



Dipartimento di Matematica e Informatica
Corso di Laurea in Matematica

EQUAZIONI DIFFERENZIALI

Appello del 3 febbraio 2015

N.B.: scrivere nome, cognome e numero di matricola su ogni foglio consegnato. È ammesso l'utilizzo degli appunti del corso. Tempo a disposizione: 3 ore

1 Data l'equazione differenziale

$$y' = \frac{3t^2 - y^2}{1 + t^2 + y^2},$$

- studiare l'esistenza e l'unicità locale per i relativi problemi di Cauchy. Valgono le ipotesi dei teoremi di esistenza globale? Trovare le eventuali soluzioni costanti, le regioni dove le soluzioni sono crescenti/decrescenti e rappresentarle nel piano $t - y$;
- supposto che $y(t)$ sia soluzione, dire quali tra $-y(t)$, $y(-t)$ e $-y(-t)$ sono ancora soluzioni;
- determinare quali tra le funzioni $v(t) = at + b$, $a, b \in \mathbb{R}$, sono sotto oppure soprassoluzioni in futuro per l'equazione, definitivamente per $t \rightarrow +\infty$;
- provare che ogni soluzione è definitivamente crescente (può essere utile c));
- studiare il limite per $t \rightarrow +\infty$;
- dimostrare che ogni soluzione è asintoticamente lineare;
- provare che tutte le soluzioni tendono alla medesima retta per $t \rightarrow +\infty$, determinando anche l'equazione di quest'ultima.

2 Dato il seguente problema per l'incognita $u = u(x, t)$

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} = 0 & (x, t) \in]0, \pi[\times \mathbb{R}_+ \\ u_x(0, t) = u_x(\pi, t) = 0 & t \in \mathbb{R}_+ \\ u(x, 0) = g(x) & x \in [0, \pi], \end{cases}$$

- trovare una soluzione formale mediante il metodo di separazione delle variabili. Dare delle ipotesi su g affinché la soluzione formale sia effettivamente una soluzione del problema;
- nel caso specifico $g(x) = x$, trovare esplicitamente la soluzione e dire se quella ottenuta è soluzione classica del problema.

3 Scrivere esplicitamente un'equazione differenziale $y' = g(y)$ con un equilibrio \bar{y} tale che il relativo problema di Cauchy con dati $y(0) = \bar{y}$ abbia unicità delle soluzioni in futuro ma non in passato.