Università degli Studi di Udine — Anno Accademico 2013/2014

Dipartimento di Matematica e Informatica
Corso di Laurea in Matematica

Equazioni Differenziali

Appello del 29 gennaio 2014

N.B.: scrivere nome, cognome e numero di matricola su ogni foglio consegnato. È ammesso l'utilizzo degli appunti del corso. Tempo a disposizione: 3 ore

1 Sia data $f : J \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funzione continua, con $J =]a, b[$, tale che

$$|f(t, y)| \leq \ell(t)\, |y \ln |y|| + m(t),$$

con $\ell, m : J \to \mathbb{R}^+$ funzioni continue (e dove la funzione $y \to y \ln |y|$ si pensa estesa per continuità in $y = 0$). Dimostrare che le soluzioni massimali dell'equazione $y' = f(t, y)$ sono globalmente definite in futuro e passato. (Suggerimento: utilizzare opportunamente il Teorema del confronto.)

2 Si consideri l'equazione differenziale $y' = f(t, y)$ dove

$$f(t, y) = \begin{cases} y\big(\ln|t| - \sqrt{1 + (\ln|y|)^2}\,\big) & \text{se } y \neq 0 \\ 0 & \text{se } y = 0. \end{cases}$$

a) Trovare le regioni dove le soluzioni sono crescenti/decrescenti e rappresentarle nel piano (t, y).

b) Se $y(t)$ è soluzione, quale tra le funzioni $y(-t)$, $-y(t)$, $-y(-t)$ è ancora soluzione? Interpretare geometricamente il risultato.

c) Restringendosi d'ora in avanti all'aperto $t > 0$, studiare l'esistenza e l'unicità locale delle soluzioni dei relativi problemi di Cauchy; in particolare si dimostri che c'è unicità delle soluzioni in futuro. Valgono le ipotesi dei teoremi di esistenza globale?

d) Studiare l'esistenza globale in futuro e passato delle soluzioni al variare del dato iniziale.

e) Detta $y :]\alpha, \beta[\to \mathbb{R}$ la generica soluzione massimale, studiare l'esistenza e l'eventuale valore del $\lim_{t\to\beta^-} y(t)$.

f) Dimostrare che tutte le soluzioni globalmente definite in futuro sono sublineari.

g) Individuare tutte le possibile funzioni lineari $z_a(t) = at$, con $a > 0$, alle quali le soluzioni dell'equazione potrebbero essere asintotiche per $t \to +\infty$. Dimostrare che tuttavia nessuna soluzione può avere come asintoto una retta di equazione $y = at + b$ per qualsiasi scelta di b.

h) Esistono soluzioni $y(t)$ con dati iniziali $y(t_0) = y_0 > 0$ tali che $y(t_1) = 0$ per qualche $t_1 > t_0$? Quali sono le conseguenze sull'unicità delle soluzioni?

3 Risolvere il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = Ay \\ y(-1) = (0, -1, 1) \end{cases} \qquad \text{dove} \quad A = \begin{pmatrix} 4 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 3 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Punteggi indicativi: 10, 4+2+5+5+3+3+8+8, 8

Appello del 19 febbraio 2014

$\boxed{1}$ Data l'equazione differenziale

$$y' = \frac{e^{|y|} - t}{e^{2y} + 1}$$

a) studiare l'esistenza e l'unicità locale per i relativi problemi di Cauchy. Valgono le ipotesi dei teoremi di esistenza globale?

b) Trovare le eventuali soluzioni costanti, le regioni dove le soluzioni sono crescenti/decrescenti e rappresentarle nel piano $t - y$;

c) dimostrare che se $y(t)$ è soluzione del problema di Cauchy con dati iniziali $y(1) = -2$ allora è globalmente definita e definitivamente decrescente in futuro; in generale, provare che tutte le soluzioni dell'equazione differenziale sono globalmente definite in futuro;

d) studiare le soluzioni in passato, in particolare dire se c'è oppure no esistenza globale in passato;

e) detta $y :]\alpha, \beta[\to \mathbb{R}$ la generica soluzione massimale, studiare l'esistenza e l'eventuale valore dei limiti $\lim_{t\to\alpha^+} y(t)$ e $\lim_{t\to\beta^-} y(t)$;

f) dimostrare che tutte le soluzioni sono definitivamente decrescenti in futuro e che tendono alla medesima funzione per $t \to +\infty$, cioè che esiste $x(t)$ tale che $\lim_{t\to+\infty}(y(t) - x(t)) = 0$ per ogni soluzione $y(t)$. (Suggerimento: una volta individuata la funzione limite $x(t)$ trovare un'equazione per la differenza tra y e x.)

