Dipartimento di Matematica e Informatica
Corso di Laurea in Matematica

Equazioni Differenziali

Appello del 3 febbraio 2015

N.B.: scrivere nome, cognome e numero di matricola su ogni foglio consegnato. È ammesso l'utilizzo degli appunti del corso. Tempo a disposizione: 3 ore

1 Data l'equazione differenziale

$$y' = \frac{3t^2 - y^2}{1 + t^2 + y^2},$$

a) studiare l'esistenza e l'unicità locale per i relativi problemi di Cauchy. Valgono le ipotesi dei teoremi di esistenza globale? Trovare le eventuali soluzioni costanti, le regioni dove le soluzioni sono crescenti/decrescenti e rappresentarle nel piano $t - y$;

b) supposto che $y(t)$ sia soluzione, dire quali tra $-y(t)$, $y(-t)$ e $-y(-t)$ sono ancora soluzioni;

c) determinare quali tra le funzioni $v(t) = at + b$, $a, b \in \mathbb{R}$, sono sotto oppure soprasoluzioni in futuro per l'equazione, definitivamente per $t \to +\infty$;

d) provare che ogni soluzione è definitivamente crescente (può essere utile c));

e) studiare il limite per $t \to +\infty$;

f) dimostrare che ogni soluzione è asintoticamente lineare;

g) provare che tutte le soluzioni tendono alla medesima retta per $t \to +\infty$, determinando anche l'equazione di quest'ultima.

2 Dato il seguente problema per l'incognita $u = u(x, t)$

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} = 0 & (x,t) \in]0, \pi[\times \mathbb{R}_+ \\ u_x(0,t) = u_x(\pi, t) = 0 & t \in \mathbb{R}_+ \\ u(x, 0) = g(x) & x \in [0, \pi], \end{cases}$$

a) trovare una soluzione formale mediante il metodo di separazione delle variabili. Dare delle ipotesi su g affinché la soluzione formale sia effettivamente una soluzione del problema;

b) nel caso specifico $g(x) = x$, trovare esplicitamente la soluzione e dire se quella ottenuta è soluzione classica del problema.

3 Scrivere esplicitamente un'equazione differenziale $y' = g(y)$ con un equilibrio $\overline{y}$ tale che il relativo problema di Cauchy con dati $y(0) = \overline{y}$ abbia unicità delle soluzioni in futuro ma non in passato.

Punteggi indicativi: 4+2+4+3+2+5+8, 10+2, 5

Appello del 17 febbraio 2015

1 Sia $f : \Omega \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua, con Ω aperto tale che $\forall\,(t, y) \in \Omega$, $\forall\,\lambda > 0$ si abbia $(\lambda t, \lambda^2 y) \in \Omega$.

a) Supponendo che $f(\lambda t, \lambda^2 y) = \lambda f(t, y)$ per ogni $(t, y) \in \Omega$, $\lambda > 0$, verificare che il cambiamento di variabili $y(t) = t^2 x(t)$ trasforma l'equazione $y' = f(t, y)$ in un'equazione a variabili separabili.

Data ora l'equazione $y' = 2\sqrt{|t^2 - |y||}$,

b) determinare l'insieme dei dati iniziali (t_0, y_0) per cui non si può applicare il Teorema di Cauchy-Lipschitz e quello per cui lo si può applicare. Studiare l'esistenza locale/globale delle soluzioni;

c) utilizzare a) per trovare una forma chiusa per le soluzioni dell'equazione aventi traiettoria contenuta nella regione $\mathcal{P} = \{(t, y) : \ t > 0, \ 0 < y < t^2\}$;

d) eventualmente sfruttando c), dimostrare che il problema di Cauchy con dati iniziali $y(0) = 0$ ammette un'unica soluzione $y(t)$ con traiettoria in $\mathcal{P}$ e calcolarla esplicitamente (alternativamente, invece di c) è possibile utilizzare opportunamente il Teorema del confronto);

e) verificare che le funzioni $u(t) = t^2$ e $v(t) = 0$ sono rispettivamente una sopra e una sottosoluzione per $y(t)$ in futuro ma che tuttavia a priori nessuno dei due teoremi del confronto può essere applicato. Dimostrare che in ogni caso tutte le soluzioni del problema di Cauchy con dati $y(0) = 0$ sono contenute in $\mathcal{P}$ per $t > 0$ (suggerimento: utilizzare soprasoluzioni strette della forma $u(t) = a(t + b)^2$ per opportune scelte di $a, b \in \mathbb{R}$).

