} r'(t) = y'(t) - a &= \sqrt{y^2(t) + t^2} - 2t - a = \sqrt{(r(t) + at + b)^2 + t^2} - (2t + a) \\ &= \frac{(r(t) + b)^2 - a^2 + 2a(r(t) + b - 2)t + (a^2 - 3)t^2}{2t + a + \sqrt{(r(t) + at + b)^2 + t^2}}. \end{aligned}$$

Dalla condizione $r(t) \to 0$ per $t \to +\infty$, passando al limite si ottiene

$$\lim_{t\to+\infty} r'(t) = \frac{2a(b-2)}{2 + \sqrt{a^2 + 1}} + \operatorname{sgn}(a^2 - 3)\infty.$$

Per il criterio dell'asintoto dev'essere necessariamente $a^2 - 3 = 0$, $a(b-2) = 0$ cioè $a = \pm\sqrt{3}$ e $b = 2$, da cui la tesi.

g) Rimane aperta la questione di capire quali soluzioni tendono all'infinito esponenzialmente e se, oltre alla $\overline{y}(t)$ trovata nel punto e), esistono altre soluzioni che tendono linearmente all'infinito. Anzitutto, quale può essere il comportamento asintotico delle soluzioni che esplodono? Ovviamente non

possono avere un comportamento sublineare, altrimenti definitivamente le traiettorie entrerebbero nella regione $y < \sqrt{3}t$ e non potrebbero tendere a $+\infty$. Dal punto precedente si è poi visto che l'unico asintoto obliquo possibile per le soluzioni positive è la retta di equazione $y = \sqrt{3}t + 2$. Vediamo ora che tutte le soluzioni asintoticamente lineari (tra le quali ci sono quelle che ammettono un asintoto, ma non viceversa, perché?) soddisfano $y(t) \sim \sqrt{3}t$. L'analisi sarà più dettagliata, investigando in generale i possibili comportamenti asintotici delle soluzioni. Studiando l'equazione per $z(t) = y(t)/t$ si scopre che

$$z'(t) = \frac{y'(t)}{t} - \frac{y(t)}{t^2} = \frac{1}{t}(\sqrt{y^2(t) + t^2} - 2t) - \frac{z(t)}{t} = \sqrt{z^2(t) + 1} - 2 - \frac{z(t)}{t}.$$

Se $\lim_{t\to+\infty} z(t) = +\infty$, passando al limite nella relazione precedente si ha

$$\lim_{t\to+\infty} z'(t) = \lim_{t\to+\infty} z(t)\Big(\sqrt{1 + 1/z^2(t)} - \frac{2}{z(t)} - \frac{1}{t}\Big) = +\infty,$$

che è compatibile col limite $\lim_{t\to+\infty} z(t) = +\infty$; ciò dice che a priori l'equazione differenziale permette l'esistenza di eventuali soluzioni superlineari. Se, invece, $\lim_{t\to+\infty} z(t) = \lim_{t\to+\infty} y(t)/t = \lambda \in \mathbb{R}$, passando sempre al limite si ottiene

$$\lim_{t\to+\infty} z'(t) = \lim_{t\to+\infty} \Big(\sqrt{z^2(t) + 1} - 2 - \frac{z(t)}{t}\Big) = \sqrt{\lambda^2 + 1} - 2.$$

Per il Criterio dell'asintoto dev'essere $\sqrt{\lambda^2 + 1} - 2 = 0$ da cui $\lambda = \sqrt{3}$ oppure $\lambda = -\sqrt{3}$ e $\lim_{t\to+\infty} y(t)/t = \pm\sqrt{3}$, dunque le eventuali soluzioni asintoticamente lineari e positive di (12.6) dovranno verificare $y(t) \sim \sqrt{3}t$. Questa analisi comporta anche che non possono esistere soluzioni asintoticamente strettamente sublineari (come d'altronde già osservato nel punto e)). Si osservi che più in generale, posto $z_p(t) = y(t)/t^p$ con $p > 1$, si ottiene

$$z_p' = \frac{y'}{t^p} - \frac{py}{t^{p+1}} = \frac{1}{t^p}(\sqrt{y^2 + t^2} - 2t) - p\frac{z_p}{t} = \sqrt{z_p^2 + t^{2(1-p)}} - \frac{2}{t^{p-1}} - p\frac{z_p}{t}.$$

Come sopra se $z_p(t) \to \lambda_p \in \mathbb{R}$, passando al limite per $t \to +\infty$ e grazie al Criterio dell'asintoto si ottiene $0 = \lim_{t\to+\infty} z_p'(t) = |\lambda_p|$. Se, invece, $z_p(t) \to +\infty$ allora $z_p'(t) \to +\infty$. In altre parole non esistono soluzioni che siano asintotiche a t^p per $p > 1$, mentre soluzioni che crescono più rapidamente di t^p per ogni scelta di $p > 1$ sono compatibili con l'equazione differenziale. Ciò suggerisce che potrebbero esistere soluzioni che crescono almeno esponenzialmente, fatto confermato dall'analisi in e).

Si noti che per dimostrare l'esistenza del limite $\lim_{t\to+\infty} y(t)/t$, per il Teorema di de L'Hôpital è sufficiente verificare l'esistenza di $\lim_{t\to+\infty} y'(t)$; per quest'ultimo, per esempio, ci si può ricondurre a studiare la derivata seconda di $y(t)$. Poiché

$$\begin{aligned} y'' &= \big(\sqrt{y^2+t^2}-2t\big)' = \frac{2yy'+2t}{2\sqrt{y^2+t^2}} - 2 \\ &= \frac{y\big(\sqrt{y^2+t^2}-2t\big)+t}{\sqrt{y^2+t^2}} - 2 = \frac{(y-2)\sqrt{y^2+t^2}+t(1-2y)}{\sqrt{y^2+t^2}}, \end{aligned}$$

si ha dunque $y'' \geq 0$ sse $(y-2)\sqrt{y^2+t^2} \geq t(2y-1)$. Tale disequazione si può risolvere rispetto a t. Più precisamente e restringendosi agli $y, t > 0$, se $1/2 < y \leq 2$ il primo membro è negativo il secondo positivo, dunque non è mai verificata; se $y > 2$ si può elevare al quadrato ottenendo

$$\begin{aligned} (y-2)^2(y^2+t^2) \geq t^2(2y-1)^2 \quad &\iff \quad y^2(y-2)^2 \geq 3t^2(y^2-1) \\ &\iff \quad t \leq \frac{y(y-2)}{\sqrt{3(y^2-1)}} =: h(y). \end{aligned}$$

Infine, se $0 < y \leq 1/2$ si può elevare al quadrato la disequazione equivalente $(2-y)\sqrt{y^2+t^2} \leq t(1-2y)$ ottenendo con calcoli analoghi $y^2(y-2)^2 \leq 3t^2(y^2-1)$ che non è mai verificata (il primo membro è positivo, il secondo negativo). In definitiva, le soluzioni sono concave nella striscia $0 < y \leq 2$, $t > 0$, e per $y > 2$, $t \geq h(y)$, si veda la Figura 12.20. Si noti che

$$h(y) - \frac{y-2}{\sqrt{3}} = \frac{y-2}{\sqrt{3}}\Big(\frac{y}{\sqrt{y^2-1}} - 1\Big) = \frac{y-2}{\sqrt{3(y^2-1)}(y+\sqrt{y^2-1})},$$

da cui

$$\lim_{y\to+\infty}\Big(h(y) - \frac{y-2}{\sqrt{3}}\Big) = 0^+$$

e $t = h(y)$ ha come asintoto la retta di equazione $t = (y-2)/\sqrt{3}$; passando alle funzioni inverse si ottiene che $y = h^{-1}(t)$ è asintotica all'inversa di $t = (y-2)/\sqrt{3}$ ovvero $h^{-1}(t) \sim \sqrt{3}t + 2$ anzi, analogamente a $v(t)$, ha proprio tale retta come asintoto, si veda la Figura 12.20.

Dall'analisi appena vista si ha che y'' ha un segno ben definito, quindi y' è monotona e ammette limite, per tutte le soluzioni interamente contenute in una delle due regioni del primo quadrante divise dal grafico di $t = h(y)$.

Sarebbe anche interessante valutare $y = h^{-1}(t)$ come eventuale sopra o sottosoluzione dell'equazione differenziale; purtroppo l'inversa di h non è

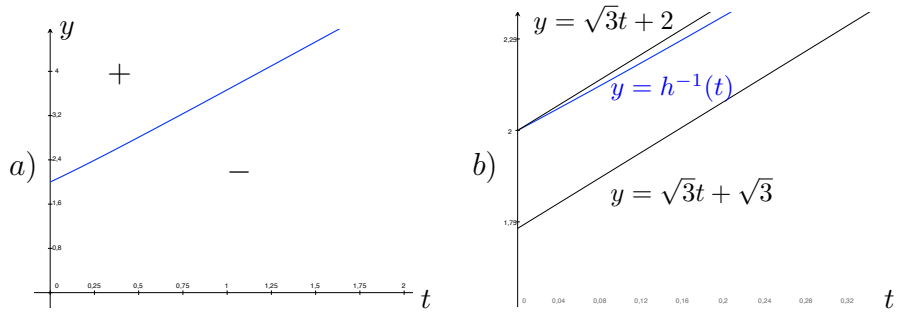


Figura 12.20: a) il grafico della funzione $y = h^{-1}(t)$ e il segno di $y''(t)$; b) confronto tra le funzioni $y = h^{-1}(t)$, $y = \sqrt{3}t + 2$, $y = \sqrt{3}t + \sqrt{3}$

esprimibile elementarmente. Si può però osservare che, almeno formalmente,

$$\frac{dy}{dt} \leq f(t, y) \qquad \Longleftrightarrow \qquad \frac{dt}{dy} \geq \frac{1}{f(t, y)}$$

cioè scambiando il ruolo delle due variabili dipendente e indipendente, una sottosoluzione in futuro per l'equazione $\frac{dy}{dt} = f(t, y)$ è equivalente a una soprasoluzione per l'equazione $\frac{dt}{dy} = \frac{1}{f(t,y)}$. Si osservi che tale cambio di variabili è giustificato nelle regioni dove le soluzioni $y(t)$ sono strettamente monotone, nel nostro caso crescenti, ovvero dove $f(t, y) > 0$, per esempio nella regione di piano $y > \sqrt{3}t > 0$. Di conseguenza, $y = h^{-1}(t)$ è sottosoluzione di (12.6) se e solo se $t = h(y)$ è soprasoluzione dell'equazione

$$\frac{dt(y)}{dy} = \frac{1}{\sqrt{y^2 + t^2(y)} - 2t(y)}.$$

Con (molta pazienza e) molti calcoli si potrebbe verificare che è effettivamente una soprasoluzione.

Procediamo ora con l'analisi asintotica: visto il ruolo giocato dalle funzioni $y = \sqrt{3}t + 2$ e $y = \sqrt{3}t$ nel punto e), viene spontaneo provare a cercare sopra e sottosoluzioni di (12.6) tra le funzioni della forma $z_b(t) = \sqrt{3}t + b$, con $b \geq 0$. Come in precedenza z_b è soprasoluzione se

$$z_b'(t) \geq f(t, z_b(t)) \iff \sqrt{3} \geq \sqrt{(\sqrt{3}t + b)^2 + t^2} - 2t \iff$$
$$\iff \sqrt{3} + 2t \geq \sqrt{4t^2 + 2b\sqrt{3}t + b^2} \iff 2\sqrt{3}(2 - b)t \geq b^2 - 3.$$

Se $b \leq \sqrt{3}$ tale disequazione è banalmente verificata per ogni $t \geq 0$ dunque z_b è ivi soprasoluzione; se $\sqrt{3} < b < 2$ la disequazione è verificata per

$t > t_b := (b^2-3)/(2\sqrt{3}(2-b))$ quindi z_b è definitivamente soprasoluzione. Infine, se $b \geq 2$ la disequazione non è mai verificata, ovvero è sempre vera la disequazione col verso scambiato, cioè z_b è sottosoluzione per $b \geq 2$. In particolare $z_{\sqrt{3}}(t) = \sqrt{3}t + \sqrt{3}$ è una soprasoluzione che sta sotto la sottosoluzione $z_2(t) = \sqrt{3}t + 2$, dunque (per il solito principio) esisterà almeno una soluzione $\overline{y}(t)$ (possibilmente coincidente con quella individuata in e)) che è compresa tra le due per ogni $t > 0$. Come precedentemente fatto per le w_a, è poi possibile costruire un'altra soprasoluzione a partire dalle z_b con $\sqrt{3} < b < 2$. Osservando che intuitivamente t_b dovrebbe essere crescente rispetto a b, ci si aspetta che la funzione il cui grafico coincide col supporto della curva definita implicitamente da $b \mapsto (t_b, z_b(t_b))$ sia soprasoluzione per ogni $t > 0$. Come in precedenza, invertendo la relazione $t = t_b$ si ottiene

$$\begin{aligned} t = t_b \iff 2\sqrt{3}(2-b)t = b^2-3 \iff b^2 + 2\sqrt{3}tb - (3+4\sqrt{3}t) = 0 \\ \implies b = b(t) = \sqrt{3t^2+4\sqrt{3}t+3} - \sqrt{3}t, \end{aligned}$$

dove si è utilizzato che $b > \sqrt{3}$, e si definisce

$$u(t) := z_{b(t)}(t) = \sqrt{3}t + b(t) = \sqrt{3t^2+4\sqrt{3}t+3}.$$

Come aspettato $b(t)$ è crescente per $t > 0$, infatti

$$\begin{aligned} b'(t) &= \frac{6t+4\sqrt{3}}{2\sqrt{3t^2+4\sqrt{3}t+3}} - \sqrt{3} \\ &= \frac{3}{\left(3t+2\sqrt{3}+\sqrt{9t^2+12\sqrt{3}t+9}\right)\sqrt{3t^2+4\sqrt{3}t+3}} > 0, \end{aligned}$$

ma si poteva calcolare anche

$$\frac{dt_b}{db} = \frac{1}{2\sqrt{3}} \cdot \frac{d}{db}\Big(\frac{b^2-3}{2-b}\Big) = \frac{(b-1)(3-b)}{2\sqrt{3}(2-b)^2} > 0 \text{ per } \sqrt{3} < b < 2,$$

da cui ancora $db/dt > 0$ per i corrispondenti t. Allora $u(t)$ è soprasoluzione, essendo

$$u'(t) - f(t, u(t)) = \sqrt{3} + b'(t) - f(t, z_{b(t)}(t)) = b'(t) > 0.$$

Poiché $u(t) < \sqrt{3}t + 2$, infatti

$$\sqrt{3}t + 2 - u(t) = \frac{1}{\sqrt{3}t + 2 + \sqrt{3t^2+4\sqrt{3}t+3}} > 0,$$

e $u(t)$ ha come asintoto la medesima retta $y = \sqrt{3}t + 2$, ciò restringe la ricerca delle soluzioni asintoticamente lineari $\overline{y}(t)$ alla regione definita da $u(t) < y < \sqrt{3}t + 2$, notevolmente più ristretta rispetto alla precedente $\sqrt{3}t + \sqrt{3} < y < \sqrt{3}t + 2$, si veda la Figura 12.21.

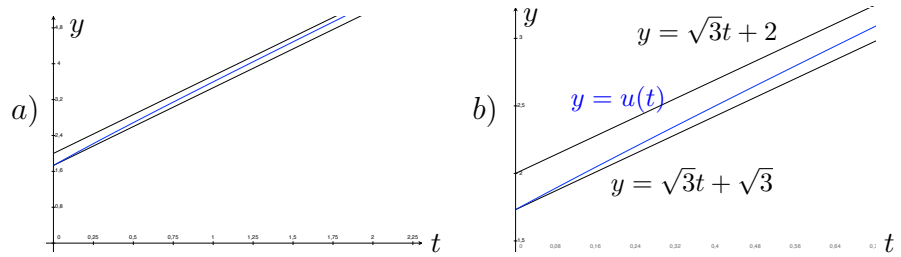


Figura 12.21: a) Il grafico della funzione $y = u(t)$ confrontato con le funzioni $y = \sqrt{3}t + 2$, $y = \sqrt{3}t + \sqrt{3}$; b) un ingrandimento

Osserviamo una proprietà della funzione $u(t)$. L'insieme dei punti del primo quadrante dove il campo vettoriale f ha la direzione della retta di equazione $y = \sqrt{3}t + 2$ è identificato da $f(t, y) = \sqrt{3}$ con $y, t > 0$, ovvero

$$\sqrt{y^2 + t^2} = 2t + \sqrt{3} \quad \Longleftrightarrow \quad y^2 = 3t^2 + 4\sqrt{3}t + 3,$$

quindi tale insieme coincide proprio col grafico di $u(t)$. Inoltre, risolvendo l'equazione $y = \sqrt{3t^2 + 4\sqrt{3}t + 3}$ rispetto a $t > 0$ si ottiene

$$3t^2 + 4\sqrt{3}t + 3 - y^2 = 0 \quad \Longrightarrow \quad t = u^{-1}(y) = \frac{\sqrt{1 + y^2} - 2}{\sqrt{3}}.$$

Comparando $u^{-1}(y)$ con la funzione $h(y)$ ottenuta studiando la convessità, con un po' di calcoli si trova che

(12.7)

$$\begin{aligned} u^{-1}(y) - h(y) &= \frac{\sqrt{1 + y^2} - 2}{\sqrt{3}} - \frac{y(y-2)}{\sqrt{3(y^2 - 1)}} = \\ &= \big(8y^2(y-2)(2y-1) + 9\big) \Big/ \Big(\big(\sqrt{y^4 - 1} + 2\sqrt{y^2 - 1} + y(y-2)\big) \\ &\qquad \sqrt{3(y^2 - 1)}\big(4y^2(y-2) + 3 + 4y(y-2)\sqrt{y^2 - 1}\big)\Big), \end{aligned}$$

che è positivo per $y > 2$, essendo ogni fattore positivo. Da ciò discende che il sottografico di $u(t)$ è tutto contenuto nella regione di concavità delle soluzioni dell'equazione differenziale. Essendo $u(t)$ una soprasoluzione, per confronto segue che in futuro ogni soluzione $y(t)$ con dati $y_0 \leq u(t_0)$ ha il

grafico contenuto nella regione $y < u(t)$ dunque, come funzione, è concava. Siccome $y_0 \leq u(t_0)$ si ha $y'(t_0) = f(t_0, y_0) \leq \sqrt{3}$, e poiché $y(t)$ è concava $y'(t)$ è decrescente per cui, finché $y(t)$ ha grafico nel primo quadrante, si avrà $y'(t) < \sqrt{3}$. Ciò implica che il grafico di $y(t)$ intersecherà la retta di equazione $y = \sqrt{3}t$ in tempo finito, da cui $\lim_{t\to+\infty} y(t) = -\infty$, e tutte queste soluzioni non potranno esplodere a $+\infty$. D'altro canto tutte le soluzioni con dati iniziali sopra la retta di equazione $y = 2t + 2$ esplodono esponenzialmente. Resta da comprendere cosa succede per le soluzioni con dati iniziali tra le due rette, ovvero in $\sqrt{3}t + 2 < y < 2t + 2$. Poiché $y = \sqrt{3}t + 2$ è sottosoluzione in futuro, l'insieme $y \geq \sqrt{3}t + 2$ è invariante in futuro per la soluzione; inoltre per $y \geq \sqrt{3}t + 2$ si ha

$$\begin{aligned} f(t, y) \geq f(t, \sqrt{3}t + 2) &= \sqrt{4t^2 + 4\sqrt{3}t + 4} - 2t \\ &= \frac{4\sqrt{3}t + 4}{2t + \sqrt{4t^2 + 4\sqrt{3}t + 4}} > \sqrt{3}, \end{aligned}$$

per ogni $t \geq 0$. La regione $y \geq \sqrt{3}t + 2$ è contenuta nell'insieme di convessità per le soluzioni, per cui $y'(t_0) > \sqrt{3}$ e y' crescente implicano che $\exists \lim_{t\to+\infty} y'(t) > \sqrt{3}$. Ma allora necessariamente $\lim_{t\to+\infty} y'(t) = +\infty$ e definitivamente la soluzione entrerà nella regione $y > 2t+2$ per cui esploderà esponenzialmente per $t \to +\infty$. Alternativamente, senza volere utilizzare l'analisi asintotica a priori, essendo $y'(t_0) > \sqrt{3}$ e $y'(t)$ crescente si avrà che esiste $t_1 > t_0$ per cui $y(t_1) = \sqrt{3}t_1 + 4/\sqrt{3}$; analogamente a prima, per $t \geq t_1$ si avrà

$$f(t, y) \geq f(t, \sqrt{3}t + 4/\sqrt{3}) = \frac{8t + 16/3}{2t + \sqrt{4t^2 + 8t + 16/3}} > 2,$$

ed essendo $y'(t)$ sempre crescente, definitivamente per $t > t_1$ il grafico della soluzione $y(t)$ intersecherà quello della retta $y = 2t + 2$, ottenendo nuovamente l'esplosione esponenziale all'infinito della soluzione.

