Università degli Studi di Udine — Anno Accademico 2014/2015

Dipartimento di Matematica e Informatica
Corso di Laurea in Matematica

Equazioni Differenziali

Appello del 17 febbraio 2015

N.B.: scrivere nome, cognome e numero di matricola su ogni foglio consegnato. È ammesso l'utilizzo degli appunti del corso. Tempo a disposizione: 3 ore

1 Sia $f : \Omega \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua, con Ω aperto tale che $\forall\,(t, y) \in \Omega$, $\forall\,\lambda > 0$ si abbia $(\lambda t, \lambda^2 y) \in \Omega$.

a) Supponendo che $f(\lambda t, \lambda^2 y) = \lambda f(t, y)$ per ogni $(t, y) \in \Omega$, $\lambda > 0$, verificare che il cambiamento di variabili $y(t) = t^2 x(t)$ trasforma l'equazione $y' = f(t, y)$ in un'equazione a variabili separabili.

Data ora l'equazione $y' = 2\sqrt{|t^2 - |y||}$,

b) determinare l'insieme dei dati iniziali (t_0, y_0) per cui non si può applicare il Teorema di Cauchy-Lipschitz e quello per cui lo si può applicare. Studiare l'esistenza locale/globale delle soluzioni;

c) utilizzare a) per trovare una forma chiusa per le soluzioni dell'equazione aventi traiettoria contenuta nella regione $\mathcal{P} = \{(t, y) :\ t > 0,\ 0 < y < t^2\}$;

d) eventualmente sfruttando c), dimostrare che il problema di Cauchy con dati iniziali $y(0) = 0$ ammette un'unica soluzione $y(t)$ con traiettoria in $\mathcal{P}$ e calcolarla esplicitamente (alternativamente, invece di c) è possibile utilizzare opportunamente il Teorema del confronto);

e) verificare che le funzioni $u(t) = t^2$ e $v(t) = 0$ sono rispettivamente una sopra e una sottosoluzione per $y(t)$ in futuro ma che tuttavia a priori nessuno dei due teoremi del confronto può essere applicato. Dimostrare che in ogni caso tutte le soluzioni del problema di Cauchy con dati $y(0) = 0$ sono contenute in $\mathcal{P}$ per $t > 0$ (suggerimento: utilizzare soprasoluzioni strette della forma $u(t) = a(t + b)^2$ per opportune scelte di $a, b \in \mathbb{R}$).

2 Risolvere il seguente problema di Cauchy

$$\begin{cases} y_1' = -y_1 + 2y_2 - 4y_3 \\ y_2' = 2y_1 - y_2 - 5y_3 \\ y_3' = -y_1 + y_2 - y_3 \\ y(1) = (1, 1, 1). \end{cases}$$

3 Dato il sistema

$$\begin{cases} x' = f(x) \\ y' = g(x)y, \end{cases}$$

con $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ localmente lipschitziana e $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua, dimostrare che i relativi problemi di Cauchy hanno unicità locale delle soluzioni.

Punteggi indicativi: 4+4+6+4+5, 10, 4