Università degli Studi di Udine Anno Accademico 2013/2014

Dipartimento di Matematica e Informatica
Corso di Laurea in Matematica

Equazioni Differenziali

Appello del 19 febbraio 2014

N.B.: scrivere nome, cognome e numero di matricola su ogni foglio consegnato. È ammesso l'utilizzo degli appunti del corso. Tempo a disposizione: 3 ore

1 Data l'equazione differenziale

$$y' = \frac{e^{|y|} - t}{e^{2y} + 1}$$

a) studiare l'esistenza e l'unicità locale per i relativi problemi di Cauchy. Valgono le ipotesi dei teoremi di esistenza globale?

b) Trovare le eventuali soluzioni costanti, le regioni dove le soluzioni sono crescenti/decrescenti e rappresentarle nel piano $t - y$;

c) dimostrare che se $y(t)$ è soluzione del problema di Cauchy con dati iniziali $y(1) = -2$ allora è globalmente definita e definitivamente decrescente in futuro; in generale, provare che tutte le soluzioni dell'equazione differenziale sono globalmente definite in futuro;

d) studiare le soluzioni in passato, in particolare dire se c'è oppure no esistenza globale in passato;

e) detta $y :]\alpha, \beta[\to \mathbb{R}$ la generica soluzione massimale, studiare l'esistenza e l'eventuale valore dei limiti $\lim_{t\to\alpha^+} y(t)$ e $\lim_{t\to\beta^-} y(t)$;

f) dimostrare che tutte le soluzioni sono definitivamente decrescenti in futuro e che tendono alla medesima funzione per $t \to +\infty$, cioè che esiste $x(t)$ tale che $\lim_{t\to+\infty}(y(t) - x(t)) = 0$ per ogni soluzione $y(t)$. (Suggerimento: una volta individuata la funzione limite $x(t)$ trovare un'equazione per la differenza tra y e x.)

2 Risolvere il seguente problema di Cauchy per il sistema lineare non omogeneo

$$\begin{cases} y_1' = 2y_1 - y_3 + e^{2t} \\ y_2' = y_1 + y_2 - y_3 \\ y_3' = -3y_1 + 4y_2 + 2y_3 + 2e^{2t} \\ y(0) = (y_1(0), y_2(0), y_3(0)) = (2, 2, 0). \end{cases}$$

3 Sia $z_A : \mathbb{R} \mapsto \mathcal{M}(n, \mathbb{R})$ la soluzione del problema di Cauchy per l'equazione differenziale matriciale

$$\begin{cases} Y' = AY \\ Y(0) = I. \end{cases}$$

con $A \in \mathcal{M}(n, \mathbb{R})$. Utilizzando *solamente i risultati sull'esistenza e unicità* per le equazioni differenziali, dimostrare che se A e B commutano allora $z_{A+B}(t) = z_A(t)z_B(t)$ per ogni $t \in \mathbb{R}$, dove $z_A(t)z_B(t)$ denota il prodotto tra matrici. A posteriori se ne deduca la ben nota formula $e^{A+B} = e^A e^B$.

Punteggi indicativi: 4+2+6+5+3+10, 11, 8