In conclusione, le soluzioni con andamento asintoticamente lineare devono essere cercate tra quelle con dati iniziali (e grafico) contenuti nella regione $u(t) < y < \sqrt{3}t + 2$, o ancora meglio in $u(t) < y < h^{-1}(t) =: \omega(t)$. Tra queste ce n'è almeno una, diciamola $\overline{y}(t)$. In ogni caso, o una soluzione esce definitivamente da questa regione (e allora esplode a $-\infty$ o esponenzialmente a $+\infty$) oppure ha il grafico sempre ivi contenuto e avrà come asintoto la retta $y = \sqrt{3}t + 2$; non sembra però semplice distinguere tra questi due casi a partire solamente dai dati iniziali, seppure contenuti in $u(t) < y < \omega(t)$.

Le limitazioni trovate permettono anche di individuare lo sviluppo asintotico di (o delle) $\overline{y}$ in serie di potenze : essendo $u(t) < \overline{y}(t) < \omega(t)$ ba-

sta trovare gli sviluppi di $u(t)$ e $\omega(t)$ per $t \to +\infty$. Per $u(t)$ non ci sono particolari difficoltà: il suo sviluppo fino all'ordine $1/t^2$ è

$$\begin{aligned} u(t) &= \sqrt{3t^2 + 4\sqrt{3}t + 3} = \sqrt{3}t\sqrt{1 + \frac{4}{\sqrt{3}t} + \frac{1}{t^2}} \\ &= \sqrt{3}t\left[1 + \frac{1}{2}\Big(\frac{4}{\sqrt{3}t} + \frac{1}{t^2}\Big) - \frac{1}{8}\Big(\frac{4}{\sqrt{3}t} + \frac{1}{t^2}\Big)^2 + \frac{1}{16}\Big(\frac{4}{\sqrt{3}t} + \frac{1}{t^2}\Big)^3 + o(\frac{1}{t^3})\right] \\ &= \sqrt{3}t + 2 - \frac{1}{2\sqrt{3}t} + \frac{1}{3t^2} + o(1/t^2). \end{aligned}$$

Per quanto riguarda $y = \omega(t) = h^{-1}(t)$ lo sviluppo è più complicato perché non se ne possiede una forma esplicita, la quale pero esiste per $t = h(y)$. Si può procedere per esempio in due modi: il primo, si sviluppa anzitutto $h(y)$, ottenendo (per facilità fino all'ordine $1/y$, ma si può fare l'analogo per lo sviluppo fino all'ordine $1/y^2$ e oltre)

$$\begin{aligned} t = h(y) &= \frac{y(y-2)}{\sqrt{3(y^2-1)}} = \frac{y(y-2)}{\sqrt{3}y\sqrt{1-1/y^2}} = \frac{y-2}{\sqrt{3}}(1-1/y^2)^{-1/2} \\ &= \frac{y-2}{\sqrt{3}}\Big(1 - \frac{1}{2}\cdot\Big(-\frac{1}{y^2}\Big) + o(1/y^2)\Big) = \frac{y-2}{\sqrt{3}} + \frac{1}{2\sqrt{3}y} + o(1/y). \end{aligned}$$

A questo punto essendo $y = h^{-1}(t) = \sqrt{3}t + o(t)$ allora $o(1/t^p) = o(1/y^p)$ per ogni p, e dalla relazione sopra segue

$$t = h(y) = \frac{y-2}{\sqrt{3}} + \frac{1}{2\sqrt{3}(\sqrt{3}t + o(t))} + o(1/t) = \frac{y-2}{\sqrt{3}} + \frac{1}{6t} + o(1/t),$$

da cui, riordinando i termini, si ottiene il seguente sviluppo per $\omega(t)$

$$\omega(t) = h^{-1}(t) = y = \sqrt{3}t + 2 - \frac{1}{2\sqrt{3}t} + o(1/t).$$

Alternativamente si può procedere come segue. L'equazione $t = h(y)$ equivale a $y^2(y-2)^2 + 3t^2(1-y^2) = 0$. Volendo trovare lo sviluppo fino al termine $1/t^2$, *supponendo* che la soluzione $y = h^{-1}(t)$ di tale equazione abbia un'espansione del tipo $y = \sqrt{3}t + 2 + c/t + d/t^2 + o(1/t^2)$, si ottiene

$$\begin{aligned} &\Big(\sqrt{3}t + 2 + \frac{c}{t} + \frac{d}{t^2} + o(\frac{1}{t^2})\Big)^2\Big(\sqrt{3}t + \frac{c}{t} + \frac{d}{t^2} + o(\frac{1}{t^2})\Big)^2 + \\ &\qquad + 3t^2\Big(1 - \Big(\sqrt{3}t + 2 + \frac{c}{t} + \frac{d}{t^2} + o(\frac{1}{t^2})\Big)^2\Big) = 0, \end{aligned}$$

ovvero

$$\Big(3t^2+4+4\sqrt{3}t+2c\sqrt{3}+\frac{2d\sqrt{3}}{t}+\frac{4c}{t}+O(\frac{1}{t^2})\Big)\Big(3t^2+2c\sqrt{3}+\frac{2d\sqrt{3}}{t}+O(\frac{1}{t^2})\Big)$$
$$+3t^2\Big(1-\Big(3t^2+4+4\sqrt{3}t+2c\sqrt{3}+\frac{2d\sqrt{3}}{t}+\frac{4c}{t}+O(\frac{1}{t^2})\Big)\Big)=0,$$

da cui

$$3(2c\sqrt{3}+1)t^2+6(d\sqrt{3}+4c)t+O(1)=0.$$

Affinché tale relazione sia soddisfatta deve necessariamente essere

$$\begin{cases}2c\sqrt{3}+1=0\\ d\sqrt{3}+4c=0,\end{cases}$$

da cui $c=-1/(2\sqrt{3})$, $d=2/3$, per cui lo sviluppo diventa

$$\omega(t)=h^{-1}(t)=\sqrt{3}t+2-\frac{1}{2\sqrt{3}t}+\frac{2}{3t^2}+o\big(\frac{1}{t^2}\big).$$

Si osservi che $u(t)$ e $\omega(t)$ hanno lo stesso sviluppo fino all'ordine $1/t$ per cui ci si aspetta che anche $\overline{y}(t)=\sqrt{3}t+2-1/(2\sqrt{3}t)+o(1/t)$. Le due funzioni differiscono invece per il termine $1/t^2$ essendo

$$\omega(t)-u(t)=h^{-1}(t)-u(t)=\frac{1}{3t^2}+o\big(\frac{1}{t^2}\big). \tag{12.8}$$

Per ottenere questa formula (e di conseguenza che ω e u coincidono fino all'ordine $1/t$), alternativamente si poteva osservare che da (12.7) segue che

$$u^{-1}(y)-h(y)=\frac{16y^4}{16\sqrt{3}y^6}+o\big(\frac{1}{y^2}\big)=\frac{1}{\sqrt{3}y^2}+o\big(\frac{1}{y^2}\big).$$

Poiché per $t\to+\infty$ sia $u(t)$ che $h^{-1}(t)$ sono asintotiche alla retta $y=\sqrt{3}t+2$, lungo il grafico di tali funzioni si ha $y\sim\sqrt{3}t$ per cui

$$(h^{-1}(t)-u(t))\sim\sqrt{3}(u^{-1}(y)-h(y)),$$

e in definitiva

$$(h^{-1}(t)-u(t))\sim\sqrt{3}\Big(\frac{1}{\sqrt{3}y^2}+o\big(\frac{1}{y^2}\big)\Big)=\frac{1}{(\sqrt{3}t)^2}+o\big(\frac{1}{t^2}\big)=\frac{1}{3t^2}+o\big(\frac{1}{t^2}\big).$$

In realtà, si noti che l'effettiva espansione per $\overline{y}(t)$ poteva essere dedotta direttamente dall'equazione differenziale stessa. Infatti, *supponendo*

che $\overline{y}(t) = \sqrt{3}t + 2 + c/t + d/t^2 + o(1/t^2)$, derivando si ottiene (almeno formalmente) $\overline{y}'(t) = \sqrt{3} - c/t^2 + o(1/t^2)$; inoltre

$$\begin{aligned}
&\sqrt{\overline{y}^2(t) + t^2} - 2t = \sqrt{\big(\sqrt{3}t + 2 + c/t + d/t^2 + o(1/t^2)\big)^2 + t^2} - 2t \\
&= \sqrt{4t^2 + 4\sqrt{3}t + 4 + 2c\sqrt{3} + (4c + 2d\sqrt{3})/t + o(1/t)} - 2t \\
&= 2t\sqrt{1 + \sqrt{3}/t + (2 + c\sqrt{3})/(2t^2) + (2c + d\sqrt{3})/(2t^3) + o(1/t^3)} - 2t \\
&= 2t\Big[1 + \frac{1}{2}\Big(\frac{\sqrt{3}}{t} + \frac{2 + c\sqrt{3}}{2t^2} + \frac{2c + d\sqrt{3}}{2t^3} + o\big(\frac{1}{t^3}\big)\Big) + \\
&\quad - \frac{1}{8}\Big(\frac{\sqrt{3}}{t} + \frac{2 + c\sqrt{3}}{2t^2} + \frac{2c + d\sqrt{3}}{2t^3} + o\big(\frac{1}{t^3}\big)\Big)^2 + \\
&\quad + \frac{1}{16}\Big(\frac{\sqrt{3}}{t} + \frac{2 + c\sqrt{3}}{2t^2} + \frac{2c + d\sqrt{3}}{2t^3} + o\big(\frac{1}{t^3}\big)\Big)^3 + o\big(\frac{1}{t^3}\big)\Big] - 2t \\
&= \sqrt{3} + \frac{1 + 2c\sqrt{3}}{4t} + \frac{2c + 4d\sqrt{3} - \sqrt{3}}{8t^2} + o\big(\frac{1}{t^2}\big).
\end{aligned}$$

Affinché valga $\overline{y}'(t) = \sqrt{\overline{y}^2(t) + t^2} - 2t$ dovrà quindi essere

$$\begin{cases} 1 + 2c\sqrt{3} = 0 \\ (2c + 4d\sqrt{3} - \sqrt{3})/8 = -c, \end{cases}$$

da cui $c = -1/(2\sqrt{3})$ e di conseguenza $d = 2/3$. In definitiva

$$\overline{y}(t) = \sqrt{3}t + 2 - \frac{1}{2\sqrt{3}t} + \frac{2}{3t^2} + o\big(\frac{1}{t^2}\big),$$

dunque $\overline{y}(t)$ ha il medesimo sviluppo di $\omega(t)$ fino all'ordine $1/t^2$.

Come ottenere una stima del (o di un) dato iniziale $\overline{y}_0$ per cui la relativa soluzione è del tipo $\overline{y}(t)$, compresa tra $u(t)$ e $\omega(t)$ e asintotica alla retta $y = \sqrt{3}t + 2$? Una modo è prendere un qualsiasi τ arbitrariamente grande e un relativo valore y_τ contenuto tra $u(\tau)$ e $\omega(\tau)$, per esempio la media $y_\tau = (u(\tau)+\omega(\tau))/2 = u(\tau)+(\omega(\tau)-u(\tau))/2 \simeq u(\tau)+1/(6\tau^2)$ (qui si è sfruttato (12.8)), e calcolare il valore $y_0 = y(0;\tau,y_\tau)$ che la soluzione con dato iniziale $y(\tau) = y_\tau$ assume al tempo $t = 0$ (tale soluzione ha grafico compreso tra $u(t)$ e $\omega(t)$ almeno per $t \in [0,\tau]$). All'aumentare di τ il valore di y_0 dovrebbe diventare sempre più preciso. Nella tabella sono

τ	y_τ	$y(0;\tau,y_\tau)$
2	5.371816	1.83644
5	10.613247	1.839315
7	14.088911	1.839368
10	19.294611	1.839374
20	36.627368	1.839374
30	53.275018	1.839374

riportati alcuni valori di τ e del corrispondente dato iniziale $y_0 = y(0; \tau, y_\tau)$ (calcolato numericamente) che approssima $\overline{y}_0$. Sembrerebbe che il valore di $\overline{y}_0$ alla sesta cifra decimale si assesti a circa 1.839374 già per piccoli τ. Aumentando la precisione si trova $\overline{y}_0 \sim 1.839374377219$. In Figura 12.22 si può osservare la corrispondente soluzione $\overline{y}_{ap}(t)$ confrontata con le funzioni $\omega(t)$ e $u(t)$; si noti come $\overline{y}_{ap}(t)$ approssimi bene la soluzione asintoticamente lineare $\overline{y}(t)$ fino a circa $t = 20$ diventando minore di $u(t)$ per i t successivi.

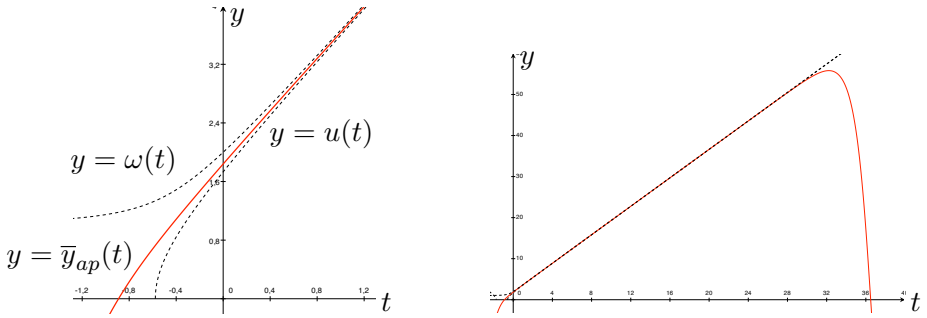


Figura 12.22: La soluzione $\overline{y}_{ap}(t)$ (in rosso) calcolata numericamente e confrontata con le funzioni $y = \omega(t)$ e $y = u(t)$ (linee tratteggiate)

Per concludere, in Figura 12.23 viene presentato l'andamento globale delle soluzioni dell'equazione differenziale.

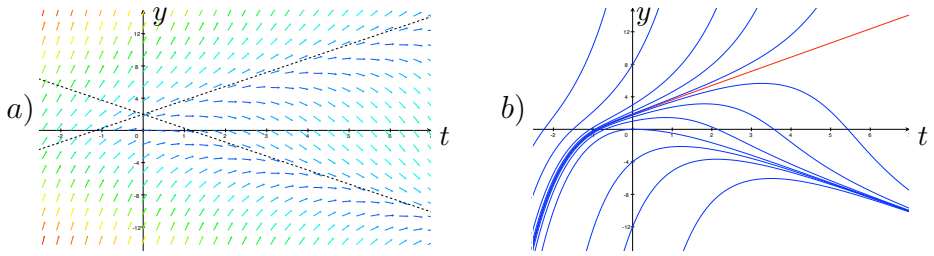


Figura 12.23: a) andamento complessivo del campo vettoriale insieme ai due asintoti per le soluzioni (linee tratteggiate); b) grafico (non in scala 1:1) di alcune soluzioni, in rosso una soluzione $\overline{y}(t)$ asintotica alla retta $y = \sqrt{3} + 2$

h) Sia $y(t)$ una soluzione definitivamente decrescente, dunque soddisfacente $|y(t)| < \sqrt{3}t$. Si osservi che per tale limitazione ogni soluzione ha comportamento al più lineare, ma per l'analisi nel punto g) non esistono soluzioni asintoticamente strettamente sublineari. Quindi ogni soluzione decrescente deve essere asintoticamente lineare e per il punto f) l'unico possibile asintoto può essere la retta di equazione $y = -\sqrt{3}t + 2$. Verifichiamo

che effettivamente ogni soluzione di questo tipo tende a questa retta; ciò non è automatico perché una funzione può essere asintoticamente lineare senza per questo ammettere asintoto. Posto allora $d(t) := y(t) - (-\sqrt{3}t + 2)$, la tesi equivale a dimostrare che $d(t) \to 0$ per $t \to +\infty$. Essendo interessati al comportamento asintotico per $t \to +\infty$ si può inoltre supporre $t > \sqrt{3}$. L'equazione differenziale che governa l'evoluzione di $d(t)$ è

$$\begin{aligned} d'(t) = y'(t) + \sqrt{3} = \sqrt{y^2(t) + t^2} - 2t + \sqrt{3} &= \frac{y^2(t) + t^2 - (2t - \sqrt{3})^2}{2t - \sqrt{3} + \sqrt{y^2(t) + t^2}} \\ &= \frac{(d(t) - \sqrt{3}t + 2)^2 - 3t^2 + 4\sqrt{3}t - 3}{2t - \sqrt{3} + \sqrt{(d(t) - \sqrt{3}t + 2)^2 + t^2}} \\ &= \frac{d^2(t) - 2(\sqrt{3}t - 2)d(t) + 1}{2t - \sqrt{3} + \sqrt{(d(t) - \sqrt{3}t + 2)^2 + t^2}} =: g(t, d(t)). \end{aligned}$$

Il campo vettoriale $g(t, d)$ è di classe C^∞ nell'aperto $A =]\sqrt{3}, +\infty[\times \mathbb{R}$; inoltre si annulla sull'insieme del piano $t - d$ definito da $d^2 - 2(\sqrt{3}t - 2)d + 1 = 0$ che rappresenta un'iperbole di asintoti $d = 0$ e $d = 2(\sqrt{3}t - 2)$; alcune soluzioni e il campo vettoriale g sono rappresentati in Figura 12.24.

