



Dipartimento di Matematica e Informatica
Corso di Laurea in Matematica

EQUAZIONI DIFFERENZIALI

Appello del 2 settembre 2014

N.B.: scrivere nome, cognome e numero di matricola su ogni foglio consegnato. È ammesso l'utilizzo degli appunti del corso. Tempo a disposizione: 3 ore

1 Dato il sistema planare

$$\begin{cases} x' = x - 2xy^2 \\ y' = 2x^2y - y, \end{cases}$$

- a) studiare l'esistenza e l'unicità locale per i relativi problemi di Cauchy, trovare gli equilibri del sistema e disegnare qualitativamente la direzione del campo vettoriale. Valgono le ipotesi dei teoremi di esistenza globale?
- b) studiare la stabilità lineare ed eventualmente nonlineare degli equilibri;
- c) provare che gli assi cartesiani sono insiemi invarianti e trovare esplicitamente le soluzioni con orbita in essi contenuta; verificare che se $(x(t), y(t))$ è soluzione del sistema, anche le funzioni $(-x(t), y(t))$, $(x(t), -y(t))$ e $(-x(t), -y(t))$ lo sono.

Detta ora $\omega(x, y)$ la 1-forma differenziale associata al sistema:

- d) dopo avere verificato che ω non è esatta in $\mathbb{R}^2$ e che non esistono fattori integranti del tipo $\lambda = \lambda(x)$ oppure $\lambda = \lambda(y)$, calcolare un fattore integrante $\lambda = \lambda(x, y)$ e utilizzarlo per trovare una primitiva F di $\lambda\omega$;
- e) utilizzare d) per dimostrare che tutte le orbite diverse da quelle in c) sono limitate e studiare l'intervallo massimale di esistenza delle relative soluzioni;
- f) dimostrare che tutte le soluzioni non banali e limitate sono periodiche.

2 Data la matrice

$$A := \begin{pmatrix} a & -(a+10) & 0 \\ a+1 & -(a+3) & a+1 \\ a+1 & -(2a+3) & 2a+1 \end{pmatrix}$$

- a) determinare i valori del parametro $a \in \mathbb{R}$ per i quali *tutte* le soluzioni del sistema lineare $y' = Ay$ sono limitate in futuro.

Limitatamente al caso $a = 0$

- b) calcolare esplicitamente la soluzione del problema di Cauchy $y' = Ay$, $y(0) = y_0$;
- c) trovare esplicitamente una *qualsiasi* soluzione dell'equazione non omogenea $y' = Ay + b$ dove $b = (7, -1, 2)$.

Punteggi indicativi: 3+2+3+5+4+6, 6+8+4