Università degli Studi di Udine — Anno Accademico 2013/2014

Corso di Laurea in Biotecnologie

Modulo di Matematica

Esame del 25/07/2014

N.B.: scrivere nome, cognome e numero di matricola su ogni foglio consegnato.
Tempo a disposizione: 2.5 ore

---

1 Se $\lim_{x\to x_0} f(x) = 3$ e $\lim_{x\to x_0} g(x) = -\infty$, allora $\lim_{x\to x_0} f(x)g(x)$

- A vale -3
- B vale $-\infty$
- C vale 0
- D non ci sono elementi sufficienti per rispondere

---

2 Se f è una funzione derivabile in $]a, b[$ e tale che $f'(x_0) = 0$ e $f''(x_0) > 0$ per $x_0 \in]a, b[$, allora

- A x_0 è un punto di minimo relativo
- B x_0 è un punto di massimo relativo
- C x_0 è un punto di flesso
- D nessuna delle precedenti

---

3 L'equazione differenziale $y' = t \ln y - 3t$ è

- A un'equazione lineare del primo ordine
- B un'equazione lineare del secondo ordine
- C un'equazione non lineare del primo ordine
- D un'equazione non lineare del secondo ordine

---

4 La funzione $f(x) = \operatorname{tg} x$

- A è definita in $\mathbb{R} \setminus \{\pi + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}$
- B è pari
- C è suriettiva come funzione a valori in $\mathbb{R}$
- D è crescente sul proprio dominio

---

5 Scrivere la definizione di primitiva di una funzione f in un intervallo I

$\boxed{\mathbf{6}}$ Rappresentare il grafico di una funzione g che verifichi contemporaneamente le seguenti proprietà:

$$\lim_{x\to-\infty} g(x) = +\infty \qquad \lim_{x\to 2^-} g(x) = +\infty \qquad \lim_{x\to 2^+} g(x) = -\infty \qquad \lim_{x\to+\infty} g(x) = -2$$

$\boxed{\mathbf{7}}$

a) Enunciare il Teorema del valore medio di Lagrange;

b) determinare, argomentando, a quali tra le funzioni $f(x) = \sqrt{|x|+1}$, $g(x) = \frac{1}{x+1}$, $h(x) = \ln(\mathrm{e}^x + 1)$ è possibile applicare il teorema nell'intervallo $[-2, 0]$.

$\boxed{\mathbf{8}}$ Data la funzione

$$g(x) = \ln(x^2 - 3x + 3)$$

a) determinarne il dominio $\mathcal{D}$ e studiarne il segno;

b) calcolare i limiti agli estremi del dominio e trovare gli eventuali asintoti;

c) determinare gli intervalli in cui la funzione è crescente, quelli in cui è decrescente, e gli eventuali punti di massimo/minimo relativo e/o assoluto;

d) trovare gli intervalli in cui la funzione è concava e quelli in cui è convessa;

e) scrivere l'equazione della retta tangente al grafico nel punto di ascissa $x_0 = 0$;

f) disegnare un grafico approssimativo di g.

$\boxed{\mathbf{9}}$ Dato il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = \dfrac{3t\,\mathrm{sen}(2t)}{y^4} \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

a) dire se la funzione $y(t) = 2 - \cos(2t)$ è soluzione del problema;

b) determinare una soluzione del problema nel caso in cui non lo sia la funzione di cui al punto precedente; oppure, alternativamente

b') calcolare i seguenti integrali

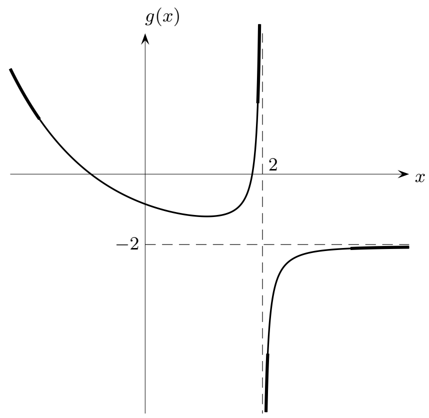
$$\int \left(\frac{3x}{x^2+5} + \frac{x^3}{\sqrt{x}}\right) dx, \qquad \int_0^{\pi/2} (2-3x)\cos(3x)\, dx.$$

$\boxed{\mathbf{10}}$ Scrivere il polinomio di Taylor di grado 2 di $f(x) = \dfrac{1}{1+3x}$ nel punto $x_0 = -1$.

Soluzioni dei quesiti dell'esame del 25 luglio 2014

$\boxed{\mathbf{1}}$ B; $\boxed{\mathbf{2}}$ A; $\boxed{\mathbf{3}}$ C; $\boxed{\mathbf{4}}$ C; $\boxed{\mathbf{5}}$ consultare il libro di testo.