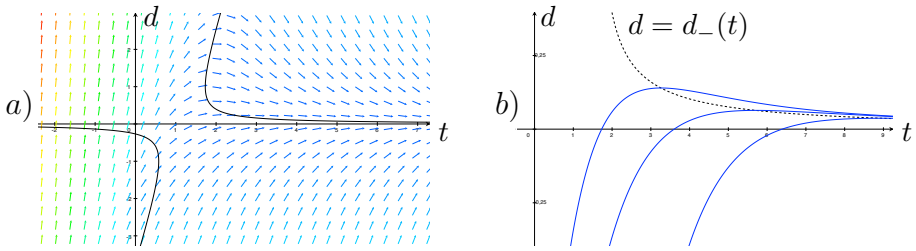


Figura 12.24: a) l'andamento del campo vettoriale $g(t, d)$ con l'insieme (iperbole) su cui si annulla; b) l'andamento di alcune soluzioni (in blu) rispetto alla funzione $d_-(t)$ (linea tratteggiata)

Tale insieme si può esprimere come $t = t(d) = (d^2 + 4d + 1)/(2\sqrt{3}d)$, oppure risolvendo d in funzione di t, ottenendo i due rami

$$d_\pm(t) = \sqrt{3}t - 2 \pm \sqrt{(\sqrt{3}t - 2)^2 - 1} = \sqrt{3}t - 2 \pm \sqrt{3t^2 - 4\sqrt{3}t + 3},$$

che sono le inverse locali delle restrizioni di $t(d)$, rispettivamente, agli intervalli $[1, +\infty[$ e $]0, 1]$. Essendo $t(d)$ crescente nel primo intervallo e decrescente nel secondo si ottiene che $d_+(t)$ è crescente in $[t(1), +\infty[= [\sqrt{3}, +\infty[$

mentre $d_-(t)$ è decrescente nel medesimo intervallo. Ciò, unito al fatto che $g(t, d_\pm(t)) \equiv 0$, implica che $d_+(t)$ e $d_-(t)$ sono, rispettivamente, una soprasoluzione e una sottosoluzione per l'equazione $d' = g(t, d)$. Fissato ora un dato iniziale $y(t_0) = y_0$ con $t_0 > \sqrt{3}$, ciò identifica un dato iniziale $d(t_0) = y_0 + \sqrt{3}t_0 - 2$ per l'equazione $d' = g(t, d)$. Se $d(t_0) < d_-(t_0)$ la corrispondente soluzione è inizialmente crescente e lo rimane finché $d(t) < d_-(t)$. Ci sono dunque due eventualità: i) $d(t) < d_-(t)$ per ogni $t > t_0$, oppure ii) esiste $t_1 \geq t_0$ tale che $d(t_1) = d_-(t_1)$ e per confronto si avrà $d(t) > d_-(t)$ per ogni $t > t_1$. In questo secondo caso si ricade anche quando $d(t_0) \geq d_-(t_0)$. Nel primo caso si ha quindi $d(t)$ sempre crescente e limitata superiormente da $d_-(t)$. Per il criterio di limitatezza $d(t)$ è globalmente definita in futuro e ammette limite $\lim_{t\to+\infty} d(t) =: d_\infty$; per confronto tale limite appartiene a $]d(t_0), 0]$. Nel secondo caso la soluzione è definitivamente decrescente, limitata dal basso da $d_-(t)$ e come prima ammette limite $d_\infty \in [0, d(t_1)[$. Passando al limite nell'equazione per $t \to +\infty$ si ottiene

$$\lim_{t\to+\infty} d'(t) = \lim_{t\to+\infty} \frac{-2\sqrt{3}td(t) + o(t)}{4t + o(t)} = -\frac{\sqrt{3}}{2} d_\infty,$$

e per il Criterio dell'asintoto segue $d_\infty = 0$ cioè la tesi.

Per completezza, si può dimostrare che il caso i) non accade mai. Infatti, se fosse $d(t) < 0$ per ogni t si avrebbe $0 < \sqrt{3}t - 2 - d(t) \leq \sqrt{3}t - 2 - d(t_0)$ per cui

$$d'(t) \geq \frac{1}{2t - \sqrt{3} + \sqrt{(\sqrt{3}t - 2 - d(t_0))^2 + t^2}} =: \frac{1}{\kappa(t)},$$

ed essendo $\kappa(t) \sim 4t$ per $t \to +\infty$ seguirebbe

$$-d(t_0) = \int_{t_0}^{+\infty} d'(s)\, ds \geq \int_{t_0}^{+\infty} \frac{1}{\kappa(s)}\, ds \sim \int_{t_0}^{+\infty} \frac{1}{4s}\, ds = +\infty,$$

un assurdo. Dunque esiste $t^* \geq t_0$ per cui $d(t^*) = 0$ (a questo caso ci si riconduce anche quando $0 \leq d(t_0) < d_-(t_0)$) e per trasversalità deve allora esistere $t_1 > t^*$ tale che $d(t_1) = d_-(t_1)$ e si ricade nel caso ii).

In particolare si ha $d(t) > 0$ definitivamente per $t \to +\infty$; in relazione all'equazione (12.6), ciò significa che le soluzioni $y(t)$ che si avvicinano all'asintoto $y = -\sqrt{3}t + 2$ devono farlo definitivamente dall'alto, dunque tali soluzioni sono definitivamente convesse.

Capitolo 13

Metodo delle caratteristiche

In questo capitolo presenteremo un ulteriore metodo che permette di ricondurre la risoluzione di alcune classi di PDE a opportuni sistemi di ODE. Iniziamo preliminarmente con un esempio.

L'equazione lineare omogenea del trasporto

Nel caso in cui il flusso di una certa quantità u sia causato solamente da avvezione con velocità b, le particelle si muovono nella stessa direzione di b e l'equazione di continuità per u si specializza nell'*equazione lineare omogenea del trasporto* (per ora a coefficienti costanti, la generalizzazione a coefficienti non costanti sarà un caso particolare di (13.8))

$$u_t + b \cdot \nabla u = 0 \tag{13.1}$$

cioè

$$u_t + \sum_{i=1}^{n} b_i u_{x_i} = 0 \tag{13.2}$$

dove $u = u(x,t) : V \subseteq \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}$, $b = (b_1, b_2, \ldots, b_n) \in \mathbb{R}^n$ è un vettore fissato, $u_t = \partial_t u$, $u_{x_i} = \partial_{x_i} u$ e ∇u rappresenta il gradiente di u fatto rispetto alle variabili spaziali, cioè $\nabla u = \nabla_x u = (u_{x_1}, u_{x_2}, \ldots, u_{x_n})$.

Troviamo anzitutto le soluzioni regolari, dette solitamente *soluzioni classiche*, di (13.1) nel caso in cui V sia tutto lo spazio $\mathbb{R}^{n+1}$.

Osserviamo che se u è differenziabile allora $u_t(x,t) + b \cdot \nabla u(x,t) = Du(x,t)v = \partial_v u(x,t)$ dove $v = (b,1)$, ∂_v è la derivata direzionale lungo

il vettore v, e Du rappresenta il differenziale di u fatto rispetto al complesso delle variabili (x,t). L'equazione del trasporto è dunque equivalente all'annullarsi della derivata direzionale lungo la direzione individuata da v.

Applicando il Teorema A.25 del valor medio per derivate direzionali alla funzione u con $\nu = v/\|v\|$ e $v = (b,1)$, per ogni fissato (x,t) si ottiene che

$$|u(x+sb,t+s)-u(x,t)| \leq \sup_{\tau\in[0,s]} ||\partial_\nu u(x+\tau b,t+\tau)||\,||s(b,1)|| = 0, \quad \forall\, s\in\mathbb{R}$$

cioè la funzione $s \mapsto u(x+sb,t+s)$ è costante in $\mathbb{R}$, ovvero u è costante su ogni retta parallela al vettore $(b,1)$. Poiché l'insieme di tali rette copre tutto $\mathbb{R}^{n+1}$, se si conosce il valore di u in un qualsiasi punto di ciascuna retta, lo si conosce su tutte le rette, dunque su $\mathbb{R}^{n+1}$, si veda la Figura 13.1. Ciò suggerisce che affinché il problema (13.1) sia ben posto, quindi ammetta un'unica soluzione, si dovrà supplementare (13.1) con una condizione ai valori iniziali. Per esempio si può chiedere di conoscere i valori di u su un'ipersuperficie "trasversa a v", cioè tale che in ogni punto il vettore ortogonale all'ipersuperficie non sia ortogonale a v, ovvero tale che v non stia nell'iperpiano tangente all'ipersuperficie. Nel nostro caso come ipersuperficie si sceglie l'iperpiano $t = 0$.

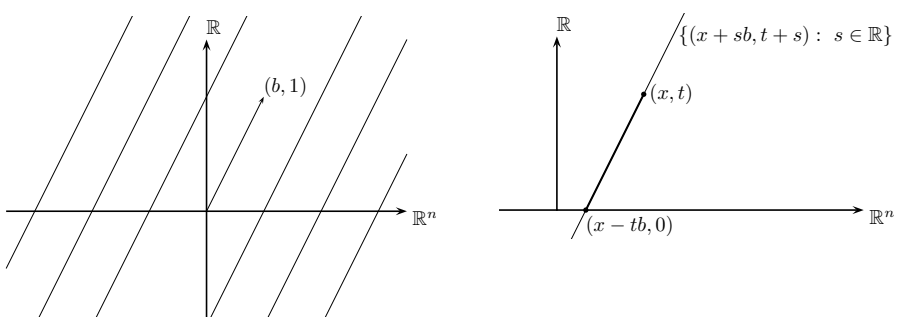


Figura 13.1: Le caratteristiche per l'equazione (13.1)

Si consideri dunque il *problema ai valori iniziali*

$$\begin{cases} u_t + b\cdot\nabla u = 0 & \text{in } \mathbb{R}^n\times\mathbb{R}_+ \\ \qquad\qquad u = g & \text{in } \mathbb{R}^n\times\{0\}, \end{cases} \tag{13.3}$$

dove $b\in\mathbb{R}^n$ e $g:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ è una funzione data.

Per quanto visto, fissato $(x,t)\in\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}_+$, la funzione $s\mapsto u(x+sb,t+s)$ è costante, in particolare per $s=0$ ed $s=-t$ assume lo stesso valore cioè,

utilizzando la condizione iniziale $u(z,0) = g(z)$, vale

$$u(x,t) = u(x - tb, 0) = g(x - tb) \tag{13.4}$$

che è dunque la candidata a essere soluzione di (13.3). In effetti

Proposizione 13.1 *Se $g \in C^1(\mathbb{R}^n)$ allora la funzione $u(x,t) := g(x - tb)$ è l'unica soluzione regolare del problema ai valori iniziali* (13.3).

Dimostrazione La funzione u è di classe C^1 e si ha

$$u_t(x,t) = Dg(x - tb)(-b) = -b \cdot \nabla g(x - tb), \qquad \nabla u(x,t) = \nabla g(x - tb)$$

e quindi $u_t + b \cdot \nabla u = 0$, per ogni $(x,t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+$. Inoltre u soddisfa la condizione iniziale essendo $u(x,0) = g(x)$ per ogni $x \in \mathbb{R}^n$. Quindi u è una soluzione del problema.

Se ora v è un'altra soluzione regolare, l'analisi fatta in precedenza è giustificata e quindi v deve necessariamente essere della forma $v(x,t) = g(x - tb) = u(x,t)$. □

Interpretazione fisica. Il problema (13.3) può essere interpretato come un esempio di trasporto della (densità di) massa iniziale $g(x)$ all'evolvere del tempo t. L'equazione afferma che la massa viene trasportata con velocità costante nella direzione $v = (b, 1)$, come in Figura 13.2.

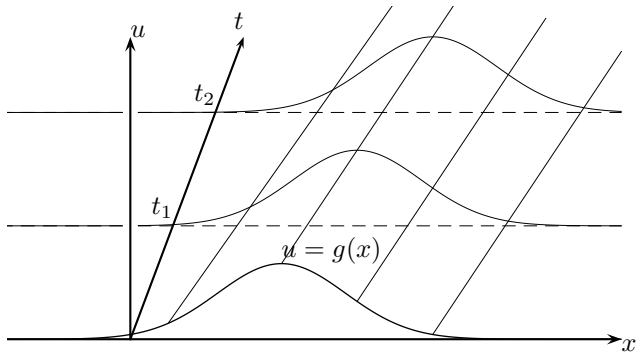


Figura 13.2: Il trasporto della massa iniziale lungo la direzione v: grafico della soluzione $u(x,t) = g(x - tb)$

Osservando in sezione la soluzione $u = u(x,t)$ al passare del tempo, l'effetto visivo è quello di una traslazione del grafico di g con velocità costante b, si veda la Figura 13.3. Funzioni di tale forma prendono anche il nome di *onde viaggianti*.

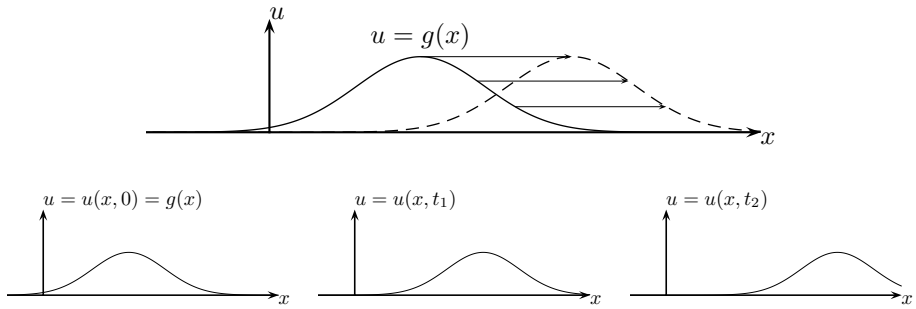


Figura 13.3: Il trasporto della massa osservato in sezione: l'evoluzione del grafico di $u(\cdot, t)$ per tre successivi tempi $0 = t_0 < t_1 < t_2$

Problema: cosa succede se g non è differenziabile, o magari nemmeno continua? In questo caso u definita da (13.4) non è differenziabile e non potrà essere soluzione classica. Comunque, vista l'interpretazione dell'equazione come trasporto della massa iniziale al tempo $t = 0$ nella direzione $v = (b, 1)$, la (13.4) resta l'unica soluzione plausibile, sebbene non sia chiaro in che senso possa risolvere l'equazione (13.1). Bisognerà dunque estendere il concetto di soluzione classica introducendo quello di *soluzione debole* (distribuzionale), oppure di *soluzione di viscosità* (si veda per esempio [4]).

L'equazione lineare non omogenea del trasporto

È governato dall'equazione (come prima consideriamo inizialmente i coefficienti costanti, per la generalizzazione vedere (13.8))

$$u_t + b \cdot \nabla u = f \tag{13.5}$$

dove $b = (b_1, b_2, \ldots, b_n) \in \mathbb{R}^n$ e $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ è una funzione data. Considereremo più precisamente il problema ai valori iniziali

$$\begin{cases} u_t + b \cdot \nabla u = f & \text{in } \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+ \\ u = g & \text{in } \mathbb{R}^n \times \{0\}. \end{cases} \tag{13.6}$$

Utilizziamo il metodo di integrazione lungo le "caratteristiche"; un altro metodo che fa uso del Principio di Duhamel si trova negli approfondimenti. Come in precedenza supponiamo inizialmente che u sia differenziabile. Fissato $(x, t) \in \mathbb{R}^{n+1}$, conviene considerare la funzione u ristretta alla retta passante per (x, t) e avente direzione $v = (b, 1)$. Sia dunque $z : [-t, +\infty[\to \mathbb{R}$

definita da $z(s) = u(x + sb, t + s)$. L'equazione soddisfatta da z è

$$\begin{aligned} z'(s) &= u_t(x + sb, t + s) + D_x u(x + sb, t + s)b \\ &= u_t(x + sb, t + s) + b \cdot \nabla u(x + sb, t + s) = f(x + sb, t + s). \end{aligned}$$

Integrando tra $-t$ e 0 si ottiene

$$z(0) - z(-t) = \int_{-t}^{0} z'(s)\, ds = \int_{-t}^{0} f(x+sb, t+s)\, ds = \int_{0}^{t} f(x+(s-t)b, s)\, ds,$$

ed essendo anche $z(0) = u(x, t)$ e $z(-t) = u(x - tb, 0) = g(x - tb)$, si ottiene

$$u(x, t) = g(x - tb) + \int_0^t f(x + (s - t)b, s)\, ds, \tag{13.7}$$

che è dunque la funzione candidata a essere soluzione di (13.6). In effetti vale la seguente proposizione:

Proposizione 13.2 *Siano $g \in C^1(\mathbb{R}^n)$ e $f \in C^1(\mathbb{R}^n \times [0, +\infty[)$. Allora la funzione u definita da* (13.7) *è l'unica soluzione regolare del problema ai valori iniziali* (13.6).

Dimostrazione Nelle ipotesi, per il Teorema di derivazione sotto il segno di integrale la funzione u è di classe C^1 e vale

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x_i}(x, t) &= \frac{\partial g}{\partial x_i}(x - tb) + \int_0^t \frac{\partial f}{\partial x_i}(x + (s - t)b, s)\, ds, \\ \Longrightarrow \quad \nabla u(x, t) &= \nabla g(x - tb) + \int_0^t \nabla_x f(x + (s - t)b, s)\, ds. \end{aligned}$$

Analogamente, utilizzando anche il Teorema fondamentale del calcolo, si ha

$$\begin{aligned} u_t(x, t) &= Dg(x - tb)(-b) + f(x, t) + \int_0^t D_x f(x + (s - t)b, s)(-b)\, ds \\ &= -b \cdot \nabla g(x - tb) + f(x, t) - \int_0^t b \cdot \nabla_x f(x + (s - t)b, s)\, ds \end{aligned}$$

perciò

$$u_t + b \cdot \nabla u = b \cdot \int_0^t \nabla_x f(x+(s-t)b, s)\, ds + f(x, t) - \int_0^t b \cdot \nabla_x f(x+(s-t)b, s)\, ds$$

e in definitiva $u_t + b \cdot \nabla u = f$ in $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+$. Inoltre u soddisfa la condizione iniziale essendo $u(x, 0) = g(x)$ per ogni $x \in \mathbb{R}^n$. Quindi u è una soluzione del problema (13.6).

Se poi v è un'altra soluzione classica, l'analisi fatta in precedenza è giustificata e quindi v deve necessariamente avere la forma (13.7) e quindi coincidere con u. $\square$

Questa è una prima applicazione del metodo delle caratteristiche, le quali, in questo caso, non sono altro che le rette di equazioni parametriche $s \mapsto (x + sb, t + s)$ (si veda la Figura 13.1).

Interpretazione fisica. Confrontandolo col problema (13.3), si può interpretare (13.5) come trasporto della (densità di) massa iniziale g lungo il vettore $v = (b, 1)$ in presenza di sorgenti di massa $f(x, t)$ nel punto (x, t). La forma della soluzione (13.7) sostanzialmente afferma che la massa iniziale $g(x)$ viene trasportata con velocità costante $v = (b, 1)$ e può aumentare (o diminuire) a seconda della quantità di massa incontrata passando dal punto $(x, 0)$ al punto $(x + tb, t)$ lungo la linea caratteristica che li unisce.

Due prime generalizzazioni dell'equazione del trasporto sono date rispettivamente dall'equazione semilineare

$$u_t + b(x, t) \cdot \nabla u = f(u, x, t)$$

e da quella quasilineare

$$u_t + b(u, x, t) \cdot \nabla u = f(u, x, t).$$

Anche questi casi possono essere affrontati mediante il metodo delle caratteristiche.

L'equazione semilineare del trasporto

Consideriamo una prima generalizzazione del problema (13.6), nella quale il vettore b può dipendere dalle variabili (x, t) e la non omogeneità f può dipendere anche da u. Più precisamente consideriamo il problema ai valori iniziali per l'equazione semilineare del trasporto

$$\begin{cases} u_t + b(x, t) \cdot \nabla u = f(u, x, t) & \text{in } \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+ \\ u = g & \text{in } \mathbb{R}^n \times \{0\}, \end{cases} \tag{13.8}$$

dove $b : \mathbb{R}^n \times [0, +\infty[\to \mathbb{R}^n$, $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times [0, +\infty[\to \mathbb{R}$, $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ sono per facilità funzioni di classe C^1. Risolveremo il problema mediante il *metodo delle caratteristiche*.

