Università degli Studi di Udine — Anno Accademico 2013/2014

Corso di Laurea in Biotecnologie

Modulo di Matematica

Esame del 15/09/2014

N.B.: scrivere nome, cognome e numero di matricola su ogni foglio consegnato.
Tempo a disposizione: 2.5 ore

---

1 Se $\lim_{x\to x_0} f(x) = 0^-$ e $\lim_{x\to x_0} g(x) = +\infty$, allora $\lim_{x\to x_0} f(x)g(x)$

- A vale $+\infty$
- B vale $-\infty$
- C vale 0
- D non ci sono elementi sufficienti per rispondere

---

2 Se f è una funzione derivabile in $]a, b[$ e tale che $f''(x_0) = 0$ e $f'(x_0) < 0$ per $x_0 \in]a, b[$, allora

- A x_0 è un punto di minimo relativo
- B x_0 è un punto di massimo relativo
- C x_0 è un punto di flesso
- D nessuna delle precedenti

---

3 L'equazione differenziale $y'' = y' \ln t + 3t^2 y$ è

- A un'equazione lineare del primo ordine
- B un'equazione lineare del secondo ordine
- C un'equazione non lineare del primo ordine
- D un'equazione non lineare del secondo ordine

---

4 La funzione $f(x) = \log_{1/3} x$

- A è definita in $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ e pari
- B è invertibile con inversa $f^{-1}(x) = 3^{-x}$
- C è crescente sul proprio dominio
- D è definita in $]0, +\infty[$ e dispari

---

5 Dare l'interpretazione geometrica della derivata di una funzione f in un punto x_0.

---

6 Rappresentare il grafico di una funzione g che verifichi contemporaneamente le seguenti proprietà:

$$\lim_{x\to-\infty} g(x) = -2 \qquad \lim_{x\to 0^-} g(x) = 0 \qquad \lim_{x\to 0^+} g(x) = -\infty \qquad \lim_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$$

7
a) Enunciare il Teorema sul limite delle successioni monotone
b) dire in quali dei seguenti casi è possibile applicarlo:

$$a_n = 2n - \cos n, \qquad b_n = \operatorname{sen}(\pi n^2/2), \qquad c_n = \frac{n+1}{n+2}.$$

---

8 Data la funzione

$$g(x) = (2x^2 + x - 1)\mathrm{e}^x$$

a) determinarne il dominio $\mathcal{D}$ e studiarne il segno;
b) calcolare i limiti agli estremi del dominio e trovare gli eventuali asintoti;
c) determinare gli intervalli in cui la funzione è crescente, quelli in cui è decrescente, e gli eventuali punti di massimo/minimo relativo e/o assoluto;
d) trovare gli intervalli in cui la funzione è concava e quelli in cui è convessa;
e) scrivere l'equazione della retta tangente al grafico nel punto di ascissa $x_0 = -1$;
f) disegnare un grafico approssimativo di g.

---

9 Dato il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = -3y + t^2 \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

a) dire se la funzione $y(t) = t\mathrm{e}^{-3t} + 1$ è soluzione del problema;
b) determinare una soluzione del problema nel caso in cui non lo sia la funzione di cui al punto precedente; oppure, alternativamente
b') calcolare i seguenti integrali

$$\int \left(\frac{1+x}{\sqrt{4-x^2}} - x\sqrt[3]{x} \right) dx, \qquad \int_1^2 (6x^2 - 2x)\ln(2x-1)\, dx.$$

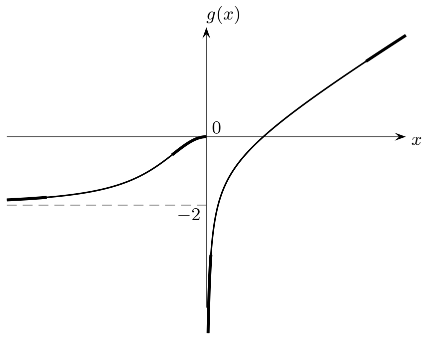
---

10 Scrivere il polinomio di Taylor di grado 2 di $f(x) = \mathrm{e}^{2x}\cos x$ nel punto $x_0 = \pi/2$.

Soluzioni dei quesiti dell'esame del 15 settembre 2014

$\boxed{\mathbf{1}}$ D; $\boxed{\mathbf{2}}$ D; $\boxed{\mathbf{3}}$ B; $\boxed{\mathbf{4}}$ B; $\boxed{\mathbf{5}}$ consultare il libro di testo.