2 Risolvere il seguente problema di Cauchy

$$\begin{cases} y_1' = -y_1 + 2y_2 - 4y_3 \\ y_2' = 2y_1 - y_2 - 5y_3 \\ y_3' = -y_1 + y_2 - y_3 \\ y(1) = (1, 1, 1). \end{cases}$$

3 Dato il sistema

$$\begin{cases} x' = f(x) \\ y' = g(x)y, \end{cases}$$

con $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ localmente lipschitziana e $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua, dimostrare che i relativi problemi di Cauchy hanno unicità locale delle soluzioni.

Punteggi indicativi: 4+4+6+4+5, 10, 4

Appello del 23 giugno 2015

1 Data l'equazione differenziale

$$y' = \frac{2y^3}{ty^2 - t^3}, \tag{1}$$

a) studiare l'esistenza e l'unicità locale per i relativi problemi di Cauchy. Valgono le ipotesi dei teoremi di esistenza globale? Trovare le eventuali soluzioni costanti, le regioni dove le soluzioni sono crescenti/decrescenti e rappresentarle nel piano $t - y$;

b) supposto che $y(t)$ sia soluzione, dire quali tra $-y(t)$, $y(-t)$ e $-y(-t)$ sono ancora soluzioni;

c) detta $y(t)$ la generica soluzione massimale definita in $]\alpha, \beta[$, dimostrare che per dati iniziali (t_0, y_0) con $t_0 > 0$, $y(t)$ è globalmente definita in futuro e studiare il suo eventuale limite per $t \to \beta^-$. Infine, studiare $y(t)$ in passato e individuare i possibili comportamenti per $t \to \alpha^+$.

Successivamente:

d) utilizzare il metodo per le equazioni omogenee per risolvere l'equazione;

e) riottenere la formula per la generica soluzione utilizzando almeno altri due metodi risolutivi.

2 Risolvere il seguente problema di Cauchy

$$\begin{cases} y_1' = 4y_2 + 5y_3 \\ y_2' = y_1 \\ y_3' = -y_1 + 2y_2 + 2y_3 \\ y(0) = (2, 0, 1). \end{cases}$$

Punteggi indicativi: 3+2+8+5+10, 8

Appello del 1 luglio 2015

1 Dato il sistema planare

$$\begin{cases} x' = 5y^2 - 3x \\ y' = y(x - y^2 + 1), \end{cases}$$

a) studiare l'esistenza e l'unicità locale per i problemi di Cauchy, trovare gli equilibri del sistema e studiarne la stabilità lineare/nonlineare. Valgono le ipotesi dei teoremi di esistenza globale?

b) Verificare che l'asse x è un insieme invariante e trovare tutte le soluzioni ivi contenute;

c) detta $\omega(x, y)$ la 1-forma differenziale associata al sistema, dopo avere verificato che ω non è esatta calcolare un fattore integrante $\lambda = \lambda(x, y)$ e utilizzarlo per trovare una primitiva di $\lambda\omega$;

d) detta $F(x, y)$ la primitiva tale che $F(0, 0) = 0$, trovare il relativo insieme di livello 0 e verificare che contiene una parabola $\mathcal{P}$; calcolare tutte le soluzioni con dati iniziali (x_0, y_0) ivi contenuti;

e) rappresentare indicativamente la direzione del campo vettoriale nelle varie regioni di piano. Dimostrare che ogni soluzione tende in futuro a un equilibrio oppure ad avvicinarsi esponenzialmente a $\mathcal{P}$. Provare infine che tutte le soluzioni sono globalmente definite in futuro.