Analogamente a quanto visto per (13.1), il primo membro della prima equazione in (13.8) non è altro che la derivata direzionale di u nella direzione

$v(x,t) = (b(x,t), 1)$. Se $f \equiv 0$ il vettore $\nabla_{(x,t)} u(x,t)$ è quindi ortogonale alle curve integrali del campo vettoriale $v : \mathbb{R}^n \times [0, +\infty[\to \mathbb{R}^n \times [0, +\infty[$, dette *curve caratteristiche (proiettate)* o semplicemente *caratteristiche* associate al problema (13.8) (nel caso (13.1) già considerato non sono altro che le rette parallele al vettore costante $(b, 1)$). Se $f \neq 0$ ciò suggerisce comunque di studiare la restrizione della funzione u lungo tali curve; queste sono le soluzioni $(x(s), t(s))$ del sistema di equazioni differenziali ordinarie

$$\begin{cases} \dfrac{dx(s)}{ds} = b(x(s), t(s)) \\ \dfrac{dt(s)}{ds} = 1. \end{cases}$$

Dalla seconda equazione segue che si può prendere t come variabile indipendente, per cui le caratteristiche sono soluzioni del sistema di n equazioni nelle n incognite $x(t) = (x_1(t), \ldots, x_n(t))$ dato in forma vettoriale da

$$\frac{dx(t)}{dt} = b(x(t), t).$$

Più precisamente, sia $x(t) = x(t; y, \tau)$ la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} \dfrac{dx(t)}{dt} = b(x(t), t) \\ x(\tau) = y, \end{cases} \tag{13.9}$$

con (y, τ) generico punto di $\mathbb{R}^n \times [0, +\infty[$. Se, come supporremo nel seguito, la funzione b è localmente lipschitziana rispetto alla variabile x, la teoria sulle equazioni differenziali ordinarie garantisce che tale soluzione è unica. Calcolando $u(x,t)$ lungo le caratteristiche e derivando, si ha che

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} u(x(t), t) &= u_t(x(t), t) + \nabla u(x(t), t) \cdot \frac{dx(t)}{dt} \\ &= u_t(x(t), t) + b(x(t), t) \cdot \nabla u(x(t), t) = f\big(u(x(t), t), x(t), t\big). \end{aligned}$$

Posto allora $z(t) = u(x(t), t)$ si ha $z(0) = u(x(0), 0) = g\big(x(0; y, \tau)\big)$ e in definitiva z è soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} \dfrac{dz}{dt} = f(z, x(t; y, \tau), t) \\ z(0) = g\big(x(0; y, \tau)\big). \end{cases} \tag{13.10}$$

Anche in questo caso, per garantire l'unicità della soluzione supporremo che f sia localmente lipschitziana rispetto alla variabile u. Trovata z si può calcolare $u(y, \tau) = u\big(x(\tau), \tau\big) = z(\tau)$ ovvero si può conoscere il valore di u nel generico punto (y, τ).

Osservazione 13.3 In realtà dovremmo anche assicurarci che le soluzioni di (13.9) e (13.10) siano definite globalmente in $\mathbb{R}$, altrimenti non è detto che si possa calcolare $x(0; y, \tau)$ oppure $z(\tau)$. A tal fine, per esempio si può chiedere che b e f abbiano una crescita al più lineare in x e u, rispettivamente, cioè che (si veda il Teorema 4.12)

$$|b(x,t)| \le a(t) + c(t)|x|, \qquad |f(u,x,t)| \le d(x,t) + e(x,t)|u|, \tag{13.11}$$

con a, c, d, e funzioni continue e positive. Senza condizioni che garantiscano l'esistenza in grande delle soluzioni di (13.9) e (13.10), il problema (13.8) potrebbe non ammettere soluzioni definite su tutto $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+$, come nell'Esempio 13.5, oppure potrebbe ammetterne infinite, come nell'Esercizio 13.8.

In definitiva abbiamo provato il seguente teorema

Teorema 13.4 *Siano b e f continue, localmente lipschitziane nella variabile x e u, rispettivamente, e tali che soddisfino* (13.11)*. Se u è soluzione classica del problema ai valori iniziali per l'equazione semilineare del trasporto* (13.8) *allora si ha $u(y,\tau) = z(\tau)$ dove z è ottenuta risolvendo in successione i seguenti sistemi di equazioni differenziali ordinarie*

$$\begin{cases} \dfrac{dx(t)}{dt} = b(x(t),t) \\ x(\tau) = y, \end{cases} \qquad \begin{cases} \dfrac{dz(t)}{dt} = f(z(t),x(t),t) \\ z(0) = g(x(0)). \end{cases} \tag{13.12}$$

Poiché la soluzione z, come anche x, è unica, si ha anche che la soluzione u di (13.8)*, se esiste, è unica.*

Ciò suggerisce che per trovare una soluzione di (13.8) si può provare a risolvere i sistemi di equazioni differenziali ordinarie (13.12). Trovata $z(t) = z(t; y, \tau)$ si provvederà in seguito a verificare se $u(x,t) := z(t; x, t)$ è effettivamente soluzione. In particolare, se b, f e g sono di classe C^1, per il Teorema 5.1, l'Esercizio 5.2 e il Teorema 5.10 le soluzioni $x(t)$ del sistema $(13.12)_1$ dipendono in maniera continua, anzi C^1, da (y,τ) e di conseguenza lo stesso accade per le soluzioni $z(t)$ di $(13.12)_2$. Da questo segue che la funzione $u(y,\tau) = z(\tau; y, \tau)$ definita sopra è differenziabile e si verifica (non banalmente!) che è effettivamente soluzione di (13.8). Ciò dimostra anche l'esistenza di una soluzione del problema (13.8) sotto queste ipotesi.

In particolare, se $f = f(x,t)$ non dipende esplicitamente da u, detta $x(t; y, \tau)$ la soluzione di $(13.12)_1$, per integrazione la soluzione di $(13.12)_2$ è

$$z(t) = z(t; y, \tau) = g(x(0; y, \tau)) + \int_0^t f(x(s; y, \tau), s)\, ds.$$

Di conseguenza $u(y,\tau) = z(\tau; y, \tau)$ implica

$$u(y,\tau) = g(x(0;y,\tau)) + \int_0^\tau f(x(s;y,\tau),s)\,ds,$$

che, una volta sostituito (y,τ) con (x,t), è la naturale generalizzazione di (13.7) per il quale le caratteristiche sono date da $x(t;y,\tau) = y + (t-\tau)b$.

Esempio 13.5 Se non valgono (13.11) (o ipotesi simili che garantiscono l'esistenza globale delle soluzioni delle corrispondenti ODE) il problema (13.8) potrebbe non ammettere una soluzione regolare definita per tutti i tempi. Come esempio, si consideri il problema

$$\begin{cases} u_t = u^2 & \text{in } \mathbb{R}\times\mathbb{R}_+ \\ u = g & \text{in } \mathbb{R}\times\{0\}, \end{cases}$$

con g funzione di classe C^1 con $\max g > 0$. In questo caso le caratteristiche sono le linee $x(t) = y$ costante e $(13.12)_2$ si riduce a

$$\begin{cases} \dfrac{dz}{dt} = z^2 \\ z(0) = g(y), \end{cases}$$

che notoriamente ha soluzioni che esplodono in tempo finito. Più precisamente si trova che

$$u(x,t) = \frac{g(x)}{1 - tg(x)},$$

che è effettivamente una soluzione, ma non è definita per ogni t dal momento che per ogni x con $g(x) > 0$ vale $\lim_{t\to(1/g(x))^-} |u(x,t)| = \infty$. Il più piccolo t per cui ciò accade è dato da $t_m = 1/\max g$, perciò u può essere definita al massimo sulla striscia $\mathbb{R}\times[0,t_m[$ e non è possibile estenderla su una striscia $\mathbb{R}\times[0,t^*[$ per tempi $t^* \geq t_m$.

Esempio 13.6 Si consideri il problema ai valori iniziali per l'equazione del trasporto lineare

$$\begin{cases} u_t + 2u_x = 3u & \text{in } \mathbb{R}^2 \\ u(x,0) = \operatorname{sen} x & x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

La caratteristica uscente dal generico punto (y,τ), ovvero la soluzione di $(13.12)_1$, ha equazione $x(t) = y + 2(t-\tau)$, per cui $(13.12)_2$ diventa

$$\begin{cases} \dfrac{dz}{dt} = 3z \\ z(0) = \operatorname{sen} x(0) = \operatorname{sen}(y - 2\tau), \end{cases}$$

la cui soluzione è $z(t) = \operatorname{sen}(y - 2\tau)\mathrm{e}^{3t}$. In definitiva $u(y,\tau) = z(\tau) = \operatorname{sen}(y - 2\tau)\mathrm{e}^{3\tau}$ ovvero $u(x,t) = \operatorname{sen}(x - 2t)\mathrm{e}^{3t}$.

Esercizio 13.7 *Risolvere il problema*

$$\begin{cases} u_t - 3xu_x = 2u & \text{in } \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+ \\ u(x,0) = x^2 & \text{in } \mathbb{R}. \end{cases}$$

Soluzione. La caratteristica passante per il punto (y,τ) è soluzione di

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -3x \\ x(\tau) = y, \end{cases}$$

cioè $x(t) = y\mathrm{e}^{3(\tau - t)}$. Il secondo sistema allora diventa

$$\begin{cases} \dfrac{dz}{dt} = 2z \\ z(0) = (y\mathrm{e}^{3\tau})^2, \end{cases}$$

perciò $z(t) = (y\mathrm{e}^{3\tau})^2\mathrm{e}^{2t}$. In definitiva $u(y,\tau) = z(\tau) = (y\mathrm{e}^{3\tau})^2\mathrm{e}^{2\tau} = y^2\mathrm{e}^{8\tau}$ ovvero, chiamando alla fine (x,t) il generico punto, $u(x,t) = x^2\mathrm{e}^{8t}$.

Esercizio 13.8 *Dimostrare che per ogni $\delta > 0$ il problema di Cauchy*

$$\begin{cases} u_t + x^2u_x = 0 & \text{in } \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+ \\ u(x,0) = 0 & \text{in } \mathbb{R}, \end{cases}$$

ammette infinite soluzioni classiche in $\mathbb{R} \times [0,\delta]$.

L'equazione quasilineare del trasporto

Consideriamo infine il problema ai valori iniziali per l'equazione quasilineare del trasporto

$$\begin{cases} u_t + b(u,x,t) \cdot \nabla u = f(u,x,t) & \text{in } \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+ \\ u = g & \text{in } \mathbb{R}^n \times \{0\}, \end{cases} \tag{13.13}$$

dove ora $b : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times [0,+\infty[\to \mathbb{R}^n$, mentre $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times [0,+\infty[\to \mathbb{R}$ e $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ sono prese come prima; inoltre tutte le funzioni sono supposte di classe C^1. Procedendo come per l'equazione del trasporto semilineare si

perviene analogamente ai due sistemi (13.12) dove però $b = b(z(t), x(t), t)$, perciò tali sistemi *non* sono più disaccoppiati; più precisamente si ottiene

$$\begin{cases} \dfrac{dx(t)}{dt} = b(z(t), x(t), t) \\ \dfrac{dz(t)}{dt} = f(z(t), x(t), t). \end{cases} \tag{13.14}$$

Si osservi che in questo caso le curve caratteristiche $x(t)$ dipendono anche da $z(t)$ cioè da $u(x(t), t)$, ovvero dalla soluzione in considerazione. In particolare, non è possibile risolvere separatamente la prima equazione e poi sostituirne la soluzione nella seconda. Nella rimanente parte di questa sezione si cercherà di fornire le idee e accennare alle difficoltà che sorgono in questo caso. La costruzione della soluzione parte al tempo $t = 0$; più precisamente si risolve il sistema

$$\begin{cases} \dfrac{dx(t)}{dt} = b(z(t), x(t), t) \\ \dfrac{dz(t)}{dt} = f(z(t), x(t), t) \\ x(0) = y \\ z(0) = g(y), \end{cases} \tag{13.15}$$

al variare di $y \in \mathbb{R}$. Ciò permette di definire la mappa

$$\begin{aligned} &\mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}^{n+2} \\ &(t, y) \mapsto (t, x(t; y), z(t; y)), \end{aligned}$$

(dove si utilizza la notazione breve $x(t; y) = x(t; y, 0)$, $z(t; y) = z(t; y, 0)$) la cui immagine genera un'ipersuperficie $\mathcal{S}$ in $\mathbb{R}^{n+2}$ parametrizzata da (t, y).

Problema: quando $\mathcal{S}$ è il grafico di una funzione da $\mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}$? Lo è quando si può invertire (almeno localmente) l'applicazione

$$\begin{aligned} H : \mathbb{R}^{n+1} &\to \mathbb{R}^{n+1} \\ (t, y) &\mapsto (t, x(t; y)), \end{aligned}$$

cioè quando è possibile scrivere $y = y(t, x)$; di conseguenza la funzione $u(x, t) := z(t; y(t, x))$ è la candidata a essere soluzione di (13.13).

Per esempio, se b è di classe C^1 per il Teorema 5.10 si ha che $x \in C^1$ e

$$DH(t, y) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{\partial x(t;y,0)}{\partial t} & \frac{\partial x(t;y,0)}{\partial y} \end{pmatrix} \quad \Longrightarrow \quad DH(0, y) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ b(g(y), y, 0) & I_n \end{pmatrix},$$

dove I_n è la matrice identità $n \times n$. Per il Teorema della funzione inversa H è un diffeomorfismo locale in un intorno di $(0, y)$, per qualunque $y \in \mathbb{R}^n$. Se inoltre b, f soddisfano opportune ipotesi di crescita nelle variabili (u, x), per esempio se sono sublineari nel senso che

$$|b(u,x,t)| \leq a(t) + c(t)(|u| + |x|), \qquad |f(u,x,t)| \leq d(t) + e(t)(|u| + |x|),$$

allora si dimostra che H è globalmente invertibile se ristretta a un'opportuna striscia $]-\tau, \tau[\times\mathbb{R}^n$ e a valori nella medesima. In particolare sarà

$$\begin{aligned} H^{-1} :]-\tau,\tau[\times\mathbb{R}^n &\to]-\tau,\tau[\times\mathbb{R}^n \\ (t,x) &\mapsto (t, y(t,x)), \end{aligned}$$

per cui $\mathcal{S}$ è localmente il grafico della funzione

$$\begin{aligned} \mathbb{R}^n\times]-\tau,\tau[&\to \mathbb{R} \\ (x,t) &\mapsto u(x,t) := z(t; y(t,x)), \end{aligned}$$

con u potenzialmente soluzione di (13.13) almeno nella striscia $\mathbb{R}^n\times]-\tau,\tau[$.

In generale la soluzione u potrebbe non essere definita (o estendibile) oltre il tempo τ, come già l'Esempio 13.5 dimostra; in quel caso $b = 0$ mentre $f(u,x,t) = u^2$ non è sublineare. È importante notare che il punto chiave non è l'eventuale superlinearità di b oppure f, ma il carattere quasilineare dell'equazione. Il vero problema è che se b dipende esplicitamente da u, per alcune scelte del dato iniziale g le caratteristiche originatesi al tempo $t = 0$ da due diversi punti $y_1 \neq y_2$ si possono incontrare per qualche tempo positivo t^*, ovvero $x(t^*; y_1) = x(t^*; y_2)$. Infatti, mentre per l'unicità locale le traiettorie delle soluzioni $(x(t), z(t))$ di (13.15) non possono incontrarsi, ciò non è più vero per le sole $x(t)$ che ne sono le proiezioni. Detto allora $x^* = x(t^*; y_1) = x(t^*; y_2)$ il valore comune, nel corrispondente punto (x^*, t^*) la funzione $u(x,t)$ dovrebbe assumere contemporaneamente i valori $z(t^*; y_1)$ e $z(t^*; y_2)$, possibilmente diversi, diventando in tal caso una funzione multivoca. Di conseguenza $\mathcal{S}$ non è più un grafico per $t \geq t^*$. Questa eventualità è illustrata dal prossimo esempio.

Esempio 13.9 Si consideri il problema ai valori iniziali per l'equazione quasilineare scalare omogenea

$$\begin{cases} u_t + uu_x = 0 & (x,t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+ \\ u(x,0) = \overline{u}(x) & x \in \mathbb{R}. \end{cases} \tag{13.16}$$

Si osservi che in questo caso $b(u,x,t) = u$, $f(u,x,t) = 0$ sono entrambe (sub-)lineari. Il sistema (13.15) si scrive

$$\begin{cases} x'(t) = z(t) \\ z'(t) = 0 \\ x(0) = y, \ z(0) = \overline{u}(y). \end{cases}$$

L'equazione per $z(t)$ è disaccoppiata da quella per $x(t)$ e ha come soluzione $z(t) = z(0)$ che introdotta nella prima conduce a $x(t) = x(0) + tz(0) = y + t\overline{u}(y)$. Da $u(x(t),t) = z(t)$ si ottiene dunque la relazione

$$u(y + t\overline{u}(y), t) = \overline{u}(y).$$

Da quest'ultima, potendo invertire la mappa $x = y+t\overline{u}(y)$ per cui $y = y(x,t)$, si ottiene la soluzione $u(x,t) = \overline{u}(y(x,t))$. Consideriamo due casi specifici:

i) $\overline{u}(x) = x$. Allora l'equazione $x = y + t\overline{u}(y) = y + ty$ per $t > 0$ fornisce $y(x,t) = \frac{x}{1+t}$ per cui la soluzione è $u(x,t) = \overline{u}(y(x,t)) = \frac{x}{1+t}$. Si osservi che in questo caso la caratteristica uscente dal punto $(y,0)$ è la retta di equazione $x = ty + y$. Per $t > 0$, al variare di y tali rette non si intersecano e coprono l'intero semipiano $\{t > 0\}$, si veda la Figura 13.4: la funzione $u(x,t)$ è dunque ben definita, di classe C^1 in $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$ e soluzione regolare del problema. Per $\overline{u}(x)$ diversi la situazione può cambiare drasticamente.

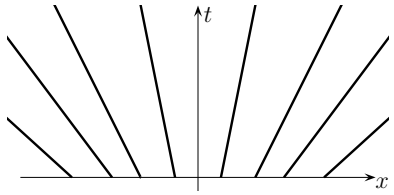


Figura 13.4: Le caratteristiche per (13.16) nel caso $\overline{u}(x) = x$

ii) $\overline{u}(x) = -x$. In questo caso si ottiene la relazione $x = y - ty$ che non è invertibile per $t = 1$. Per $t \neq 1$ si ha $y(x,t) = \frac{x}{1-t}$ e la soluzione $u(x,t) = \frac{x}{t-1}$ può dunque essere definita al massimo sulla striscia $\mathbb{R} \times [0,1[$ ed esplode per $t \to 1^-$. Per $y < 0$ le caratteristiche hanno pendenza positiva, per $y > 0$ negativa; al variare di $y \in \mathbb{R}$ tutte quante appartengono al fascio di rette di centro $(0,1)$; per $t \in [0,1[$ e $y \in \mathbb{R}$ coprono l'intera striscia $\mathbb{R} \times [0,1[$. In particolare, nel punto $(0,1)$ passano tutte le (infinite!) caratteristiche originatesi al tempo $t = 0$, si veda la Figura 13.5. Poiché $u(x,t)$ è costante lungo le caratteristiche, nel punto $(0,1)$ la soluzione dovrebbe

assumere contemporaneamente tutti i valori reali, il che è assurdo. Non è dunque possibile estendere la soluzione in maniera regolare oltre il tempo $t = 1$. Geometricamente u rappresenta un'*onda di compressione*.