$\boxed{\mathbf{6}}$ In neretto si evidenziano le informazioni date dai limiti. Il grafico della funzione è quindi completato a piacere (linea sottile), per esempio:



$\boxed{\mathbf{7}}$ a) consultare il libro di testo; b) nel primo caso si ha

$$a_n \le a_{n+1} \iff 2n - \cos n \le 2(n+1) - \cos(n+1) \iff \cos(n+1) - \cos n \le 2$$

che è sempre vera in quanto $\cos(n+1) - \cos n \le |\cos(n+1)| + |\cos n| \le 2$. Nel secondo caso, a causa del seno, la successione non è monotona, infatti $a_0 = 0 < 1 = a_1$ mentre $a_1 > 0 = a_2$ e in generale $a_{2n} = 0$ e $a_{4n+1} = 1$ per ogni n. Nel terzo è nuovamente monotona, infatti

$$c_n \le c_{n+1} \iff \frac{n+1}{n+2} \le \frac{(n+1)+1}{(n+1)+2} \iff 0 \le \frac{1}{(n+2)(n+3)},$$

che è sempre vera. Il teorema si può dunque applicare ad a_n e c_n ma non a b_n.

$\boxed{\mathbf{8}}$ a) La funzione è definita, continua e derivabile in $\mathcal{D} = \mathbb{R}$. Poiché $\mathrm{e}^x > 0$ per ogni x si ha $g(x) \ge 0$ se e solo se $2x^2 + x - 1 \ge 0$ ovvero se $x \le -1$ oppure $x \ge 1/2$.

b) Ha senso andare a studiare i limiti a $\pm\infty$. Si ha $\lim_{x\to+\infty} g(x) = [(+\infty)\cdot(+\infty)] = +\infty$, quindi $g(x)$ non ammette massimo, mentre applicando due volte de L'Hôpital

$$\lim_{x\to-\infty} g(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{2x^2+x-1}{\mathrm{e}^{-x}} = \left[\frac{+\infty}{+\infty}\right] \overset{H}{=} \lim_{x\to-\infty} \frac{4x+1}{-\mathrm{e}^{-x}} \overset{H}{=} \lim_{x\to-\infty} \frac{4}{\mathrm{e}^{-x}} = \left[\frac{4}{+\infty}\right] = 0.$$

Infine, siccome

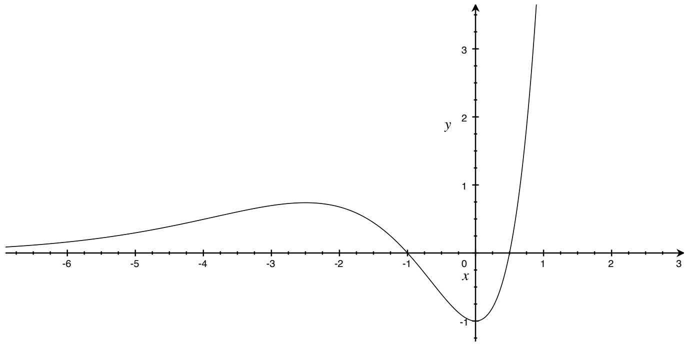
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{g(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} (2x+1-1/x)e^x = +\infty$$

la funzione non ammette asintoti obliqui a $+\infty$, mentre $y = 0$ è banalmente un asintoto orizzontale a $-\infty$.