$\boxed{\mathbf{6}}$ In neretto si evidenziano le informazioni date dai limiti. Il grafico della funzione è quindi completato a piacere (linea sottile), per esempio:



$\boxed{\mathbf{7}}$ a) consultare il libro di testo; b) la funzione $f(x)$ è definita e continua in $\mathbb{R}$, derivabile in $\mathbb{R} \setminus \{0\}$; se ristretta a $[-2, 0]$ diventa derivabile anche nell'estremo 0 (in ogni caso basterebbe la derivabilità in $]-2, 0[$), perciò si può applicare il teorema. La funzione $g(x)$ non è definita in $x = -1$ interno all'intervallo in oggetto, perciò il teorema non può essere applicato. Infine h è banalmente definita e derivabile in $\mathbb{R}$ e a maggior ragione in $[-2, 0]$ quindi il teorema può essere applicato anche ad h.

$\boxed{\mathbf{8}}$ a) La funzione è definita per gli x tali che $x^2 - 3x + 3 > 0$, disequazione vera per ogni $x \in \mathbb{R}$, perciò il dominio è $\mathcal{D} = \mathbb{R}$. Essendo composizione di funzioni continue e derivabili, la funzione è continua e derivabile nel dominio.

La funzione è ≥ 0 se e solo se $x^2 - 3x + 3 \geq 1$ ovvero $x^2 - 3x + 2 \geq 0$ che è verificata se e solo se $x \leq 1$ oppure $x \geq 2$. In definitiva la funzione è positiva in $]-\infty, 1[$ e in $]2, +\infty[$, negativa in $]1, 2[$, mentre si annulla in $x = 1$ e $x = 2$.

b) Ha senso andare a studiare i limiti a $\pm\infty$. Poiché l'argomento del logaritmo tende a $+\infty$ se $x \to \pm\infty$, si ha facilmente $\lim_{x\to\pm\infty} g(x) = +\infty$, quindi la funzione non ammette massimo. Essendo

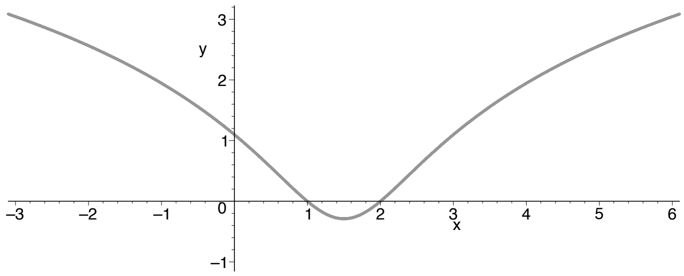
$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{g(x)}{x} = 0, \quad \lim_{x\to\pm\infty} (g(x) - 0 \cdot x) = +\infty,$$

la funzione non ammette asintoti obliqui (e banalmente neanche verticali).

c) La derivata prima di g è

$$g'(x) = \frac{2x - 3}{x^2 - 3x + 3}.$$

Poiché per a) il denominatore è sempre positivo, la derivata è ≥ 0 se e solo se $2x-3 \geq 0$ cioè $x \geq 3/2$, perciò la funzione è crescente in $]3/2, +\infty[$, mentre è decrescente in $]-\infty, 3/2[$. In $x = 3/2$ ammette un minimo assoluto.



d) La derivata seconda è

$$g''(x) = \frac{2(x^2 - 3x + 3) - (2x - 3)^2}{(x^2 - 3x + 3)^2} = \frac{-2x^2 + 6x - 3}{(x^2 - 3x + 3)^2}.$$

Poiché il denominatore è sempre positivo, la derivata seconda è ≥ 0 se $-2x^2 + 6x - 3 \geq 0$ ovvero $2x^2 - 6x + 3 \leq 0$ le cui soluzioni sono $\frac{3-\sqrt{3}}{2} \leq x \leq \frac{3+\sqrt{3}}{2}$, quindi

$$g''(x) \begin{cases} < 0, & \text{se } x \in]-\infty, \frac{3-\sqrt{3}}{2}[\cup]\frac{3+\sqrt{3}}{2}, +\infty[, \\ = 0, & \text{se } x = \frac{3-\sqrt{3}}{2} \text{ oppure } x = \frac{3+\sqrt{3}}{2}, \\ > 0, & \text{se } x \in]\frac{3-\sqrt{3}}{2}, \frac{3+\sqrt{3}}{2}[, \end{cases}$$

perciò la funzione è concava in $]-\infty, \frac{3-\sqrt{3}}{2}[$ e in $]\frac{3+\sqrt{3}}{2}, +\infty[$, mentre è convessa in $]\frac{3-\sqrt{3}}{2}, \frac{3+\sqrt{3}}{2}[$. In $x = \frac{3-\sqrt{3}}{2}$ e $x = \frac{3+\sqrt{3}}{2}$ ammette due punti di flesso.