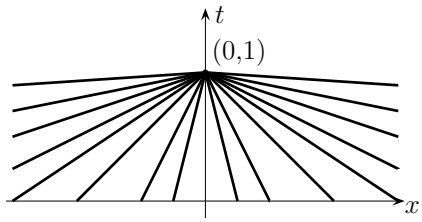


Figura 13.5: Le caratteristiche per (13.16) nel caso $\overline{u}(x) = -x$

La situazione apparirebbe ancora più chiara prendendo come dato iniziale la funzione $\overline{u}(x) = \frac{1}{1+x^2}$. La relativa soluzione, regolare solo per $t < 8/\sqrt{27}$, rimane sempre limitata ed è formata da un'onda di compressione che genera successivamente un'*onda d'urto* detta anche *onda di shock*. In questo caso $u(x,t)$ non si può esplicitare, per approfondimenti si veda [4].

Cenni al metodo delle caratteristiche

In questa sezione si mostrerà come le idee introdotte precedentemente possono essere generalizzate in un metodo utile per risolvere la generica equazione nonlineare alle derivate parziali del primo ordine

$$F(x, u, \nabla u) = 0, \tag{13.17}$$

dove $u = u(x) : \mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$, $x = (x_1, \ldots, x_m)$, $F : \mathcal{D} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ è differenziabile, $\mathcal{D}$ aperto. In generale all'equazione (13.17) viene associata una condizione supplementare del tipo

$$u_{|\Gamma} = g, \tag{13.18}$$

dove g è una funzione assegnata su un'opportuna ipersuperficie $\Gamma \subseteq \mathcal{D}$.

In particolare l'equazione (13.17) si suddivide in varie classi con livello crescente di difficoltà di approccio e complessità:

Equazioni lineari: cioè lineari nel complesso delle variabili $(u, \nabla u)$, ovvero della forma

$$a(x) \cdot \nabla u + c(x)u + d(x) = 0, \tag{13.19}$$

con $a(x) = (a_1(x), \dots, a_m(x)) : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$, $c, d : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$. con $a : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$, $a(x) = (a_1(x), \dots, a_m(x))$, $c, d : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$. In questo caso rientrano (13.1) e (13.8) con f non dipendente da u;

Equazioni semilineari: ovvero lineari in ∇u (cioè rispetto alle variabili di ordine massimo di derivazione), della forma

$$a(x) \cdot \nabla u + h(x, u) = 0, \tag{13.20}$$

con $a : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$, $h : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. In questo caso rientra (13.8) con f generica;

Equazioni quasilineari: se il campo vettoriale a dipende anche da u, cioè equazioni della forma

$$a(x, u) \cdot \nabla u + h(x, u) = 0, \tag{13.21}$$

con $a : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^m$, $h : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. In questo caso rientra (13.13);

Equazioni totalmente nonlineari: altrimenti.

Come nel caso dell'equazione del trasporto l'idea è calcolare la soluzione lungo opportune curve $x(s)$. Supponiamo che $u = u(x)$ sia una soluzione regolare di (13.17); fissata una curva $s \mapsto x(s)$ si ha $F(x(s), u(x(s)), \nabla u(x(s))) = 0$ per ogni s. Posto

$$p(s) := \nabla u(x(s)), \qquad z(s) = u(x(s)),$$

e posto per brevità $w(s) = (x(s), z(s), p(s))$, derivando rispetto a s si ottiene

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{d}{ds} F\big(x(s), z(s), p(s)\big) \\ &= \nabla_x F(w(s)) \cdot x'(s) + \partial_z F(w(s)) z'(s) + \nabla_p F(w(s)) \cdot p'(s) \end{aligned}$$

Essendo

$$z'(s) = \nabla u(x(s)) \cdot x'(s) = p(s) \cdot x'(s),$$

si ottiene

$$0 = \big(\nabla_x F(w(s)) + \partial_z F(w(s)) p(s)\big) \cdot x'(s) + \nabla_p F(w(s)) \cdot p'(s).$$

La precedente relazione è sicuramente soddisfatta se

$$x'(s) = \nabla_p F(w(s)), \quad p'(s) = -\nabla_x F(w(s)) - \partial_z F(w(s)) p(s),$$

che, ricordando l'equazione per $z(s)$ e la definizione di $w(s)$, conduce al sistema di $2m+1$ equazioni differenziali ordinarie nelle incognite $(x, z, p) = (x_1, \dots, x_m, z, p_1, \dots, p_m)$

$$\begin{cases} x'(s) = \nabla_p F(x(s), z(s), p(s)) \\ z'(s) = p(s) \cdot \nabla_p F(x(s), z(s), p(s)) \\ p'(s) = -\nabla_x F(x(s), z(s), p(s)) - \partial_z F(x(s), z(s), p(s))p(s). \end{cases} \tag{13.22}$$

Le soluzioni $s \mapsto (x(s), z(s), p(s))$ sono dette *curve caratteristiche* o, semplicemente, *caratteristiche* dell'equazione (13.17). Spesso tale denominazione viene data alle sole componenti $s \mapsto x(s)$; a volte queste vengono chiamate *caratteristiche proiettate*. Risolvere il sistema (13.22) permette di calcolare $z(s) = u(x(s))$ cioè la soluzione u lungo la curva $x(s)$.

Per calcolare esplicitamente una soluzione bisogna affiancare (13.17) con opportuni dati iniziali $(x(0), z(0), p(0))$ derivanti da (13.18). Più precisamente, si prende il generico punto $y \in \Gamma$ e si assume $x(0) = y$; di conseguenza per (13.18) si pone $z(0) = g(x(0)) = g(y)$. Per ultimo bisogna capire come definire il dato $p(0)$: ciò non è sempre possibile, per approfondire l'argomento rimandiamo a testi più avanzati [4]. Essenzialmente, affinché ciò sia possibile l'ipersuperficie Γ deve essere trasversa rispetto alle linee caratteristiche di (13.22). Per trovare una soluzione di (13.17) si risolve (13.22) con questi dati iniziali ottenendo una soluzione $(x(s, y), z(s, y), p(s, y))$; a questo punto, come per l'equazione quasilineare del trasporto, si cerca di invertire la mappa $H : (s, y) \mapsto x(s, y)$. Se ciò è possibile (almeno localmente) si ricava la potenziale soluzione $u(x) := z(H^{-1}(x))$.

Nel caso particolare di un'equazione quasilineare

$$F(x, u, \nabla u) = a(x, u) \cdot \nabla u + h(x, u) = 0,$$

cioè $F(x, z, p) = a(x, z) \cdot p + h(x, z)$, con $a : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^m$, $h : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, si ha $\nabla_p F(x, z, p) = a(x, z)$, dunque $p \cdot \nabla_p F(x, z, p) = a(x, z) \cdot p = -h(x, z)$. In particolare le prime $m+1$ equazioni in (13.22) si disaccoppiano dalle restanti m, ottenendo il sistema ridotto

$$\begin{cases} x'(s) = a(x(s), z(s)) \\ z'(s) = -h(x(s), z(s)), \end{cases} \tag{13.23}$$

le cui soluzioni sono ancora dette curve caratteristiche associate all'equazione quasilineare. Visto che per il metodo è importante invertire solamente la mappa $(s, y) \mapsto x(s, y)$, in questo caso le variabili $p(s)$ non sono sostanzialmente necessarie e possono essere tralasciate con una conseguente

semplificazione dell'analisi. Si osservi che nel caso (13.13) dove la variabile x viene sostituita da $(x,t) \in \mathbb{R}^m$ con $m = n+1$, $a((x,t),z) = (b(z,x,t),1)$ e $h((x,t),z) = -f(z,x,t)$, il sistema (13.23) diventa

$$\begin{cases} x'(s) = b(z(s),x(s),t(s)) \\ t'(s) = 1 \\ z'(s) = f(z(s),x(s),t(s)), \end{cases}$$

che coincide proprio con (13.15) una volta presa $s = t$ come variabile indipendente grazie alla seconda equazione.

Vedremo ora qualche esempio, per approfondimenti si rimanda a [4].

Esempio 13.10 Riconsideriamo l'Esempio 13.6 nell'ottica del metodo delle caratteristiche. In questo caso trattasi di un'equazione lineare del tipo (13.19) dove $(x_1,x_2) = (x,t)$, $a(x,t) = (2,1)$ e $c = -3$. Si applica quindi il sistema ridotto (13.23) potendo prendere $s = t$:

$$\begin{cases} x'(t) = 2 \\ z'(t) = 3z(t) \\ x(0) = y,\ z(0) = \operatorname{sen} y, \end{cases}$$

da cui $x(t) = y + 2t$ e $z(t) = \mathrm{e}^{3t} \operatorname{sen} y$. Invertendo ora la relazione tra x e y si trova $y = x - 2t$ per cui $u(x,t) = \operatorname{sen}(x-2t)\mathrm{e}^{3t}$ riottenendo la medesima soluzione trovata nell'Esempio 13.6.

Esempio 13.11 Risolviamo

$$\begin{cases} (\partial_1 u(x))(\partial_2 u(x)) = u(x) & x = (x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2 \\ u(0,x_2) = x_2 & x_2 \in \mathbb{R}. \end{cases} \tag{13.24}$$

In questo caso $F(x,z,p) = F(z,p) = F(z,p_1,p_2) = p_1p_2 - z$ per cui si tratta di un'equazione totalmente nonlineare. Si ha $\nabla_x F = 0$, $\partial_z F = -1$, $\nabla_p F = (p_2,p_1)$ e il sistema caratteristico (13.22) diventa

$$\begin{cases} x_1' = p_2 \\ x_2' = p_1 \\ z' = 2p_1p_2 = 2z \\ p_1' = p_1 \\ p_2' = p_2. \end{cases}$$

Le ultime tre equazioni forniscono $z(s) = z_0 \mathrm{e}^{2s}$, $p_i(s) = p_{0i}\mathrm{e}^s$, $i = 1, 2$, che inserite nelle prime due portano a $x_1(s) = p_{02}(\mathrm{e}^s - 1) + x_{01}$, $x_2(s) = p_{01}(\mathrm{e}^s - 1) + x_{02}$. L'ipersuperficie Γ coincide con l'iperpiano, in questo caso una retta, di equazione $x_1 = 0$. Preso su Γ il generico punto $x(0) = (x_{01}, x_{02}) = (0, y)$ si avrà anche $z(0) = u(x(0)) = u(0, y) = y$. Per quanto riguarda le condizioni iniziali imposte sulle componenti p_1, p_2, essendo $u(0, x_2) = x_2$ si ha $\partial_2 u(0, x_2) = 1$, quindi $p_{02} = p_2(0) = \partial_2 u(x(0)) = \partial_2 u(0, y) = 1$. L'ultimo dato iniziale si ricava dall'equazione: poiché $0 = F(z, p) = p_1 p_2 - z$ segue $p_{01}p_{02} = z_0$ da cui $p_{01} = y$. In definitiva $x_1(s) = \mathrm{e}^s - 1$, $x_2(s) = y(\mathrm{e}^s - 1) + y = y\mathrm{e}^s$, $z(s) = y\mathrm{e}^{2s}$, $p_1(s) = y\mathrm{e}^s$, $p_2(s) = \mathrm{e}^s$. Invertendo la mappa $(s, y) \mapsto (x_1, x_2)$ si ottiene l'inversa $(x_1, x_2) \mapsto (s, y) = (\ln(x_1 + 1), \frac{x_2}{x_1+1})$ e in particolare $y\mathrm{e}^{2s} = (y\mathrm{e}^s)\mathrm{e}^s = x_2(x_1 + 1)$ per cui $u(x_1, x_2) = z(s) = x_2(x_1 + 1)$ che si verifica essere effettivamente una soluzione del problema.

Esempio 13.12 Per $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ si consideri il problema ai valori iniziali per l'equazione semilineare

$$\begin{cases} x \cdot \nabla u = u^2 \\ u_{|_{S^1}} = g, \end{cases} \tag{13.25}$$

con g funzione assegnata di classe C^1. L'equazione può scriversi equivalentemente come $x_1\partial_1 u + x_2\partial_2 u - u^2 = 0$ ovvero $F(x, u, \nabla u) = 0$ dove $F(x, z, p) = x \cdot p - u^2$. Anche in questo caso si può utilizzare il sistema ridotto (13.23). Essendo $a(x) = x$, $h(z) = -z^2$ e selezionato il generico punto $\bar{x}$ di S^1, sia $\bar{x} = (\cos y, \operatorname{sen} y)$ con $y \in [0, 2\pi[$, (13.23) diventa

$$\begin{cases} x' = x \\ z' = z^2 \\ x(0) = \bar{x}, \quad z(0) = g(\bar{x}) \end{cases} \qquad \text{cioè} \qquad \begin{cases} x_1' = x_1 \\ x_2' = x_2 \\ z' = z^2 \\ x(0) = \bar{x}, \quad z(0) = g(\bar{x}). \end{cases}$$

Si ottengono $x_1(s) = \mathrm{e}^s \cos y$, $x_2(s) = \mathrm{e}^s \operatorname{sen} y$, $z(s) = \frac{z(0)}{1 - z(0)s}$. Essendo $x_1^2(s) + x_2^2(s) = \mathrm{e}^{2s}$ si ottiene $s = \ln\sqrt{x_1^2 + x_2^2}$, mentre

$$(\cos y, \operatorname{sen} y) = \frac{(x_1(s), x_2(s))}{\sqrt{x_1^2(s) + x_2^2(s)}},$$

da cui segue infine

$$\begin{aligned} u(x_1,x_2) = z(s) = \frac{z(0)}{1-z(0)s} &= \frac{g(\cos y, \operatorname{sen} y)}{1-g(\cos y, \operatorname{sen} y)s} \\ &= \frac{g\big((x_1,x_2)/\sqrt{x_1^2+x_2^2}\big)}{1-g\big((x_1,x_2)/\sqrt{x_1^2+x_2^2}\big)\ln\sqrt{x_1^2+x_2^2}}, \end{aligned}$$

che è la candidata a essere soluzione. Geometricamente le curve caratteristiche rappresentano le semirette (aperte) uscenti dall'origine del piano (x_1, x_2); tali semirette coprono tutto il piano tranne l'origine dove effettivamente la funzione trovata non è (e in generale non può essere) definita.

Approfondimenti

Il principio di Duhamel

Questo metodo risulta molto utile per risolvere problemi lineari di evoluzione non omogenei, del tipo

$$\begin{cases} u_t + \displaystyle\sum_{|\alpha|\le k} a_\alpha(x,t)D^\alpha u = f & \text{in } \mathbb{R}^n\times\mathbb{R}_+ \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad u = 0 & \text{in } \mathbb{R}^n\times\{0\}, \end{cases} \tag{13.26}$$

dove $f, a_\alpha : \mathbb{R}^n\times\mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ sono funzioni fissate, $u = u(x,t) : \mathbb{R}^n\times[0,+\infty[\to\mathbb{R}$ e $D^\alpha = D_x^\alpha$ con $|\alpha| \le k$. α è un *multiindice*, ovvero $\alpha = (\alpha_1,\dots,\alpha_n)$ con $\alpha_i \in \mathbb{N}$, $i = 1,\dots,n$. In tal caso si definisce $D_x^\alpha u = \partial_{x_1}^{\alpha_1}\partial_{x_2}^{\alpha_2}\cdots\partial_{x_n}^{\alpha_n}u$; $|\alpha| = \alpha_1+\ldots+\alpha_n$ è il *peso* del multiindice α. Per brevità di notazione introduciamo l'operatore differenziale L definito da

$$Lu := u_t + \sum_{|\alpha|\le k} a_\alpha(x,t)D^\alpha u. \tag{13.27}$$

Vale allora il seguente

Teorema 13.13 (principio di Duhamel) *Sia Lu come in* (13.27) *e supponiamo che per ogni $s \ge 0$ fissato il problema omogeneo*

$$\begin{cases} Lv = 0 & \text{in } \mathbb{R}^n\times\,]s,+\infty[\\ \quad v = f(\cdot,s) & \text{in } \mathbb{R}^n\times\{s\} \end{cases} \tag{13.28}$$

abbia una soluzione regolare $v(x,t;s)$ tale che le mappe $s \mapsto u_t(x,t;s)$ e $s \mapsto D^\alpha u(x,t;s)$ siano continue per ogni (x,t) e per ogni $|\alpha| \le k$. Allora

$$u(x,t) := \int_0^t v(x,t;s)\,ds \tag{13.29}$$

è soluzione del problema non omogeneo

$$\begin{cases} Lu = f & \text{in } \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+ \\ u = 0 & \text{in } \mathbb{R}^n \times \{0\}. \end{cases} \tag{13.30}$$

Dimostrazione Per le ipotesi fatte, u è ben definita, differenziabile e soddisfa $u(x,0) = 0$. Se α è multiindice con $|\alpha| \leq k$ si può derivare sotto il segno di integrale, perciò

$$D^\alpha u(x,t) = \int_0^t D^\alpha v(x,t;s)\, ds,$$

mentre

$$u_t(x,t) = v(x,t;t) + \int_0^t v_t(x,t;s)\, ds = f(x,t) + \int_0^t v_t(x,t;s)\, ds.$$

Poiché inoltre per ipotesi si ha $Lv(x,t;s) = 0$ per ogni $(x,t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+$ e $0 \leq s \leq t$, otteniamo che

$$\begin{aligned} Lu &= u_t(x,t) + \sum_{|\alpha|\leq k} a_\alpha(x,t) D^\alpha u(x,t) \\ &= f(x,t) + \int_0^t v_t(x,t;s)\, ds + \sum_{|\alpha|\leq k} a_\alpha(x,t) \int_0^t D^\alpha v(x,t;s)\, ds \\ &= f(x,t) + \int_0^t \big(v_t(x,t;s) + \sum_{|\alpha|\leq k} a_\alpha(x,t) D^\alpha v(x,t;s)\big)\, ds \\ &= f(x,t) + \int_0^t Lv(x,t;s)\, ds = f(x,t), \end{aligned}$$

quindi u è soluzione di (13.30). □

Osservazione 13.14 Il principio sostanzialmente afferma che per risolvere un problema ai valori iniziali non omogeneo nell'equazione e omogeneo nel dato iniziale, ci si può ricondurre a risolvere una famiglia di problemi omogenei nell'equazione e non omogenei nel dato iniziale.

Osservazione 13.15 Nel caso in cui le funzioni a_α dipendono solamente dalle variabili x (per esempio se sono costanti), l'equazione $Lv = 0$ è invariante per traslazioni temporali. Perciò, detta $w(x,t;s)$ la soluzione del problema omogeneo

$$\begin{cases} Lw = 0 & \text{in } \mathbb{R}^n \times]0,+\infty[\\ w = f(x,s) & \text{in } \mathbb{R}^n \times \{0\}, \end{cases} \tag{13.31}$$

si ha che la soluzione $v(x,t;s)$ di (13.28) soddisfa $v(x,t;s) = w(x,t-s;s)$. Il vantaggio rispetto alle (13.28) è che in (13.31), al variare di s, l'insieme di definizione è sempre lo stesso. Tutto questo non è vero se le a_α dipendono anche da t (perché?).