c) La derivata prima di g è

$$g'(x) = (4x+1)\mathrm{e}^x + (2x^2+x-1)\mathrm{e}^x = (2x^2+5x)\mathrm{e}^x.$$

Si ha $g'(x) \ge 0$ se e solo se $2x^2 + 5x \ge 0$ ovvero $x \le -5/2$ oppure $x \ge 0$, quindi la funzione è decrescente in $]-5/2, 0[$, crescente in $]-\infty, -5/2[$ e su $]0, +\infty[$. In $x = -5/2$ ammette un massimo relativo, in $x = 0$ ammette un minimo relativo e assoluto con $g(0) = -1$.



d) La derivata seconda è

$$g''(x) = (4x+5)e^x + (2x^2+5x)e^x = (2x^2+9x+5)e^x.$$

Si ha $g''(x) \geq 0$ se e solo se $2x^2+9x+5 \geq 0$ le cui soluzioni sono $x \leq \frac{-9-\sqrt{41}}{4}$ oppure $x \geq \frac{-9+\sqrt{41}}{4}$, quindi

$$g''(x) \begin{cases} > 0, & \text{se } x \in \left]-\infty, \frac{-9-\sqrt{41}}{4}\right[\cup \left]\frac{-9+\sqrt{41}}{4}, +\infty\right[, \\ = 0, & \text{se } x = \frac{-9-\sqrt{41}}{4} \text{ oppure } x = \frac{-9+\sqrt{41}}{4}, \\ < 0, & \text{se } x \in \left]\frac{-9-\sqrt{41}}{4}, \frac{-9+\sqrt{41}}{4}\right[, \end{cases}$$

perciò la funzione è convessa in $\left]-\infty, \frac{-9-\sqrt{41}}{4}\right[$ e in $\left]\frac{-9+\sqrt{41}}{4}, +\infty\right[$, mentre è concava in $\left]\frac{-9-\sqrt{41}}{4}, \frac{-9+\sqrt{41}}{4}\right[$. In $x = \frac{-9-\sqrt{41}}{4}$ e $x = \frac{-9+\sqrt{41}}{4}$ ammette due punti di flesso.

e) L'equazione della retta tangente al grafico nel generico punto $(x_0, g(x_0))$ è

$$y = (x - x_0)g'(x_0) + g(x_0).$$

Poiché $g(-1) = 0$ e $g'(-1) = -3/e$, l'equazione della retta cercata è

$$y = -3(x+1)e.$$

$\boxed{9}$ a) Si ha $y'(t) = (1-3t)e^{-23}$ e sostituendo si ottiene l'equazione

$$(1-3t)e^{-3t} = -3(te^{-3t}+1) + t^2$$

che non è identicamente soddisfatta per $t \in \mathbb{R}$ (per esempio, per $t = 0$ si ha $1 \neq -3$). La funzione non è dunque soluzione. Si osservi che tuttavia soddisfa la seconda condizione, essendo $y(0) = 1$.

b) Si tratta di un'equazione lineare del primo ordine a coefficienti costanti, del tipo

$$y' = a(t)y + b(t)$$

le cui soluzioni sono date da

$$y(t) = e^{A(t)} \int e^{-A(t)} b(t)\, dt$$

dove $A(t)$ è una primitiva di $a(t)$. In questo caso $A(t) = -3t$ e integrando per parti due volte si ottiene

$$
\begin{aligned}
y(t) &= \mathrm{e}^{-3t}\int \mathrm{e}^{3t}t^2\,dt = \mathrm{e}^{-3t}\Big(\frac{\mathrm{e}^{3t}}{3}t^2 - \int \frac{\mathrm{e}^{3t}}{3}2t\,dt\Big) = \mathrm{e}^{-3t}\Big(\frac{\mathrm{e}^{3t}}{3}t^2 - \frac{2}{3}\Big(\frac{\mathrm{e}^{3t}}{3}t - \int \frac{\mathrm{e}^{3t}}{3}\,dt\Big)\Big)\\
&= \mathrm{e}^{-3t}\Big(\frac{\mathrm{e}^{3t}}{3}t^2 - \frac{2\mathrm{e}^{3t}}{9}t + \frac{2\mathrm{e}^{3t}}{27} + c\Big) = c\,\mathrm{e}^{-3t} + \frac{t^2}{3} - \frac{2}{9}t + \frac{2}{27},
\end{aligned}
$$