$\boxed{2}$ Risolvere il seguente problema di Cauchy per il sistema lineare non omogeneo

$$\begin{cases} y_1' = 2y_1 - y_3 + e^{2t} \\ y_2' = y_1 + y_2 - y_3 \\ y_3' = -3y_1 + 4y_2 + 2y_3 + 2e^{2t} \\ y(0) = (y_1(0), y_2(0), y_3(0)) = (2, 2, 0). \end{cases}$$

$\boxed{3}$ Sia $z_A : \mathbb{R} \mapsto \mathcal{M}(n, \mathbb{R})$ la soluzione del problema di Cauchy per l'equazione differenziale matriciale

$$\begin{cases} Y' = AY \\ Y(0) = I. \end{cases}$$

con $A \in \mathcal{M}(n, \mathbb{R})$. Utilizzando *solamente i risultati sull'esistenza e unicità* per le equazioni differenziali, dimostrare che se A e B commutano allora $z_{A+B}(t) = z_A(t)z_B(t)$ per ogni $t \in \mathbb{R}$, dove $z_A(t)z_B(t)$ denota il prodotto tra matrici. A posteriori se ne deduca la ben nota formula $e^{A+B} = e^A e^B$.

Punteggi indicativi: 4+2+6+5+3+10, 11, 8

Appello del 25 giugno 2014

$\boxed{1}$ Data l'equazione differenziale

$$y' = \frac{ty - y^2}{t(2t - y)} \tag{1}$$

a) detto Ω il dominio del campo vettoriale, si studi l'esistenza e l'unicità locale per i relativi problemi di Cauchy in $\Omega^+ := \Omega \cap \{t > 0\}$. Valgono le ipotesi dei teoremi di esistenza globale?

b) Trovare le eventuali soluzioni costanti, le regioni dove le soluzioni sono crescenti/decrescenti e rappresentarle all'interno di Ω^+;

c) provare che ogni soluzione massimale con dati iniziali (t_0, y_0) con $0 < y_0 < 2t_0$ è globalmente definita in futuro e ammette limite per $t \to +\infty$, sia y_∞;

d) dimostrare che $y_\infty = +\infty$;

e) detta $y :]\alpha, \beta[\to \mathbb{R}$ la generica soluzione massimale, studiarne il comportamento in passato. Esistono soluzioni non globalmente definite in passato? Qual è il loro possibile comportamento per $t \to \alpha^+$?

Successivamente, osservato che l'equazione appartiene a una classe ben nota

f) utilizzare un opportuno cambiamento di variabile che trasformi (1) in un'equazione integrabile mediante la quale ottenere la soluzione generale in forma implicita;

g) utilizzare f) per trovare l'intervallo massimale delle soluzioni al variare di (t_0, y_0) in Ω^+;

h) trovare il comportamento asintotico per $t \to +\infty$ delle soluzioni globalmente definite in futuro.

2 Risolvere il seguente problema di Cauchy per il sistema lineare non omogeneo

$$\begin{cases} y_1' = 3y_2 + 7y_3 + 4\mathrm{e}^t \\ y_2' = 2y_1 + y_2 + 6y_3 \\ y_3' = -y_1 + y_2 \\ y(0) = (y_1(0), y_2(0), y_3(0)) = (2, 2, 1). \end{cases}$$

3 Data l'equazione del secondo ordine $y'' = g(t, y)$ dove $g(t, y)$ è un polinomio omogeneo di grado dispari in y, dimostrare che esiste sempre una soluzione con traiettoria rettilinea.

