



Dipartimento di Matematica e Informatica
Corso di Laurea in Matematica

EQUAZIONI DIFFERENZIALI

Appello del 1 luglio 2015

N.B.: scrivere nome, cognome e numero di matricola su ogni foglio consegnato. È ammesso l'utilizzo degli appunti del corso. Tempo a disposizione: 3 ore

1 Dato il sistema planare

$$\begin{cases} x' = 5y^2 - 3x \\ y' = y(x - y^2 + 1), \end{cases}$$

- studiare l'esistenza e l'unicità locale per i problemi di Cauchy, trovare gli equilibri del sistema e studiarne la stabilità lineare/nonlineare. Valgono le ipotesi dei teoremi di esistenza globale?
- Verificare che l'asse x è un insieme invariante e trovare tutte le soluzioni ivi contenute;
- detta $\omega(x, y)$ la 1-forma differenziale associata al sistema, dopo avere verificato che ω non è esatta calcolare un fattore integrante $\lambda = \lambda(x, y)$ e utilizzarlo per trovare una primitiva di $\lambda\omega$;
- detta $F(x, y)$ la primitiva tale che $F(0, 0) = 0$, trovare il relativo insieme di livello 0 e verificare che contiene una parabola \mathcal{P} ; calcolare tutte le soluzioni con dati iniziali (x_0, y_0) ivi contenuti;
- rappresentare indicativamente la direzione del campo vettoriale nelle varie regioni di piano. Dimostrare che ogni soluzione tende in futuro a un equilibrio oppure ad avvicinarsi esponenzialmente a \mathcal{P} . Provare infine che tutte le soluzioni sono globalmente definite in futuro.

2 Trovare la soluzione del seguente problema di Cauchy

$$\begin{cases} y_1' = y_1 - y_2 \\ y_2' = -9y_1 + 4y_2 + 9y_3 \\ y_3' = 9y_1 - 5y_2 - 8y_3 \\ y(0) = (1, 0, -1). \end{cases}$$

3 Risolvere il seguente problema ai valori iniziali nell'incognita $u = u(x, t)$ dove $(x, t) \in \mathbb{R}^2$:

$$\begin{cases} u_t + (x + 2t)u_x = 2tu & \text{in } \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+ \\ u(x, 0) = e(x + 2)^2 & \text{in } \mathbb{R}. \end{cases}$$

Punteggi indicativi: 3+2+8+3+6, 8, 7