



Dipartimento di Matematica e Informatica
Corso di Laurea in Matematica

EQUAZIONI DIFFERENZIALI

Appello del 14 luglio 2014

N.B.: scrivere nome, cognome e numero di matricola su ogni foglio consegnato. È ammesso l'utilizzo degli appunti del corso. Tempo a disposizione: 3 ore

1 Data l'equazione differenziale del secondo ordine

$$x'' + x(x')^2 + x(1 - x^2) = 0, \quad (1)$$

a) trasformarla in un sistema 2×2 del primo ordine, della forma

$$\begin{cases} x' = a(x, y) \\ y' = b(x, y); \end{cases} \quad (2)$$

- b) studiare l'esistenza e l'unicità locale per i relativi problemi di Cauchy. Disegnare l'andamento del campo vettoriale. Valgono le ipotesi dei teoremi di esistenza globale?
- c) Trovare gli equilibri del sistema e studiare la loro stabilità lineare ed eventualmente non lineare;
- d) detta $\omega(x, y)$ la 1-forma differenziale associata al sistema, dopo avere verificato che ω non è esatta, trovare un fattore integrante λ e utilizzarlo per trovare una primitiva F di $\lambda\omega$;
- e) utilizzare F per studiare l'orbita delle soluzioni di (2) e di (1);
- f) esistono orbite periodiche? E orbite limitate e non periodiche? In caso positivo, trovare un'equazione integrale per il periodo delle soluzioni periodiche in dipendenza dal dato iniziale;
- g) dimostrare che tutte le soluzioni non limitate di (2) o di (1) sono globalmente definite in futuro e/o in passato. Studiare il loro comportamento agli estremi del dominio massimale.

2 Trovare esplicitamente la soluzione del seguente problema di Cauchy per il sistema lineare non omogeneo

$$\begin{cases} y_1' = -y_1 + y_3 + e^t \\ y_2' = 2y_1 - 3y_2 + 5y_3 + e^t \\ y_3' = y_1 - y_2 + y_3 - e^t \\ y(0) = (y_1(0), y_2(0), y_3(0)) = (1, 0, 1). \end{cases}$$

3 Data $A \in GL(n, \mathbb{R})$ matrice invertibile, si consideri il problema di Cauchy $y' = Ay + b$, $y(t_0) = y_0$, con $b \in \mathbb{R}^n$ fissato.

- a) Verificare che $e^{tA} = \frac{d}{dt}(e^{tA}A^{-1})$;
- b) utilizzare opportunamente a) nella formula della variazione delle costanti per ottenere una rappresentazione della soluzione del problema di Cauchy in oggetto in cui non compaiono integrali. Era prevedibile il risultato finale?