e) L'equazione della retta tangente al grafico nel generico punto $(x_0, g(x_0))$ è

$$y = (x - x_0)g'(x_0) + g(x_0).$$

Poiché $g(0) = \ln 3$ e $g'(0) = -1$, l'equazione della retta cercata è

$$y = -x + \ln 3$$

9 a) Si ha $y'(t) = 2\,\mathrm{sen}(2t)$ e sostituendo si ottiene l'equazione

$$2\,\mathrm{sen}(2t) = \frac{3t\,\mathrm{sen}(2t)}{(2 - \cos(2t))^4}$$

che non è identicamente soddisfatta per $t \in \mathbb{R}$ (per esempio, per $t = \pi/4$ si ottiene $2 \neq 3\pi/64$). La funzione non è dunque soluzione. Si osservi che la funzione soddisfa la seconda condizione, essendo $y(0) = 1$.

b) Scrivendo $y' = \frac{dy}{dt}$ e utilizzando il metodo di separazione delle variabili si ha

$$y^4\,dy = \big(3t\,\mathrm{sen}(2t)\big)\,dt$$

e integrando (utilizzando le tabelle)

$$\int y^4\,dy = \int \big(3t\,\mathrm{sen}(2t)\big)\,dt \qquad \Longrightarrow \qquad \frac{y^5}{5} = \int \big(3t\,\mathrm{sen}(2t)\big)\,dt.$$

Il secondo integrale lo calcoliamo per parti:

$$\int \big(3t\,\mathrm{sen}(2t)\big)\,dt = -3t\frac{\cos(2t)}{2} + \int 3\frac{\cos(2t)}{2}\,dt = -\frac{3}{2}t\cos(2t) + \frac{3}{4}\,\mathrm{sen}(2t) + c$$

dove c è la generica costante d'integrazione, perciò si ottiene

$$\frac{y^5}{5} = -\frac{3}{2}t\cos(2t) + \frac{3}{4}\,\mathrm{sen}(2t) + c \qquad \Longleftrightarrow \qquad y = \sqrt[5]{-\frac{15}{2}t\cos(2t) + \frac{15}{4}\,\mathrm{sen}(2t) + 5c}.$$

Imponendo la condizione $y(0) = 1$ (nella prima delle due equazioni qui sopra) si ricava $1/5 = c$. La soluzione è quindi

$$y(t) = \sqrt[5]{-\frac{15}{2}t\cos(2t) + \frac{15}{4}\,\mathrm{sen}(2t) + 1}.$$

Alternativamente, si poteva utilizzare direttamente la formula risolutiva per le equazioni a variabili separabili (insieme alla formula fondamentale del calcolo integrale)

$$\begin{aligned}\int_1^y z^4\,dz = \int_0^t \big(3s\,\mathrm{sen}(2s)\big)\,ds \quad &\Longrightarrow \quad \left[\frac{z^5}{5}\right]_1^y = \left[-\frac{3}{2}s\cos(2s) + \frac{3}{4}\,\mathrm{sen}(2s)\right]_0^t \\ &\Longrightarrow \quad \frac{y^5}{5} - \frac{1}{5} = -\frac{3}{2}t\cos(2t) + \frac{3}{4}\,\mathrm{sen}(2t)\end{aligned}$$

che risolta rispetto a y fornisce la soluzione cercata.

b') Dalle tabelle si ottiene

$$\int \Big(\frac{3x}{x^2+5} + \frac{x^3}{\sqrt{x}}\Big)\,dx = \frac{3}{2}\int \frac{(x^2+5)'}{x^2+5}\,dx + \int x^{5/2}\,dx = \frac{3}{2}\ln(x^2+5) + \frac{x^{7/2}}{7/2} + c,$$

con c costante arbitraria. Utilizzando invece il metodo di integrazione per parti si ha

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi/2} (2-3x)\cos(3x)\,dx &= \Big[(2-3x)\frac{\mathrm{sen}(3x)}{3}\Big]_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2} (-3)\frac{\mathrm{sen}(3x)}{3}\,dx \\ &= \frac{3\pi-4}{6} - \left[\frac{\cos(3x)}{3}\right]_0^{\pi/2} = \frac{3\pi-4}{6} + \frac{1}{3} = \frac{3\pi-2}{6}.\end{aligned}$$

10 Si ha $f'(x) = -\frac{3}{(1+3x)^2}$ e $f''(x) = \frac{18}{(1+3x)^3}$, da cui $f(-1) = -1/2$, $f'(-1) = -3/4$, $f''(-1) = -9/4$ perciò il polinomio di Taylor cercato è

$$P(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x-x_0)^2 = -\frac{1}{2} - \frac{3}{4}(x+1) - \frac{9}{8}(x+1)^2.$$