Punteggi indicativi: 2+2+5+4+3+5+4+6, 10, 5

Appello del 14 luglio 2014

1 Data l'equazione differenziale del secondo ordine

$$x'' + x(x')^2 + x(1 - x^2) = 0, \tag{2}$$

a) trasformarla in un sistema 2×2 del primo ordine, della forma

$$\begin{cases} x' = a(x, y) \\ y' = b(x, y); \end{cases} \tag{3}$$

b) studiare l'esistenza e l'unicità locale per i relativi problemi di Cauchy. Disegnare l'andamento del campo vettoriale. Valgono le ipotesi dei teoremi di esistenza globale?

c) Trovare gli equilibri del sistema e studiare la loro stabilità lineare ed eventualmente non lineare;

d) detta $\omega(x, y)$ la 1-forma differenziale associata al sistema, dopo avere verificato che ω non è esatta, trovare un fattore integrante λ e utilizzarlo per trovare una primitiva F di $\lambda\omega$;

e) utilizzare F per studiare l'orbita delle soluzioni di (3) e di (2);

f) esistono orbite periodiche? E orbite limitate e non periodiche? In caso positivo, trovare un'equazione integrale per il periodo delle soluzioni periodiche in dipendenza dal dato iniziale;

g) dimostrare che tutte le soluzioni non limitate di (3) o di (2) sono globalmente definite in futuro e/o in passato. Studiare il loro comportamento agli estremi del dominio massimale.

2 Trovare esplicitamente la soluzione del seguente problema di Cauchy per il sistema lineare non omogeneo

$$\begin{cases} y_1' = -y_1 + y_3 + \mathrm{e}^t \\ y_2' = 2y_1 - 3y_2 + 5y_3 + \mathrm{e}^t \\ y_3' = y_1 - y_2 + y_3 - \mathrm{e}^t \\ y(0) = (y_1(0), y_2(0), y_3(0)) = (1, 0, 1). \end{cases}$$

3 Data $A \in GL(n, \mathbb{R})$ matrice invertibile, si consideri il problema di Cauchy $y' = Ay + b$, $y(t_0) = y_0$, con $b \in \mathbb{R}^n$ fissato.

a) Verificare che $\mathrm{e}^{tA} = \frac{d}{dt}\big(\mathrm{e}^{tA}A^{-1}\big)$;

b) utilizzare opportunamente a) nella formula della variazione delle costanti per ottenere una rappresentazione della soluzione del problema di Cauchy in oggetto in cui non compaiono integrali. Era prevedibile il risultato finale?

Punteggi indicativi: 1+2+3+5+6+3+4, 10, 6

Appello del 2 settembre 2014

1 Dato il sistema planare

$$\begin{cases} x' = x - 2xy^2 \\ y' = 2x^2y - y, \end{cases}$$

a) studiare l'esistenza e l'unicità locale per i relativi problemi di Cauchy, trovare gli equilibri del sistema e disegnare qualitativamente la direzione del campo vettoriale. Valgono le ipotesi dei teoremi di esistenza globale?

b) studiare la stabilità lineare ed eventualmente nonlineare degli equilibri;

c) provare che gli assi cartesiani sono insiemi invarianti e trovare esplicitamente le soluzioni con orbita in essi contenuta; verificare che se $(x(t), y(t))$ è soluzione del sistema, anche le funzioni $(-x(t), y(t))$, $(x(t), -y(t))$ e $(-x(t), -y(t))$ lo sono.

Detta ora $\omega(x, y)$ la 1-forma differenziale associata al sistema:

d) dopo avere verificato che ω non è esatta in $\mathbb{R}^2$ e che non esistono fattori integranti del tipo $\lambda = \lambda(x)$ oppure $\lambda = \lambda(y)$, calcolare un fattore integrante $\lambda = \lambda(x, y)$ e utilizzarlo per trovare una primitiva F di $\lambda\omega$;

e) utilizzare d) per dimostrare che tutte le orbite diverse da quelle in c) sono limitate e studiare l'intervallo massimale di esistenza delle relative soluzioni;

f) dimostrare che tutte le soluzioni non banali e limitate sono periodiche.

2 Data la matrice

$$A := \begin{pmatrix} a & -(a+10) & 0 \\ a+1 & -(a+3) & a+1 \\ a+1 & -(2a+3) & 2a+1 \end{pmatrix}$$

a) determinare i valori del parametro $a \in \mathbb{R}$ per i quali *tutte* le soluzioni del sistema lineare $y' = Ay$ sono limitate in futuro.

Limitatamente al caso $a = 0$

b) calcolare esplicitamente la soluzione del problema di Cauchy $y' = Ay$, $y(0) = y_0$;

c) trovare esplicitamente una *qualsiasi* soluzione dell'equazione non omogenea $y' = Ay + b$ dove $b = (7, -1, 2)$.

Punteggi indicativi: 3+2+3+5+4+6, 6+8+4