Corollario 13.16 *Sia Lu come in* (13.27) *con le funzioni a_α che non dipendono da t. Supponiamo che per ogni $s \geq 0$ fissato il problema omogeneo*

$$\begin{cases} Lw = 0 & \text{in } \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+ \\ w = f(x,s) & \text{in } \mathbb{R}^n \times \{0\}, \end{cases} \tag{13.32}$$

abbia una soluzione regolare $w(x,t;s)$ tale che per ogni (x,t) e ogni $|\alpha| \leq k$ le applicazioni $s \mapsto D^\alpha w(x,t;s)$ siano continue. Allora la funzione

$$u(x,t) := \int_0^t w(x,t-s;s)\,ds \tag{13.33}$$

è soluzione del problema non omogeneo (13.30).

Dimostrazione Si veda l'Osservazione 13.15. □

Applichiamo ora il principio di Duhamel al problema (13.6) che riscriviamo per comodità

$$\begin{cases} u_t + b \cdot \nabla u = f & \text{in } \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+ \\ u = g & \text{in } \mathbb{R}^n \times \{0\}. \end{cases}$$

Grazie al principio di sovrapposizione per le equazioni lineari, la soluzione di (13.6) si otterrà come somma delle soluzioni dei due problemi

$$\begin{cases} z_t + b \cdot \nabla z = 0 & \text{in } \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+ \\ z = g & \text{in } \mathbb{R}^n \times \{0\}, \end{cases} \quad \begin{cases} v_t + b \cdot \nabla v = f & \text{in } \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+ \\ v = 0 & \text{in } \mathbb{R}^n \times \{0\}. \end{cases} \tag{13.34}$$

Il primo, già studiato in (13.5), ha come soluzione $z(x,t) = g(x-tb)$. Per quanto riguarda il secondo, nelle ipotesi di regolarità fatte su f e g, grazie al Teorema 13.13 (o, meglio, al Corollario 13.16) ci si riconduce a risolvere il problema ai valori iniziali

$$\begin{cases} w_t + b \cdot \nabla w = 0 & \text{in } \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+ \\ w = f(x,s) & \text{in } \mathbb{R}^n \times \{0\} \end{cases}$$

ancora del tipo (13.5), per cui la soluzione è $w(x,t;s) = f(x-tb,s)$ e per (13.33) la soluzione del secondo problema in (13.34) è

$$v(x,t) = \int_0^t f(x-(t-s)b,s)\,ds.$$

Per il principio di sovrapposizione si ha dunque

$$u(x,t) = z(x,t) + v(x,t) = g(x-tb) + \int_0^t f(x+(s-t)b,s)\,ds,$$

formula già ottenuta in (13.7).

Osservazione 13.17 In un certo senso il principio di Duhamel è una generalizzazione della formula della variazione delle costanti (9.8). Infatti, sia dato il generico problema di Cauchy per il sistema lineare di equazioni differenziali ordinarie non omogeneo con dato iniziale omogeneo

$$\begin{cases} y' = A(t)y + b(t) \\ y(0) = 0, \end{cases} \tag{13.35}$$

dove $A : I \to \mathcal{M}(n,\mathbb{R})$, $b : I \to \mathbb{R}^n$ sono funzioni continue. Per la formula della variazione delle costanti la soluzione è

$$y(t) = \int_0^t \Phi(t)\Phi(s)^{-1}b(s)\,ds. \tag{13.36}$$

Si osservi che $v(t;s) = \Phi(t)\Phi(s)^{-1}b(s)$ è proprio la soluzione del problema di Cauchy per l'equazione omogenea con dati non omogenei

$$\begin{cases} y' = A(t)y \\ y(s) = b(s), \end{cases} \tag{13.37}$$

perciò (13.35) e (13.37) sono gli analoghi di (13.30) e (13.28), mentre (13.36) è l'analoga di (13.29) nel caso dell'operatore differenziale $Ly = y' - A(t)y$.

Dipendenza continua rispetto ai dati

Grazie alla formula risolutiva (13.7) è facile dimostrare anche la dipendenza continua delle soluzioni di (13.6) rispetto al dato iniziale g. Date infatti $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ e dati iniziali $g_1, g_2 : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ di classe C^1, e dette u_1, u_2 le soluzioni, rispettivamente, dei seguenti problemi

$$\begin{cases} (u_i)_t + b\cdot\nabla u_i = f & \text{in } \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+ \\ \qquad\qquad u_i = g_i & \text{in } \mathbb{R}^n \times \{0\} \end{cases} \qquad i = 1,2, \tag{13.38}$$

per la formula (13.7) si ottiene che per ogni $(x,t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+$ si ha

$$|u_1(x,t) - u_2(x,t)| = |g_1(x-tb) - g_2(x-tb)|$$

e quindi

$$||u_1 - u_2||_\infty = ||g_1 - g_2||_\infty,$$

che mostra che la mappa $g \mapsto u$ è un'applicazione lineare continua da $\big(C^1(\mathbb{R}^n), ||\cdot||_\infty\big)$ in $\big(C^1(\mathbb{R}^n \times [0,+\infty[), ||\cdot||_\infty\big)$.

Osserviamo che c'è continuità anche rispetto a f. Infatti, se ora prendiamo $f_1, f_2 : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ e $g_1, g_2 : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ di classe C^1, e diciamo u_1, u_2 le soluzioni, rispettivamente, dei problemi

$$\begin{cases} (u_i)_t + b \cdot \nabla u_i = f_i & \text{in } \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+ \\ u_i = g_i & \text{in } \mathbb{R}^n \times \{0\} \end{cases} \qquad i = 1,2, \tag{13.39}$$

sempre grazie alla formula (13.7) si ottiene che per ogni $T > 0$ e per ogni $(x,t) \in \mathbb{R}^n \times [0,T]$ si ha

$$\begin{aligned} |u_1(x,t) - u_2(x,t)| &\le |g_1(x-tb) - g_2(x-tb)| + \\ &\quad + \int_0^t \big|f_1(x+(s-t)b,s) - f_2(x+(s-t)b,s)\big|\,ds \\ &\le ||g_1 - g_2||_\infty + T||f_1 - f_2||_\infty, \end{aligned}$$

e quindi

$$||u_1 - u_2||_\infty \le ||g_1 - g_2||_\infty + T||f_1 - f_2||_\infty, \tag{13.40}$$

che mostra che la mappa $(g,f) \mapsto u$ è un'applicazione lineare continua da $\big(C^1(\mathbb{R}^n), ||\cdot||_\infty\big) \times \big(C^1(\mathbb{R}^n \times [0,T]), ||\cdot||_\infty\big)$ in $\big(C^1(\mathbb{R}^n \times [0,T]), ||\cdot||_\infty\big)$.

Esercizio 13.18 *Definite le seguenti norme*

$$||u||_{C^1(\mathbb{R}^n\times[0,T])} := \sup_{\mathbb{R}^n\times[0,T]} |u(x,t)| + \sum_{i=1}^n \sup_{\mathbb{R}^n\times[0,T]} |u_{x_i}(x,t)| + \sup_{\mathbb{R}^n\times[0,T]} |u_t(x,t)|,$$

$$||g||_{C^1(\mathbb{R}^n)} := \sup_{\mathbb{R}^n} |g(x)| + \sum_{i=1}^n \sup_{\mathbb{R}^n} |g_{x_i}(x)|,$$

dimostrare che la mappa $(g,f) \mapsto u$ dove u è l'unica soluzione (13.7) *di* (13.6)*, è continua da $\big(C^1(\mathbb{R}^n), ||\cdot||_{C^1(\mathbb{R}^n)}\big) \times \big(C^1(\mathbb{R}^n \times [0,T]), ||\cdot||_{C^1(\mathbb{R}^n\times[0,T])}\big)$ in $\big(C^1(\mathbb{R}^n \times [0,T]), ||\cdot||_{C^1(\mathbb{R}^n\times[0,T])}\big)$.*

Appendice

Alcuni risultati di topologia

Spazi metrici (e topologici) compatti

Richiamiamo le definizioni di compattezza negli spazi metrici. Sia (X, d) una spazio metrico e sia $E \subseteq X$.

Definizione A.1 *L'insieme E si dice* compatto per successioni *(o* sequenzialmente compatto*) se ogni successione $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ a valori in E ammette una sottosuccessione $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ convergente a un punto di E.*
L'insieme E si dice relativamente compatto per successioni *(o* relativamente sequenzialmente compatto*) se $\overline{E}$ è compatto per successioni cioè se ogni successione $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ a valori in E ammette una sottosuccessione $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ convergente a un punto di X (non necessariamente di E).*

Definizione A.2 *L'insieme E si dice* compatto per ricoprimenti *(o, brevemente,* compatto*) se ogni ricoprimento aperto di E ammette un sottoricoprimento finito, cioè se per ogni famiglia $(A_\alpha)_{\alpha\in I}$ di aperti di X tale che $E \subseteq \bigcup_{\alpha\in I} A_\alpha$ esiste $J \subseteq I$ sottoinsieme finito tale che $E \subseteq \bigcup_{\alpha\in J} A_\alpha$.*
L'insieme E si dice relativamente compatto *se la chiusura $\overline{E}$ è compatta.*

Le due precedenti definizioni si applicano anche al caso più generale in cui (X, τ) è uno spazio topologico non necessariamente metrico.

Definizione A.3 *Lo spazio metrico X si dice* completo *se ogni successione di Cauchy in X è convergente.*

Definizione A.4 *L'insieme E si dice* totalmente limitato *se per ogni $\varepsilon > 0$ esistono $x_1, x_2, \ldots, x_N \in E$ tali che $E \subseteq \bigcup_{k=1}^{N} B(x_k, \varepsilon)$ cioè se per ogni $x \in E$ esiste $k = 1, \ldots, N$ tale che $d(x, x_k) < \varepsilon$. L'insieme $\{x_1, x_2, \ldots, x_N\}$ si dice ε-*rete.

Ricordiamo che ogni sottoinsieme E di uno spazio topologico (X, τ) può essere visto come spazio topologico munito della topologia τ_E indotta da τ su E. Si può dimostrare che la proprietà di compattezza di E è indipendente dalla topologia nel senso indicato dal seguente lemma.

Lemma A.5 *Sia (X, τ) spazio topologico e sia $E \subseteq X$ un sottospazio. Allora (E, τ_E) è uno spazio topologico compatto nella topologia indotta se e solo se E è sottoinsieme compatto di (X, τ) nella topologia di X.*

Dimostrazione Supponiamo che (E, τ_E) sia spazio topologico compatto. Preso un ricoprimento di E con $(A_\alpha)_{\alpha \in I}$ aperti di X, per definizione di topologia indotta $(A_\alpha \cap E)_{\alpha \in I}$ è un ricoprimento di E con aperti nella topologia indotta. Per compattezza esiste $J \subseteq I$ finito tale che $E = \bigcup_{\alpha \in J} (A_\alpha \cap E)$, ma allora $E \subseteq \bigcup_{\alpha \in J} A_\alpha$ ed E è sottoinsieme compatto di X.

Viceversa, sia E sottoinsieme compatto di (X, τ). Sia $(B_\alpha)_{\alpha \in I}$ un ricoprimento di E con aperti di E. Per definizione di τ_E, per ogni α esiste A_α aperto di X tale che $B_\alpha = A_\alpha \cap E$. Ma allora $(A_\alpha)_{\alpha \in I}$ è un ricoprimento di E con aperti di X e poiché E è sottoinsieme compatto di X esiste un sottoinsieme finito J di I tale che $E \subseteq \bigcup_{\alpha \in J} A_\alpha$. Di conseguenza si ha anche $E = \bigcup_{\alpha \in J} B_\alpha$ perciò (E, τ_E) è uno spazio topologico compatto. $\square$

Per un generico spazio topologico le due nozioni di compattezza sono distinte. Nel caso degli spazi metrici vale invece il seguente teorema.

Teorema A.6 (di caratterizzazione degli spazi metrici compatti) *Sia (X, d) spazio metrico e sia $E \subseteq X$. Sono equivalenti*

1. *E è compatto;*
2. *E è sequenzialmente compatto;*
3. *E è completo e totalmente limitato.*

Dimostrazione È già noto dai corsi di Analisi Matematica degli anni precedenti che 1. e 2. sono equivalenti e che la compattezza (sequenziale) implica la completezza di E. Verifichiamo che se E è compatto allora è totalmente limitato. Fissato $\varepsilon > 0$ la famiglia $\big(B(x, \varepsilon)\big)_{x \in E}$ è ricoprimento aperto di E. Per compattezza esiste un sottoinsieme finito J di E tale che $E \subseteq \bigcup_{x \in J} B(x, \varepsilon)$. L'insieme J è allora una ε-rete ed E è totalmente limitato.

Viceversa, dimostriamo che 3. implica 2. Fissata (x_n) successione in E dimostriamo che ammette sottosuccessione convergente in E. Fissato $\varepsilon = 1$ sia $\{z_1^1, z_2^1, \ldots, z_{N_1}^1\}$ una 1-rete. Allora esiste $z_{k_1}^1$ tale che $B(z_{k_1}^1, 1)$ contiene

x_n per infiniti valori dell'indice n. Sia x_{n_1} un tale elemento. Poiché ogni sottoinsieme di un insieme totalmente limitato è ancora totalmente limitato (verificarlo per esercizio), $E_1 := B(z^1_{k_1}, 1) \cap E \subseteq E$ è totalmente limitato. Sia $\{z^2_1, z^2_2, \ldots, z^2_{N_2}\}$ una 1/2-rete di E_1. Come in precedenza esiste $z^2_{k_2}$ tale che $B(z^2_{k_2}, 1/2)$ contiene x_n per infiniti valori dell'indice $n > n_1$. Sia x_{n_2} un tale elemento. Per induzione si costruisce una sottosuccessione (x_{n_j}) di (x_n) e una successione $(z^j_{k_j})$ di punti di E tali che $x_{n_h} \in B(z^j_{k_j}, 1/2^{j-1})$ per ogni $h \geq j$. In particolare per la disuguaglianza triangolare si ha che $d(x_{n_i}, x_{n_h}) \leq 1/2^{j-2}$ per ogni $i, h \geq j$ da cui segue facilmente che (x_{n_j}) è di Cauchy. Per la completezza di E tale sottosuccessione converge a un elemento di E, da cui la tesi. □

Spazi metrici (e topologici) separabili

Definizione A.7 *Uno spazio topologico* (X, τ) *si dice* separabile *se esiste un sottoinsieme contabile (cioè finito o al più numerabile) e denso, cioè se esiste* $G \subseteq X$ *contabile tale che* $\overline{G} = X$.

Per esempio $\mathbb{R}^n$ con l'usuale topologia è separabile, infatti il sottoinsieme $\mathbb{Q}^n$ è denso e numerabile. Più in generale si potrebbe dimostrare che ogni spazio topologico che soddisfa il "secondo assioma di numerabilità" (esiste una base di aperti numerabile) è separabile (per approfondire l'argomento si consulti un libro di topologia).

Esercizio A.8 Dimostrare che ogni sottoinsieme aperto A di $\mathbb{R}^n$ è (come sottospazio topologico) separabile. Cosa si può dire dell'insieme $\mathbb{R}^n \setminus \mathbb{Q}^n$ (per facilità considerare il caso $n = 1$)?

Esercizio A.9 Un celebre teorema di approssimazione dovuto a Weierstrass afferma che ogni funzione continua $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ può essere approssimata uniformemente in $[a, b]$ con un polinomio, cioè che per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un polinomio P tale che $||f - P||_\infty < \varepsilon$. A partire da questo risultato dimostrare che lo spazio metrico $\big(C([a, b], \mathbb{R}), d_\infty\big)$ è separabile.

Teorema A.10 (di separabilità degli spazi metrici compatti) *Ogni spazio metrico compatto è separabile.*

Dimostrazione Sia (E, d) spazio metrico compatto. Per il Teorema A.6 E è totalmente limitato, dunque ammette ε-reti per ogni scelta di $\varepsilon > 0$. In particolare, per ogni $n \in \mathbb{N}$ sia $\mathcal{R}_n$ una $1/n$-rete. L'insieme $\mathcal{R} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{R}_n$ è (al più) numerabile. Inoltre fissato $x \in E$ e $\varepsilon > 0$ sia n_ε tale che $1/n_\varepsilon < \varepsilon$. Poiché $\mathcal{R}_{n_\varepsilon}$ è $1/n_\varepsilon$-rete, esiste $x_\varepsilon \in \mathcal{R}_{n_\varepsilon} \subset \mathcal{R}$ tale che $d(x, x_\varepsilon) < 1/n_\varepsilon < \varepsilon$, quindi $\mathcal{R}$ è anche denso e in conclusione E è separabile. □

Insiemi compatti in $C(E, \mathbb{R})$

In questa sezione caratterizzeremo i sottoinsiemi compatti di $C(E, \mathbb{R})$ dove (E, d) è una spazio metrico compatto. Ricordiamo anzitutto che definiti

$$C(E, \mathbb{R}) := \big\{ f : E \to \mathbb{R} \text{ continue} \big\},$$
$$||f||_\infty := \max_{x \in E} |f(x)|,$$

l'insieme $\big(C(E, \mathbb{R}), ||\cdot||_\infty\big)$ è uno spazio normato (dunque metrico) completo.

Prima di passare a enunciare e dimostrare il teorema principale, diamo alcune definizioni che saranno utilizzate nel seguito. Sia (E, d) spazio metrico (non necessariamente compatto).

Definizione A.11 *Un sottoinsieme $\mathcal{F} \subseteq C(E, \mathbb{R})$ si dice* equicontinuo *se per ogni fissato $x \in E$ e $\varepsilon > 0$ esiste $\delta = \delta_\varepsilon(x) > 0$ tale che per ogni $y \in E$ con $d(y, x) < \delta$ e per ogni $f \in \mathcal{F}$ si ha $|f(y) - f(x)| < \varepsilon$.*

Osserviamo che se f è continua in E allora per ogni fissato $x \in E$ e $\varepsilon > 0$ esiste $\delta = \delta_\varepsilon(x, f) > 0$ tale che per ogni $y \in E$ con $d(y, x) < \delta$ si ha $|f(y) - f(x)| < \varepsilon$. Un insieme $\mathcal{F}$ è dunque equicontinuo se il δ può essere scelto indipendente da $f \in \mathcal{F}$.

In maniera analoga si definisce

Definizione A.12 *Un sottoinsieme $\mathcal{F} \subseteq C(E, \mathbb{R})$ si dice* equiuniformemente continuo *se per ogni fissato $\varepsilon > 0$ esiste $\delta = \delta_\varepsilon > 0$ tale che per ogni $x, y \in E$ tali che $d(y, x) < \delta$ e per ogni $f \in \mathcal{F}$ si ha $|f(y) - f(x)| < \varepsilon$.*

Definizione A.13 *Un sottoinsieme $\mathcal{F} \subseteq C(E, \mathbb{R})$ si dice* puntualmente limitato *se per ogni $x \in E$ esiste $M = M_x > 0$ tale che $|f(x)| \leq M$ per ogni $f \in \mathcal{F}$.*

Definizione A.14 *Un sottoinsieme $\mathcal{F} \subseteq C(E, \mathbb{R})$ si dice* equilimitato *se esiste $M > 0$ tale che per ogni $x \in E$ e ogni $f \in \mathcal{F}$ sia $|f(x)| \leq M$, ovvero se $||f||_\infty \leq M$. In altre parole $\mathcal{F}$ è equilimitato se e solo se $\mathcal{F}$ è limitato in $C(E, \mathbb{R})$ rispetto alla norma infinito.*

Definizione A.15 *Un sottoinsieme $\mathcal{F} \subseteq C(E, \mathbb{R})$ si dice* equilipschitziano *se esiste $L > 0$ tale che per ogni $x_1, x_2 \in E$ e ogni $f \in \mathcal{F}$ sia*

$$|f(x_1) - f(x_2)| \leq L\, d(x_1, x_2).$$

Osservazione A.16 È facile dimostrare che (farlo per esercizio)

$$\text{equilipschitzianità} \implies \text{equiuniforme continuità} \implies \text{equicontinuità}$$

e che in generale non valgono le implicazioni inverse. Se però E è anche compatto allora si ha

$$\text{equicontinuità} \implies \text{equiuniforme continuità}$$

come viene dimostrato nel seguente teorema che estende quello di Heine-Cantor sull'uniforme continuità delle funzioni continue definite sui compatti.

