



Dipartimento di Matematica e Informatica
Corso di Laurea in Matematica

EQUAZIONI DIFFERENZIALI

Appello del 3 settembre 2015

N.B.: scrivere nome, cognome e numero di matricola su ogni foglio consegnato. È ammesso l'utilizzo degli appunti del corso. Tempo a disposizione: 3 ore

- 1** Fissati $a, b \geq 1$ parametri reali, si consideri il sistema di equazioni differenziali

$$\begin{cases} x' = -ay - x^3 - xy^2 \\ y' = bx - x^2y - y^3. \end{cases} \quad (1)$$

- a) Studiare l'esistenza e l'unicità locale/globale per i relativi problemi di Cauchy. Trovare gli equilibri e valutare, qualora possibile, la loro stabilità lineare e nonlineare;
- b) dimostrare che per ogni $R > 0$ le regioni $E_R := \{(x, y) : bx^2 + ay^2 \leq R\}$ sono invarianti in futuro per il sistema e utilizzarle per analizzare l'esistenza globale in futuro;
- c) dimostrare che tutte le soluzioni convergono all'origine per $t \rightarrow +\infty$ (suggerimento: trovare una norma equivalente e, mediante una disuguaglianza differenziale, provare che tende a zero).

Data ora una successione $0 < \varepsilon_n < 1$ con $\varepsilon_n \rightarrow 0$, si considerino i sistemi perturbati

$$\begin{cases} x' = (-ay - x^3 - xy^2) + \varepsilon_n x \\ y' = (bx - x^2y - y^3) + \varepsilon_n y. \end{cases} \quad (2)$$

- d) Provare che se $R \geq \max\{a, b\}$ allora E_R è invariante anche per (2), ma che tutte le soluzioni non banali di (2), pur essendo limitate in futuro, non convergono all'origine, rimanendone discoste;
- e) fissato il dato iniziale $(x_0, y_0) \neq (0, 0)$ sia $(x(t), y(t))$ la relativa soluzione di (1) e sia $(x_n(t), y_n(t))$ quella di (2) al tempo $t_0 = 0$. Per c)-d) si ha che $(x(t), y(t)) \rightarrow (0, 0)$ mentre ogni soluzione $(x_n(t), y_n(t))$ si mantiene discosta dall'origine in futuro. Spiegare perché questo fatto non è in contraddizione con la dipendenza continua delle soluzioni dai dati iniziali e dal campo vettoriale;
- f) calcolare esplicitamente tutte le soluzioni di (2) nel caso $a = b = 1$.

- 2** Trovare esplicitamente la soluzione del seguente problema di Cauchy per il sistema lineare non omogeneo

$$\begin{cases} y_1' = y_2 + y_3 + 2e^{2t} \\ y_2' = -4y_1 + 3y_2 + 4y_3 + 2e^{2t} \\ y_3' = y_1 + e^{2t} \\ y(0) = (y_1(0), y_2(0), y_3(0)) = (3, 4, 3). \end{cases}$$

- 3** Date $a, b \in C(\mathbb{R})$ e la corrispondente equazione di Bernoulli

$$y' = a(t)y + b(t)y^2, \quad (3)$$

- a) verificare che la trasformazione $y = \exp(w + A(t))$, con $A(t)$ primitiva di $a(t)$, trasforma (3) in un'equazione a variabili separabili;
- b) utilizzare a) per trovare la formula risolutiva per le soluzioni strettamente positive di (3);
- c) trovare la trasformazione adatta e fare l'analogo di a)-b) per le soluzioni negative di (3) e calcolarle; cosa si può dire delle soluzioni che si annullano in almeno un punto?