



Dipartimento di Matematica e Informatica  
Corso di Laurea in Matematica

## EQUAZIONI DIFFERENZIALI

Appello del 25 giugno 2014

N.B.: scrivere nome, cognome e numero di matricola su ogni foglio consegnato. È ammesso l'utilizzo degli appunti del corso. Tempo a disposizione: 3 ore

**1** Data l'equazione differenziale

$$y' = \frac{ty - y^2}{t(2t - y)} \quad (1)$$

- detto  $\Omega$  il dominio del campo vettoriale, si studi l'esistenza e l'unicità locale per i relativi problemi di Cauchy in  $\Omega^+ := \Omega \cap \{t > 0\}$ . Valgono le ipotesi dei teoremi di esistenza globale?
- Trovare le eventuali soluzioni costanti, le regioni dove le soluzioni sono crescenti/decrescenti e rappresentarle all'interno di  $\Omega^+$ ;
- provare che ogni soluzione massimale con dati iniziali  $(t_0, y_0)$  con  $0 < y_0 < 2t_0$  è globalmente definita in futuro e ammette limite per  $t \rightarrow +\infty$ , sia  $y_\infty$ ;
- dimostrare che  $y_\infty = +\infty$ ;
- detta  $y : ]\alpha, \beta[ \rightarrow \mathbb{R}$  la generica soluzione massimale, studiarne il comportamento in passato. Esistono soluzioni non globalmente definite in passato? Qual è il loro possibile comportamento per  $t \rightarrow \alpha^+$ ?

Successivamente, osservato che l'equazione appartiene a una classe ben nota

- utilizzare un opportuno cambiamento di variabile che trasformi (1) in un'equazione integrabile mediante la quale ottenere la soluzione generale in forma implicita;
- utilizzare f) per trovare l'intervallo massimale delle soluzioni al variare di  $(t_0, y_0)$  in  $\Omega^+$ ;
- trovare il comportamento asintotico per  $t \rightarrow +\infty$  delle soluzioni globalmente definite in futuro.

**2** Risolvere il seguente problema di Cauchy per il sistema lineare non omogeneo

$$\begin{cases} y_1' = 3y_2 + 7y_3 + 4e^t \\ y_2' = 2y_1 + y_2 + 6y_3 \\ y_3' = -y_1 + y_2 \\ y(0) = (y_1(0), y_2(0), y_3(0)) = (2, 2, 1). \end{cases}$$

**3** Data l'equazione del secondo ordine  $y'' = g(t, y)$  dove  $g(t, y)$  è un polinomio omogeneo di grado dispari in  $y$ , dimostrare che esiste sempre una soluzione con traiettoria rettilinea.