Teorema A.17 *Sia (E, d) spazio metrico compatto. Se $\mathcal{F} \subseteq C(E, \mathbb{R})$ è equicontinuo allora è anche equiuniformemente continuo.*

Dimostrazione Ricordiamo che, essendo metrico, E è anche sequenzialmente compatto. Per assurdo supponiamo che $\mathcal{F}$ non sia equiuniformemente continuo; allora esiste $\varepsilon > 0$ tale che per ogni $\delta > 0$ esistono $x_\delta, y_\delta \in E$ con $d(x_\delta, y_\delta) < \delta$ ed esiste $f_\delta \in \mathcal{F}$ tale che $|f_\delta(x_\delta) - f_\delta(y_\delta)| \geq \varepsilon$. in particolare, per ogni $n \in \mathbb{N}$ esistono $x_n, y_n \in E$ con $d(x_n, y_n) < 1/n$ ed esiste $f_n \in \mathcal{F}$ tale che $|f_n(x_n) - f_n(y_n)| \geq \varepsilon$. Per la compattezza sequenziale di E, eventualmente passando a successioni, si ha che $x_n \to \bar{x}$ con $\bar{x} \in E$. Facilmente anche $y_n \to \bar{x}$. In relazione a $\bar{x}$ esiste $\delta_\varepsilon = \delta_\varepsilon(\bar{x})$ tale che se $d(x, \bar{x}) < \delta_\varepsilon$ si ha $|f(x) - f(\bar{x})| < \varepsilon/2$ per ogni $f \in \mathcal{F}$. Definitivamente si avrà $d(x_n, \bar{x}) < \delta_\varepsilon$ e $d(y_n, \bar{x}) < \delta_\varepsilon$ per cui

$$\varepsilon \leq |f_n(x_n) - f_n(y_n)| \leq |f_n(x_n) - f_n(\bar{x})| + |f_n(\bar{x}) - f_n(y_n)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2},$$

da cui l'assurdo. □

Passiamo ora a enunciare e dimostrare il teorema fondamentale di questa sezione.

Teorema A.18 (di Ascoli-Arzelà, di compattezza in $C(E, \mathbb{R})$) *Sia (E, d) uno spazio metrico compatto e sia $\mathcal{F} \subseteq C(E, \mathbb{R})$. Allora $\mathcal{F}$ è sequenzialmente compatto in $\big(C(E, \mathbb{R}), d_\infty\big)$ se e solo se*

1. *$\mathcal{F}$ è chiuso;*
2. *$\mathcal{F}$ è puntualmente limitato;*
3. *$\mathcal{F}$ è equicontinuo.*

(Inoltre $\mathcal{F}$ è relativamente sequenzialmente compatto sse valgono 2. e 3.)

Osservazione A.19 Essendo E compatto, per il Teorema A.17 se $\mathcal{F}$ è equicontinuo allora è anche equiuniformemente continuo. Si può inoltre dimostrare che se E è compatto ed $\mathcal{F}$ è equicontinuo e puntualmente limitato allora $\mathcal{F}$ è equilimitato (cioè limitato in $C(E,\mathbb{R})$). Infatti $\mathcal{F}$ è equiuniformemente continuo, quindi esiste $\delta > 0$ tale che se $d(x,y) < \delta$ e $f \in \mathcal{F}$ si ha $|f(x) - f(y)| < 1$. Sia $x_1, x_2, \ldots, x_N$ una δ-rete di E e sia $M \geq \max\{|f(x_k)| : \ f \in \mathcal{F}, \ k = 1, \ldots, N\}$. Per ogni $x \in E$ esiste x_k tale che $d(x, x_k) < \delta$ perciò

$$|f(x)| \leq |f(x) - f(x_k)| + |f(x_k)| < 1 + M,$$

per ogni $f \in \mathcal{F}$, da cui l'equilimitatezza.

Di conseguenza le proprietà 1., 2. e 3. possono essere equivalentemente sostituite con

1. $\mathcal{F}$ è chiuso;

2′. $\mathcal{F}$ è limitato;

3′. $\mathcal{F}$ è equiuniformemente continuo.

Dimostrazione (del Teorema di Ascoli-Arzelà) Proviamo che se $\mathcal{F}$ è (sequenzialmente) compatto allora valgono 1., 2. e 3. È chiaro che $\mathcal{F}$ è chiuso e limitato in $C(E,\mathbb{R})$ (i compatti in spazi metrici sono chiusi e limitati) quindi equilimitato e puntualmente limitato, dunque valgono 1. e 2. Verifichiamo che vale 3. Fissato $\varepsilon > 0$ sia $\{f_1, f_2, \ldots, f_N\}$ una $\varepsilon/3$-rete del compatto $\mathcal{F}$. Le funzioni f_k sono continue sul compatto E quindi, per il Teorema di Heine-Cantor, sono uniformemente continue perciò, in relazione all'ε scelto, per ogni $k = 1, \ldots, N$ esiste $\delta_\varepsilon(f_k)$ tale che se $x, y \in E$ con $d(x,y) < \delta_\varepsilon(f_k)$ si ha $|f_k(x) - f_k(y)| < \varepsilon$. Poniamo $\delta_\varepsilon := \min_{k=1,\ldots,N} \delta_{\varepsilon/3}(f_k)$. Presa ora $f \in \mathcal{F}$ in relazione alla $\varepsilon/3$-rete esiste i tale che $f \in B(f_i, \varepsilon/3)$ ovvero $||f - f_i||_\infty < \varepsilon/3$. Se $x, y \in E$ con $d(x,y) < \delta_\varepsilon (< \delta_{\varepsilon/3}(f_i))$ si ha

$$\begin{aligned} |f(x) - f(y)| &\leq |f(x) - f_i(x)| + |f_i(x) - f_i(y)| + |f_i(y) - f(y)| \\ &\leq 2||f - f_i||_\infty + |f_i(x) - f_i(y)| < 2\frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3}. \end{aligned}$$

Poiché ciò vale per ogni $f \in \mathcal{F}$ con δ_ε dipendente solo da ε, segue la equiuniforme continuità di $\mathcal{F}$.

Viceversa, dimostriamo ora che se valgono 1., 2. e 3. allora $\mathcal{F}$ è sequenzialmente compatto in $C(E,\mathbb{R})$. Fissata una successione $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathcal{F}$ dobbiamo verificare che ammette una sottosuccessione convergente in $C(E,\mathbb{R})$.

Poiché E è spazio metrico compatto per il Teorema A.10 è separabile. Sia $\mathcal{R} := \cup_{n=1}^{\infty} \mathcal{R}_n$ il sottoinsieme contabile e denso ottenuto dall'unione delle $1/n$-reti $\mathcal{R}_n$, come nella dimostrazione del Teorema A.6. Ordiniamo i suoi elementi, sia dunque $\mathcal{R} = \{x_1, x_2, \dots\}$. Fissato x_1, per l'ipotesi 2. esiste $M_1 > 0$ tale che $|f_n(x_1)| \leq M_1$ per ogni $n \in \mathbb{N}$, quindi la successione $\big(f_n(x_1)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ è limitata in $\mathbb{R}$ e per il Teorema di Bolzano-Weierstrass ammette una sottosuccessione $\big(f_{n_k}(x_1)\big)_{k\in\mathbb{N}}$ convergente. Per facilità di notazione poniamo $f_{1,k} := f_{n_k}$. Per costruzione si ha che la successione $f_{1,k}$ converge puntualmente in x_1. Considerato ora il punto x_2 si avrà che esiste $M_2 > 0$ tale che $|f_{1,k}(x_2)| \leq M_2$ per ogni $k \in \mathbb{N}$, quindi la successione $\big(f_{1,k}(x_2)\big)_{k\in\mathbb{N}}$ è limitata in $\mathbb{R}$ e a sua volta ammette una sottosuccessione convergente che denotiamo con $(f_{2,k}(x_2))$. Per costruzione si ha che la successione di funzioni $f_{2,k}$ converge puntualmente in x_2 ed essendo sottosuccessione di $f_{1,k}$ converge anche in x_1. Per induzione, si costruiscono successioni

$$\begin{array}{lllll}
f_{1,1} & f_{1,2} & \cdots & f_{1,k} & \cdots \quad \text{sottosuc. di } (f_k)\text{, convergente in } x_1 \\
f_{2,1} & f_{2,2} & \cdots & f_{2,k} & \cdots \quad \text{sottosuc. di } (f_{1,k})\text{, convergente in } x_1, x_2 \\
f_{3,1} & f_{3,2} & \cdots & f_{3,k} & \cdots \quad \text{sottosuc. di } (f_{2,k})\text{, convergente in } x_1, x_2, x_3 \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
f_{h,1} & f_{h,2} & \cdots & f_{h,k} & \cdots \quad \text{sottosuc. di } (f_{h-1,k})\text{, convergente in } x_1, \dots, x_h \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots
\end{array}$$

Si noti che tutte le successioni $(f_{h,k})_{k\in\mathbb{N}}$ sono sottosuccessioni di $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$. Consideriamo la successione $(g_k) := (f_{k,k})$ ottenuta col *procedimento diagonale*, anch'essa sottosuccessione di (f_k). Mostriamo che tale successione converge in $C(E, \mathbb{R})$; a tal fine utilizzeremo la completezza di $\big(C(E, \mathbb{R}), d_\infty\big)$. Verifichiamo anzitutto che converge puntualmente in tutti gli x_h per $h \geq 1$ (cioè nell'insieme denso $\mathcal{R}$). Infatti, fissato h se $k \geq h$ per costruzione $(f_{k,k})_{k\geq h}$ è sottosuccessione di $(f_{h,k})_{k\in\mathbb{N}}$ dunque converge in $x_1, \dots, x_h$. Per l'arbitrarietà di $h \in \mathbb{N}$ segue la tesi. Verifichiamo che (g_k) converge anche in tutti gli altri punti di E e che tale convergenza è uniforme.

Fissato $x \in E \setminus \mathcal{R}$, osserviamo che se $n, m \in \mathbb{N}$, $x_h \in \mathcal{R}$ si ha

$$|g_n(x) - g_m(x)| \leq |g_n(x) - g_n(x_h)| + |g_n(x_h) - g_m(x_h)| + |g_m(x_h) - g_m(x)|.$$

Il primo e il terzo termine sul lato destro possono essere resi piccoli grazie all'equicontinuità di $\mathcal{F}$, il secondo grazie alla convergenza di (g_n) in x_h. Più precisamente, per l'Osservazione A.16 $\mathcal{F}$ è anche equiuniformemente continuo perciò fissato $\varepsilon > 0$ esiste $\delta = \delta_\varepsilon > 0$ tale che se $x, y \in E$, $d(x, y) < \delta_\varepsilon$ e per ogni $f \in \mathcal{F}$ si ha $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$. In particolare si ha $|g_n(x) - g_n(y)| < \varepsilon$ per ogni n. Per la densità di $\mathcal{R}$, fissato $x \in E \setminus \mathcal{R}$ esiste $x_h =$

$x_h(\varepsilon, x) \in \mathcal{R}$ tale che $d(x, x_h) < \delta_\varepsilon$ perciò $|g_n(x) - g_n(x_h)| < \varepsilon$ per ogni n. Dalla relazione sopra si ottiene quindi

$$|g_n(x) - g_m(x)| \leq \varepsilon + |g_n(x_h) - g_m(x_h)| + \varepsilon.$$

Poiché inoltre $(g_n(x_h))_n$ converge allora è di Cauchy, dunque esiste $\bar{n}_\varepsilon = \bar{n}_\varepsilon(x_h) = \bar{n}_\varepsilon(x)$ tale che se $n, m \geq \bar{n}_\varepsilon(x)$ si ha $|g_n(x_h) - g_m(x_h)| < \varepsilon$. In definitiva, fissato $\varepsilon > 0$, se $n, m \geq \bar{n}_\varepsilon(x)$ si ottiene

$$|g_n(x) - g_m(x)| \leq \varepsilon + \varepsilon + \varepsilon = 3\varepsilon,$$

da cui segue che $(g_n(x))_n$ e di Cauchy in $\mathbb{R}$ quindi converge. Dimostriamo infine che $(g_n)_n$ è di Cauchy in $\big(C(E, \mathbb{R}), d_\infty\big)$. Basta riuscire a trovare un $\bar{n}_\varepsilon(x)$ indipendente da x. Fissato $\varepsilon > 0$ sia $n^* = n^*(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ tale che $1/n^* < \delta_\varepsilon$ e consideriamo la $1/n^*$-rete $\mathcal{R}_{n^*}$. Per ogni $x \in E$ esiste $x_h \in \mathcal{R}_{n^*}$ tale che $d(x, x_h) < 1/n^* < \delta_\varepsilon$. In definitiva, fissati $\varepsilon > 0$ e $x \in E$, è sufficiente prendere x_h all'interno dell'insieme (finito!) $\mathcal{R}_{n^*}$ invece che in tutto $\mathcal{R}$. Posto quindi $\bar{n}_\varepsilon := \max\big\{\bar{n}_\varepsilon(x_h) : \ x_h \in \mathcal{R}_{n^*}\big\}$, se $n, m \geq \bar{n}_\varepsilon$ si ha $|g_n(x) - g_m(x)| < \varepsilon$ per ogni $x \in E$, ovvero $||g_n - g_m||_\infty < \varepsilon$ cioè $(g_n)_n$ è di Cauchy nella norma infinito. Per la completezza di $\big(C(E, \mathbb{R}), d_\infty\big)$ la successione g_n (sottosuccessione di f_n) converge uniformemente a una funzione $f \in C(E, \mathbb{R})$. $\square$

Osservazione A.20 Il risultato si estende in maniera ovvia al caso di sottoinsiemi dello spazio $C(E, \mathbb{R}^n)$.

Esercizio A.21 Sia (E, d) uno spazio metrico. Ricordiamo che una funzione $f : E \to \mathbb{R}$ è Hölderiana di costante $\alpha \in]0, 1]$ se

$$N_\alpha(f) := \sup_{x \neq y} \frac{|f(x) - f(y)|}{d(x, y)^\alpha} < \infty,$$

ovvero se e solo se esiste $M > 0$ tale che $|f(x) - f(y)| \leq M\, d(x, y)^\alpha$ per ogni $x, y \in E$ (il numero $N_\alpha(f)$ è la più piccola delle costanti M per cui vale la disuguaglianza). Dimostrare che se E è compatto l'insieme definito da $\mathcal{F} := \big\{f \in C(E, \mathbb{R}) : \ ||f||_\infty \leq 1, \ N_\alpha(f) \leq 1\big\}$ è compatto in $C(E, \mathbb{R})$ nella metrica uniforme.

Alcuni richiami di Analisi Matematica I e II

Ricordiamo ora alcuni noti risultati dei corsi di analisi degli anni precedenti la cui dimostrazione è facilmente reperibile sui libri di testo.

Teorema A.22 (criterio di Cauchy) *Sia $f : A \to \mathbb{R}^n$ con $A \subseteq \mathbb{R}^m$, e sia x_0 punto di accumulazione di A. Allora esiste finito il limite $\lim_{x\to x_0} f(x)$ se e solo se $\forall\, \varepsilon > 0$ esiste un intorno U_ε di x_0 tale che $\|f(x_2) - f(x_1)\| < \varepsilon$ per ogni $x_2, x_1 \in U_\varepsilon \cap A \setminus \{x_0\}$.*

Teorema A.23 (del limite della derivata) *Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continua in $[a, b]$ e derivabile in $[a, b] \setminus \{x_0\}$. Se esiste finito il limite $\lim_{x\to x_0} f'(x)$ allora f è derivabile anche in x_0 e vale $f'(x_0) = \lim_{x\to x_0} f'(x)$.*

Teorema A.24 (del Dini) *Siano $g(x_1, x_2, ..., x_m, y_1, y_2, ..., y_n) = g(x, y) : A \subseteq \mathbb{R}^{m+n} \to \mathbb{R}^n$ continua, di componenti $g_i : A \to R$, $i = 1, \dots, n$, con A aperto. Dato $(\bar{x}, \bar{y}) \in A$ con $g(\bar{x}, \bar{y}) = 0$ si ha che*

1. *se esistono e sono continue in A le derivate di g rispetto alle variabili y_j, $j = 1, \dots, n$, e il determinante della corrispondente matrice jacobiana è diverso da 0, allora esistono un intorno connesso U di $\bar{x}$, un intorno connesso V di $\bar{y}$ e un'unica funzione $f : U \to V$ continua tali che $f(\bar{x}) = \bar{y}$ e*

$$\forall\, x \in U, \forall\, y \in V \quad g(x, y) = 0 \iff y = f(x);$$

2. *se inoltre g è di classe C^1 in A, allora f è di classe C^1 in U e si ha*

$$Df(x) = -\big[D_y g(x, f(x))\big]^{-1} D_x g(x, f(x)),$$

dove $D_y g$ e $D_x g$ rappresentano il differenziale di g relativamente alle sole variabili y o, rispettivamente, x, cioè il differenziale delle applicazioni $y \mapsto g(x, y)$ oppure, rispettivamente, $x \to g(x, y)$. In forma matriciale

$$D_y g(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial y_1}(x, y) & \cdots & \frac{\partial g_1}{\partial y_n}(x, y) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial g_n}{\partial y_1}(x, y) & \cdots & \frac{\partial g_n}{\partial y_n}(x, y) \end{pmatrix},$$

$$D_x g(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x_1}(x, y) & \cdots & \frac{\partial g_1}{\partial x_m}(x, y) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial g_n}{\partial x_1}(x, y) & \cdots & \frac{\partial g_n}{\partial x_m}(x, y) \end{pmatrix}.$$

Teorema A.25 (del valor medio per derivate direzionali) *Data una funzione $g : V \subset \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^M$, siano $p, q \in V$ tali che il segmento $[p, q]$*

che li connette sia tutto contenuto in V, ed esista la derivata direzionale di g lungo la direzione $\nu := \frac{q-p}{||q-p||}$ in ogni punto di $[p,q]$. Allora

$$||g(q) - g(p)||_{\mathbb{R}^M} \leq \sup_{z\in[p,q]} ||\partial_\nu g(z)||_{\mathbb{R}^M} \, ||q-p||_{\mathbb{R}^N}.$$

Teorema A.26 *Dati uno spazio metrico (X,d) e una successione (x_k) in X, se ogni sottosuccessione di (x_k) ammette una sotto-sottosuccessione che converge a x, allora tutta la successione (x_k) converge a x.*

La norma degli operatori

Definizione A.27 *Dati due spazi normati $(X, \|\cdot\|_X)$ e $(Y, \|\cdot\|_Y)$, si definisce $L(X,Y)$ come lo spazio vettoriale degli operatori lineari e continui da X in Y:*

$$L(X,Y) = \big\{T : X \to Y \text{ lineare e continua}\big\}.$$

Se $X = Y$ si pone per brevità $L(X) := L(X,X)$.

Nell'insieme $L(X,Y)$ è possibile introdurre una norma, detta *norma degli operatori* o *norma operatoriale* definita da

$$\|T\|_{L(X,Y)} := \sup_{x\neq 0} \frac{\|Tx\|_Y}{\|x\|_X} = \sup_{\|x\|_X=1} \|Tx\|_Y, \tag{A.1}$$

che verrà indicata brevemente anche con $\|T\|$. Si osservi che dalla definizione segue subito che

$$\|Tx\|_Y \leq \|T\|\|x\|_X,$$

per ogni $x \in X$.