dove c è la generica costante d'integrazione. Imponendo la condizione $y(0) = 1$ si ricava $c + 2/27 = 1$ cioè $c = 25/27$. La soluzione è quindi

$$
y(t) = \frac{25}{27}\mathrm{e}^{-3t} + \frac{t^2}{3} - \frac{2}{9}t + \frac{2}{27}.
$$

Alternativamente, si poteva utilizzare direttamente la formula risolutiva (insieme alla formula fondamentale del calcolo integrale)

$$
y(t) = \mathrm{e}^{A(t)}\left(\int_0^t \mathrm{e}^{-A(s)}b(s)\,ds + y(0)\right)
$$

dove $A(t) = \int_0^t a(s)\,ds = -3t$ e

$$
\begin{aligned}
y(t) &= \mathrm{e}^{-3t}\left(\int_0^t \mathrm{e}^{3s}s^2\,ds + 1\right) = \mathrm{e}^{-3t}\left(\left[\frac{\mathrm{e}^{3s}}{3}s^2 - \frac{2\mathrm{e}^{3s}}{9}s + \frac{2\mathrm{e}^{3s}}{27}\right]_0^t + 1\right)\\
&= \mathrm{e}^{-3t}\left(\frac{\mathrm{e}^{3t}}{3}t^2 - \frac{2\mathrm{e}^{3t}}{9}t + \frac{2\mathrm{e}^{3t}}{27} - \frac{2}{27} + 1\right) = \frac{25}{27}\mathrm{e}^{-3t} + \frac{t^2}{3} - \frac{2}{9}t + \frac{2}{27}.
\end{aligned}
$$

b') Dalle tabelle si ottiene

$$
\begin{aligned}
\int \Big(\frac{1+x}{\sqrt{4-x^2}} - x\sqrt[3]{x}\Big)\,dx &= \int \frac{1}{\sqrt{4-x^2}}\,dx - \frac{1}{2}\int \frac{(4-x^2)'}{(4-x^2)^{1/2}}\,dx - \int x^{4/3}\,dx\\
&= \operatorname{arcsen}\frac{x}{2} - \frac{1}{2}\frac{(4-x^2)^{1/2}}{1/2} - \frac{x^{7/3}}{7/3} + c = \operatorname{arcsen}\frac{x}{2} - \sqrt{4-x^2} - \frac{3}{7}x^2\sqrt[3]{x} + c,
\end{aligned}
$$

con c costante arbitraria. Utilizzando invece il metodo di integrazione per parti si ha

$$
\begin{aligned}
\int_1^2 (6x^2-2x)\ln(2x-1)\,dx &= \Big[(2x^3-x^2)\ln(2x-1)\Big]_1^2 - \int_1^2 (2x^3-x^2)\frac{2}{2x-1}\,dx\\
&= 12\ln 3 - 2\int_1^2 x^2\,dx = 12\ln 3 - 2\Big[\frac{x^3}{3}\Big]_1^2 = 12\ln 3 - \frac{14}{3}.
\end{aligned}
$$

10 Si ha $f'(x) = \mathrm{e}^{2x}(2\cos x - \operatorname{sen} x)$ e $f''(x) = \mathrm{e}^{2x}(3\cos x - 4\operatorname{sen} x)$, da cui $f(\pi/2) = 0$, $f'(\pi/2) = -\mathrm{e}^{\pi}$, $f''(\pi/2) = -4\mathrm{e}^{\pi}$ perciò il polinomio di Taylor cercato è

$$
P(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x-x_0)^2 = -\mathrm{e}^{\pi}\Big(x - \frac{\pi}{2}\Big) - 2\mathrm{e}^{\pi}\Big(x - \frac{\pi}{2}\Big)^2.
$$