2 Trovare la soluzione del seguente problema di Cauchy

$$\begin{cases} y_1' = y_1 - y_2 \\ y_2' = -9y_1 + 4y_2 + 9y_3 \\ y_3' = 9y_1 - 5y_2 - 8y_3 \\ y(0) = (1, 0, -1). \end{cases}$$

3 Risolvere il seguente problema ai valori iniziali nell'incognita $u = u(x, t)$ dove $(x, t) \in \mathbb{R}^2$:

$$\begin{cases} u_t + (x + 2t)u_x = 2tu & \text{in } \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+ \\ u(x, 0) = \mathrm{e}(x + 2)^2 & \text{in } \mathbb{R}. \end{cases}$$

Punteggi indicativi: 3+2+8+3+6, 8, 7

Appello del 3 settembre 2015

1 Fissati $a, b \geq 1$ parametri reali, si consideri il sistema di equazioni differenziali

$$\begin{cases} x' = -ay - x^3 - xy^2 \\ y' = bx - x^2y - y^3. \end{cases} \tag{2}$$

a) Studiare l'esistenza e l'unicità locale/globale per i relativi problemi di Cauchy. Trovare gli equilibri e valutare, qualora possibile, la loro stabilità lineare e nonlineare;

b) dimostrare che per ogni $R > 0$ le regioni $E_R := \{(x, y) : \ bx^2 + ay^2 \leq R\}$ sono invarianti in futuro per il sistema e utilizzarle per analizzare l'esistenza globale in futuro;

c) dimostrare che tutte le soluzioni convergono all'origine per $t \to +\infty$ (suggerimento: trovare una norma equivalente e, mediante una disuguaglianza differenziale, provare che tende a zero).

Data ora una successione $0 < \varepsilon_n < 1$ con $\varepsilon_n \to 0$, si considerino i sistemi perturbati

$$\begin{cases} x' = (-ay - x^3 - xy^2) + \varepsilon_n x \\ y' = (bx - x^2y - y^3) + \varepsilon_n y. \end{cases} \tag{3}$$

d) Provare che se $R \geq \max\{a, b\}$ allora E_R è invariante anche per (3), ma che tutte le soluzioni non banali di (3), pur essendo limitate in futuro, non convergono all'origine, rimanendone ben discoste;

e) fissato il dato iniziale $(x_0, y_0) \neq (0,0)$ sia $(x(t), y(t))$ la relativa soluzione di (2) e sia $(x_n(t), y_n(t))$ quella di (3) al tempo $t_0 = 0$. Per c)-d) si ha che $(x(t), y(t)) \to (0,0)$ mentre ogni soluzione $(x_n(t), y_n(t))$ si mantiene discosta dall'origine in futuro. Spiegare perché questo fatto non è in contraddizione con la dipendenza continua delle soluzioni dai dati iniziali e dal campo vettoriale;

f) calcolare esplicitamente tutte le soluzioni di (3) nel caso $a = b = 1$.

2 Trovare esplicitamente la soluzione del seguente problema di Cauchy per il sistema lineare non omogeneo

$$\begin{cases} y_1' = y_2 + y_3 + 2e^{2t} \\ y_2' = -4y_1 + 3y_2 + 4y_3 + 2e^{2t} \\ y_3' = y_1 + e^{2t} \\ y(0) = (y_1(0), y_2(0), y_3(0)) = (3, 4, 3). \end{cases}$$

3 Date $a, b \in C(\mathbb{R})$ e la corrispondente equazione di Bernoulli

$$y' = a(t)y + b(t)y^2, \tag{4}$$

a) verificare che la trasformazione $y = \exp(w + A(t))$, con $A(t)$ primitiva di $a(t)$, trasforma (4) in un'equazione a variabili separabili;

b) utilizzare a) per trovare la formula risolutiva per le soluzioni strettamente positive di (4);

c) trovare la trasformazione adatta e fare l'analogo di a)-b) per le soluzioni negative di (4) e calcolarle; cosa si può dire delle soluzioni che si annullano in almeno un punto?

Punteggi indicativi: 3+3+4+6+3+5, 10, 2+5+2