Osservazione A.28 Si può dimostrare che tra gli operatori lineari T da X in Y sono continui tutti e soli quelli per cui $\|T\| < \infty$. Inoltre se X è finito dimensionale ogni applicazione lineare $T : X \to Y$ è automaticamente continua.

Teorema A.29 *Dati due spazi normati $(X, \|\cdot\|_X)$ e $(Y, \|\cdot\|_Y)$ lo spazio $(L(X,Y), \|\cdot\|_{L(X,Y)})$ è uno spazio normato, completo se Y è completo. Inoltre, se $A \in L(X,Y)$ e $B \in L(Y,Z)$ allora $\|BA\|_{L(X,Z)} \leq \|B\|_{L(Y,Z)}\|A\|_{L(X,Y)}$; in particolare, se $X = Y = Z$ e $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 1$ si ha $\|A^k\|_{L(X)} \leq \|A\|^k_{L(X)}$.*

Dimostrazione Verifichiamo le proprietà della norma. Banalmente $\|T\| \geq 0$ per ogni T; se poi $\|T\| = 0$ dalla proprietà sopra segue che $\|Tx\| = 0$ per ogni x dunque $T = 0$. Dato $\lambda \in \mathbb{R}$ si ha

$$\|\lambda T\| = \sup_{\|x\|=1} \|(\lambda T)x\| = |\lambda| \sup_{\|x\|=1} \|Tx\| = |\lambda| \|T\|.$$

Infine, se $T, S \in L(X, Y)$ e $\|x\| = 1$ si ha

$$\|(S+T)x\| \leq \|Sx\| + \|Tx\| \leq \|S\| \, \|x\| + \|T\| \, \|x\| = \|S\| + \|T\|,$$

e poiché $\|S+T\|$ è il sup dei $\|(S+T)x\|$ al variare di $\|x\| = 1$ si ottiene $\|S+T\| \leq \|S\| + \|T\|$. Dunque $\|\cdot\|_{L(X,Y)}$ è una norma.

Verifichiamo ora la completezza nel caso in cui Y sia completo. Sia dunque data una successione (T_n) di Cauchy in $L(X, Y)$: fissato $\varepsilon > 0$ esiste $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tale che se $n, m \geq n_\varepsilon$ si ha $\|T_n - T_m\|_{L(X,Y)} \leq \varepsilon$. Per ogni $x \in X$ si ottiene

$$\|T_n x - T_m x\| = \|(T_n - T_m)x\| \leq \|T_n - T_m\| \, \|x\| \leq \varepsilon \|x\|, \tag{A.2}$$

per gli stessi n, m, da cui segue che per ogni fissato x la successione $(T_n x)$ è di Cauchy in Y, dunque converge per la completezza di Y. Sia $Tx := \lim_{n\to\infty} T_n x$; l'applicazione $x \mapsto Tx$ è lineare in quanto limite puntuale di applicazioni lineari. Dobbiamo ancora dimostrare che è continua e che la convergenza si ha nella norma degli operatori. Passando al limite per $m \to +\infty$ in (A.2) si ottiene

$$\|T_n x - Tx\| \leq \varepsilon \|x\|,$$

per ogni $n \geq n_\varepsilon$, da cui segue facilmente $\|T_n - T\| \leq \varepsilon$ per gli stessi n. Quindi $T_n \to T$ nella norma $\|\cdot\|_{L(X,Y)}$. Inoltre $\|T\| \leq \|T - T_n\| + \|T_n\| \leq \varepsilon + \|T_n\| < \infty$, da cui la continuità di T.

Dati infine A, B come nelle ipotesi si ha

$$\|BAx\| = \|B(Ax)\| \leq \|B\| \|Ax\| \leq \|B\| \|A\| \|x\|,$$

da cui facilmente $\|BA\| \leq \|B\| \|A\|$. □

In particolare lo spazio $L(\mathbb{R}^n)$ è spazio normato completo rispetto alla corrispondente norma degli operatori. Ogni matrice $A \in \mathcal{M}(n)$ può essere pensata come un'applicazione lineare $x \mapsto Ax$ da $\mathbb{R}^n$ in $\mathbb{R}^n$ cioè come un elemento di $L(\mathbb{R}^n)$. Ne consegue che è possibile dotare $\mathcal{M}(n)$ della norma

operatoriale $\|\cdot\|_{L(\mathbb{R}^n)}$ in modo da ottenere una spazio normato completo. Per ogni $A \in \mathcal{M}(n)$ sarà dunque

$$\|A\| := \sup_{x\neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|} = \sup_{\|x\|=1} \|Ax\|. \tag{A.3}$$

Si ricorda che, essendo $\mathcal{M}(n)$ isomorfo a $\mathbb{R}^{n^2}$, dunque finito dimensionale, le possibili norme su $\mathcal{M}(n)$ sono tutte equivalenti.

Richiami sulle serie di funzioni

Sia $U \subseteq \mathbb{R}^n$ e sia data una successione di funzioni $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ con $f_n : U \to \mathbb{R}$.

Definizione A.30 *Si dice che la serie di funzioni di termine generale f_n* converge puntualmente in U*, se per ogni $x \in U$ esiste finito il limito*

$$\lim_{N\to\infty} \sum_{n=0}^{N} f_n(x).$$

Tale limite viene denotato con il simbolo $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$.

Definizione A.31 *Si dice che la serie di funzioni di termine generale f_n* converge uniformemente a una funzione f in U*, se*

$$\lim_{N\to\infty} \Big|\Big| f - \sum_{n=0}^{N} f_n \Big|\Big|_\infty =: \lim_{N\to\infty} \sup_{x\in U} \Big| f(x) - \sum_{n=0}^{N} f_n(x) \Big| = 0.$$

Definizione A.32 *Si dice che la serie di funzioni di termine generale f_n* converge totalmente (o normalmente) in U*, se la serie*

$$\sum_{n=0}^{\infty} ||f_n||_\infty =: \lim_{N\to\infty} \sum_{n=0}^{N} \sup_{x\in U} |f_n(x)|$$

converge.

Proposizione A.33 *Per le serie di funzioni valgono le seguenti proprietà:*

a) conv. totale $\Longrightarrow$ conv. uniforme $\Longrightarrow$ conv. puntuale;

b) se la serie di funzioni continue f_n converge uniformemente in U, allora la funzione limite f è continua in U.

Proposizione A.34 *Sia J un intervallo e sia $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una successione di funzioni derivabili $f_n : J \to \mathbb{R}$ tali che*

i) la serie ottenuta derivando termine a termine converge uniformemente, cioè esiste una funzione g tale che

$$\sum_{n=0}^{N} \frac{d}{dx} f_n \to g$$

per $N \to \infty$, uniformemente in J;

ii) esiste $x_0 \in J$ tale che la serie $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x_0)$ converga.

Allora, la serie $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ converge uniformemente in J a una funzione derivabile f tale che $f'(x) = g(x)$ per ogni x, ovvero

$$\frac{d}{dx}\Big(\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)\Big) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{d}{dx} f_n(x),$$

cioè si può derivare la serie termine a termine.

Proposizione A.35 (prodotto di Cauchy di due serie) *Siano date due serie di numeri reali o complessi di termine generale a_n e, rispettivamente, b_n. Se la serie $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ converge e la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ converge assolutamente, allora la serie di termine generale $c_n := \sum_{k=0}^{n} a_{n-k} b_k$ converge e vale*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} a_{n-k} b_k = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot \sum_{n=0}^{\infty} b_n. \tag{A.4}$$

Corollario A.36 *Date due successioni (x_n) e (y_n) a valori in un'algebra di Banach X, se le due serie $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ e $\sum_{n=0}^{\infty} y_n$ convergono normalmente, allora la serie di termine generale $z_n := \sum_{k=0}^{n} x_{n-k} y_k$ converge e vale*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} x_{n-k} y_k = \sum_{n=0}^{\infty} x_n \cdot \sum_{n=0}^{\infty} y_n. \tag{A.5}$$

Sulla convergenza uniforme delle serie di Fourier

Nel Capitolo 11 abbiamo dimostrato il Teorema 11.23 sulla convergenza uniforme della serie di Fourier relativa a una funzione continua, T-periodica e C^1 a tratti. Ripercorrendo la trattazione che ha portato alla dimostrazione di tale teorema ci si accorge che sono stati essenziali i seguenti "ingredienti":

i) nel Corollario 11.17 la continuità di f;

ii) nel Lemma 11.19 la T-periodicità di f, la possibilità di scrivere la serie di Fourier di f' e la validità della formula di integrazione per parti;

iii) nel Corollario 11.21 la disuguaglianza di Bessel per la serie di Fourier associata a f', valida se f' appartiene a $L^2([0,T])$.

Cerchiamo quindi una classe di funzioni f che garantiscano la validità di queste ipotesi.

Definizione A.37 *$f : [a,b] \to \mathbb{R}$ si dice* assolutamente continua in $[a,b]$*, e scriveremo $f \in \mathrm{AC}([a,b])$, se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\delta = \delta_\varepsilon > 0$ tale che per ogni insieme di intervalli disgiunti $[a_k, b_k] \subseteq [a,b]$, $k = 1, \dots N$, si ha*

$$\sum_{k=1}^{N} (b_k - a_k) < \delta \qquad \Longrightarrow \qquad \sum_{k=1}^{N} \big| f(b_k) - f(a_k) \big| < \varepsilon.$$

Osserviamo che se f è assolutamente continua allora è uniformemente continua. Si possono dimostrare i seguenti teoremi

Teorema A.38 *Una funzione $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ è assolutamente continua se e solo se esiste $h \in L^1([a,b])$ tale che*

$$f(x) = f(a) + \int_a^x h(s)\, ds$$

per ogni $x \in [a,b]$. Inoltre $f'(x) = h(x)$ quasi ovunque.

Dimostrazione Omessa (si veda per esempio il Teorema 3.35 in [5]).

Essenzialmente le funzioni assolutamente continue sono integrali indefiniti di funzioni in L^1, per cui ammettono derivata quasi ovunque e soddisfano il Teorema fondamentale del calcolo integrale.

Teorema A.39 *Se $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ sono assolutamente continue vale la formula di integrazione per parti*

$$\int_a^b f(x) g'(x)\, dx = \Big[f(x) g(x) \Big]_a^b - \int_a^b f'(x) g(x)\, dx.$$

Dimostrazione Poiché anche fg è assolutamente continua, per il teorema precedente si ottiene

$$\int_a^b \big(f(x)g(x)\big)'\,dx = \Big[f(x)g(x)\Big]_a^b,$$

dove $(fg)'$, come anche f' e g', esiste quasi ovunque. Applicando la regola di derivazione del prodotto in ogni x dove le derivate esistono si ha la tesi.□

Tornando alle serie di Fourier, introduciamo il seguente spazio

$$H^1(a,b) := \big\{f \in \mathrm{AC}\,([a,b]) \ : \ f' \in L^2([a,b])\big\}. \tag{A.6}$$

Osserviamo che se $f \in H^1(0,T)$ ed è T-periodica allora verifica i)-iii) a p. 372, per cui nel Teorema 11.23 si può sostituire l'ipotesi f è C^1 a tratti con $f \in H^1$, ottenendo il seguente risultato.

Teorema A.40 *Se $f \in H^1(0,T)$ ed è T-periodica allora la serie di Fourier di f converge totalmente e uniformemente a f in $[0,T]$.*

Lo spazio $H^1(a,b)$ è una spazio importante; più precisamente si può dimostrare che coincide con lo spazio di Sobolev $H^{1,2}(a,b)$ delle funzioni $f \in L^2(a,b)$ con *derivata distribuzionale* $f' \in L^2(a,b)$. Tale spazio ha notevole importanza nello studio delle equazioni differenziali, per esempio l'equazione di Laplace o le equazioni uniformemente ellittiche del secondo ordine (vedi per esempio [4]).

Bibliografia

[1] Antonio Ambrosetti, "Appunti sulle equazioni differenziali ordinarie", Springer, Milano, 2012.

[2] Livio Amerio, "Analisi Matematica" con elementi di analisi funzionale, Volume terzo - Metodi matematici e applicazioni - Parte I, Seconda edizione, UTET, Torino, 1986.

[3] Giuseppe De Marco, "Analisi Due, secondo corso di analisi matematica" -teoria ed esercizi-, Seconda Edizione, Zanichelli, 1999.

[4] Lawrence C. Evans, "Partial Differential Equations", AMS, 1998.

[5] Gerald B. Folland, "Real Analysis, Modern Techniques and their Applications", Second Edition, John Wiley & Sons Inc, 1999.

[6] Philip Hartman, "Ordinary differential equations", John Wiley & Sons, Inc., New York, 1964.

[7] Sergio Invernizzi, "Lezioni di calcolo differenziale", Edizioni LINT, Trieste, 1990.

[8] Livio C. Piccinini, Guido Stampacchia, Giovanni Vidossich, "Equazioni differenziali ordinarie in $\mathbb{R}^n$" (problemi e metodi), Liguori Editore, Napoli, 1978.

[9] Georgi P. Tolstov, "Fourier Series", Dover Publications Inc., New York, 1977.

Indice analitico

ε-rete, 359

autofunzione del Laplaciano, 252
autospazio, 197
  generalizzato, 197
autovalore
  del Laplaciano, 252
  difettoso, 200
autovettore, 197
  generalizzato, 198

base
  hilbertiana, 256
  ortogonale, 256
  ortonormale, 256
blocco elementare di Jordan, 212
brachistòcrona, 170

campo vettoriale conservativo, 123
caratteristiche, 342, 351
catenaria, 166
cicloide, 172
cilindro di sicurezza, 12
coefficiente di Fourier, 255, 257
condizioni
  ai valori iniziali, 4
  al bordo, 4
criterio
  dell'asintoto, 100
  di Cauchy, 367
curve
  caratteristiche, 351

direttrice di Liapunov, 66
disuguaglianza
  di Bessel, 255
  di Schwarz, 255

elementi ortogonali, 255
energia, 124
equazione
  caratteristica, 219
  del calore
    non omogenea, 286
    omogenea, 251, 271
  del pendolo non lineare, 125
  del trasporto
    lineare non omogenea, 339
    lineare omogenea, 336
    quasilineare, 345
    semilineare, 341
  di Bernoulli, 151
  di Eulero, 174
  di Laplace, 279
    in coordinate polari, 280
  di Malthus, 152
  di Van der Pol, 247
  di Verhulst, 152
  differenziale ordinaria, 1
    di ordine N in forma normale, 2
  lineare
    di ordine 1, 149
    di ordine N, 218, 224
  logistica, 152

omogenea, 153
equilibrio, 101
linearmente stabile, 116
asintoticamente stabile, 115
instabile, 115
linearmente instabile, 116
stabile, 115

fattore integrante, 137, 149
fenomeno di Peano, 40
flusso di un'equazione differenziale, 89
forma
canonica di Jordan, 212
normale, 2
funzione
assolutamente continua, 372
ausiliaria, 66
compatta, 32
completamente continua, 32
lipschitziana sui compatti, 10
localmente lipschitziana, 10
funzioni linearmente indipendenti, 180

identità di Parseval, 256
insieme
compatto, 359
compatto per successioni, 359
compatto per ricoprimenti, 359
di livello, 121
equicontinuo, 362
equilimitato, 362
equilipschitziano, 362
equiuniformemente continuo, 362
invariante, 117
negativamente invariante, 117
ortogonale, 255
ortonormale, 255
ortonormale chiuso, 256
ortonormale completo, 256
positivamente invariante, 117
puntualmente limitato, 362
relativamente compatto, 359
relativamente compatto per successioni, 359
relativamente sequenzialmente compatto, 359
sequenzialmente compatto, 359
totalmente limitato, 359
integrale
inferiore, 39
primo, 120
superiore, 39
intervallo massimale di esistenza, 46
istante iniziale, 5
iterate di Picard, 15

Laplaciano, 251
lemma
di Gronwall, 82
di Riemann-Lebesgue, 260

matrice
esponenziale, 188
fondamentale, 182
soluzione, 182
Wronskiana, 232
metodo
delle caratteristiche, 341, 349
di Fourier, 286
di separazione delle variabili, 251
per simiglianza, 224
molteplicità
algebrica, 197
geometrica, 197

norma
degli operatori, 368
di Bielecki, 30
nucleo di Poisson, 285

onda viaggiante, 338

operatore integrale di Volterra, 12
orbita, 3
  eteroclina, 133
  omoclina, 133
ordine
  di un'equazione differenziale ordinaria, 1
oscillatore
  armonico, 222
    con resistenza del mezzo, 246
    smorzato, 222

poligonali di Eulero, 19
polinomio
  caratteristico, 197
  trigonometrico, 259
principio di Duhamel, 354
problema
  agli autovalori per il Laplaciano, 252
  ai valori iniziali, 4
  della corda vibrante, 275
  di Cauchy, 4, 5
  di Dirichlet per l'equazione di Laplace, 279
  misto, 251, 271
prodotto
  di Cauchy di due serie, 371
prodotto scalare, 254
prolungamento di una soluzione, 46

serie
  di coseni, 262
  di Fourier, 256, 259
  di funzioni
    puntualmente convergente, 370
    totalmente convergente, 370
    uniformemente convergente, 370
  di seni, 262
  trigonometrica, 259
sistema
  autonomo, 4
  conservativo, 120
  di equazioni differenziali ordinarie, 1
  di Lotka-Volterra, 114, 144
  dinamico
    continuo, 90
    locale, 90
  lineare, 178
  lineare a coefficienti costanti, 186
  lineare omogeneo, 180
  linearizzato, 115
  non omogeneo, 178
  omogeneo associato, 178
  preda-predatore, 144
soluzione
  alla Carathéodory, 34
  classica, 336
  del problema di Cauchy, 5
  di un'equazione differenziale ordinaria, 2
  massimale, 46
soprasoluzione, 98
  di una soluzione, 98
  stretta, 98
sottosoluzione, 98
  di una soluzione, 98
  stretta, 98
spazio
  delle traiettorie, 3
  delle fasi, 3
  di Hilbert, 255
  metrico completo, 359
  prehilbertiano, 254
  separabile, 361
stabilità
  di un equilibrio, 114
  lineare di un equilibrio, 116
sviluppo

in serie di coseni, 262
in serie di seni, 262

tautòcrona, 174
teorema
del confronto, 97, 99
del Dini, 367
del limite della derivata, 367
del valor medio per derivate direzionali, 367
dell'esplosione in norma, 54
della chiusura del grafico, 49
della fuga dai compatti, 50
della variazione delle costanti, 184
di Ascoli-Arzelà, 363
di Brouwer, 31
di Cauchy-Lipschitz, 13
di convergenza puntuale delle serie di Fourier, 267
di convergenza uniforme delle serie di Fourier, 266
di convergenza uniforme delle serie di seni, 267
di decomposizione $S + N$, 198
di derivazione di una serie, 371
di differenziabilità rispetto ai dati, 85
di dipendenza continua dai dati, 80, 83, 87, 88
di esistenza di soluzioni massimali, 46, 47
di esistenza globale, 69–71
di Kamke, 87, 88
di Kneser, 41
di Lagrange, 184
di Peano, 24
sui compatti, 28
di Schauder, 32
di stabilità lineare, 115
di stabilità per sistemi lineari, 116
di unicità globale, 37
di Vinograd, 90
traiettoria, 3

valore iniziale, 5

wronskiano, 232