Università degli Studi di Udine — Anno Accademico 2013/2014

Corso di Laurea in Biotecnologie

Modulo di Matematica

Esame del 11/07/2014

N.B.: scrivere nome, cognome e numero di matricola su ogni foglio consegnato.
Tempo a disposizione: 2.5 ore

---

1 Se $\lim_{x\to x_0} f(x) = 1$ e $\lim_{x\to x_0} g(x) = 0^-$, allora $\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$

- A vale -1
- B vale 0
- C vale $-\infty$
- D non ci sono elementi sufficienti per rispondere

---

2 Se f è una funzione derivabile in $]a, b[$ e tale che $f'(x_0) = 0$ e $f''(x_0) < 0$ per $x_0 \in]a, b[$, allora

- A x_0 è un punto di minimo relativo
- B x_0 è un punto di massimo relativo
- C x_0 è un punto di flesso
- D nessuna delle precedenti

---

3 L'equazione differenziale $y'' = 2e^t y - y \operatorname{sen} t$ è

- A un'equazione lineare del primo ordine
- B un'equazione lineare del secondo ordine
- C un'equazione non lineare del primo ordine
- D un'equazione non lineare del secondo ordine

---

4 La funzione $f(x) = \log_{1/2} x$

- A è definita in $[0, +\infty[$
- B è pari
- C è decrescente
- D ha limite $+\infty$ per $x \to +\infty$

---

5 Dare l'interpretazione geometrica della derivata di una funzione f in un punto x_0.

$\boxed{6}$ Rappresentare il grafico di una funzione g che verifichi contemporaneamente le seguenti proprietà:

$$\lim_{x\to-\infty} g(x) = -\infty \qquad \lim_{x\to-2^-} g(x) = -\infty \qquad \lim_{x\to-2^+} g(x) = +\infty \qquad \lim_{x\to+\infty} g(x) = -1$$

$\boxed{7}$ a) Enunciare il Teorema di de L'Hôpital;

b) per ciascuno dei seguenti tre limiti

$$\lim_{x\to 0} \frac{2x^2 + \operatorname{arctg}(1+x)}{x\ln(1+x) + 3\operatorname{sen} x}, \qquad \lim_{x\to 0} \frac{3\operatorname{tg}(x^2) - 4\operatorname{sen} x}{x + \ln(1+2x)}, \qquad \lim_{x\to+\infty} \frac{2^x - 3x}{5^{-x} + \operatorname{sen} x + 2},$$

determinare se è possibile applicare il teorema ed eventualmente calcolarne il valore.

$\boxed{8}$ Data la funzione

$$g(x) = \frac{1-x^2}{(x+2)^2}$$

a) determinarne il dominio $\mathcal{D}$ e studiarne il segno;

b) calcolare i limiti agli estremi del dominio e trovare gli eventuali asintoti;

c) determinare gli intervalli in cui la funzione è crescente, quelli in cui è decrescente, e gli eventuali punti di massimo/minimo relativo e/o assoluto;

d) trovare gli intervalli in cui la funzione è concava e quelli in cui è convessa;

e) scrivere l'equazione della retta tangente al grafico nel punto di ascissa $x_0 = 0$;

f) disegnare un grafico approssimativo di g.

$\boxed{9}$ Dato il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = t\,e^{2t}\,3^y \\ y(1) = 0 \end{cases}$$

a) dire se la funzione $y(t) = \operatorname{sen}(\pi t)$ è soluzione;

b) determinare una soluzione del problema nel caso in cui non lo sia la funzione di cui al punto precedente; oppure, alternativamente

b') calcolare i seguenti integrali

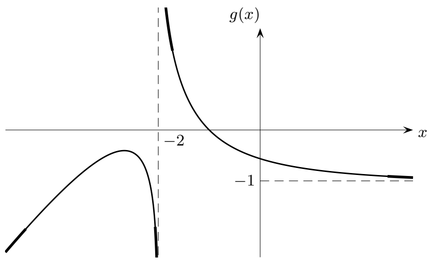
$$\int \left(\frac{2+x^2}{1+x^2} + \frac{3}{\cos^2 x}\right) dx, \qquad \int_0^1 \frac{x}{e^{3x}}\, dx.$$

$\boxed{10}$ Scrivere il polinomio di Taylor di grado 2 di $f(x) = x\cos(2x)$ nel punto $x_0 = \pi/4$.

Soluzioni dei quesiti dell'esame del 11 luglio 2014

$\boxed{1}$ C; $\boxed{2}$ B; $\boxed{3}$ B; $\boxed{4}$ C; $\boxed{5}$ consultare il libro di testo.

$\boxed{6}$ In neretto si evidenziano le informazioni date dai limiti. Il grafico della funzione è quindi completato a piacere (linea sottile), per esempio:



$\boxed{7}$ a) consultare il libro di testo; b) il primo limite è della forma $(\pi/4)/0$, il secondo $0/0$, nel terzo il denominatore non ammette limite. Il teorema si può applicare solamente al secondo limite, per il quale si ha

$$\lim_{x\to 0} \frac{3\,\mathrm{tg}(x^2) - 4\,\mathrm{sen}\,x}{x + \ln(1+2x)} \overset{H}{=} \lim_{x\to 0} \frac{\frac{6x}{\cos^2(x^2)} - 4\cos x}{1 + \frac{2}{1+2x}} = -\frac{4}{3}.$$

$\boxed{8}$ a) La funzione è definita per gli x tali che $x + 2 \neq 0$ cioè $x \neq -2$, perciò il dominio è $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{-2\}$ e la funzione (razionale) è ivi continua e derivabile.

Il denominatore è sempre positivo, il numeratore è ≥ 0 quando $1-x^2 \geq 0$ cioè $-1 \leq x \leq 1$. In definitiva la funzione è positiva in $]-1, 1[$, negativa in $]-\infty, -2[$, in $]-2, -1[$ e in $]1, +\infty[$, mentre si annulla per $x = -1$ e $x = 1$.

b) Ha senso andare a studiare i limiti in -2 e a $\pm\infty$. Si ha

$$\lim_{x\to\pm\infty} g(x) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{1/x^2 - 1}{(1+2/x)^2} = \left[\frac{-1}{1}\right] = -1,$$

$$\lim_{x\to -2} g(x) = \left[\frac{-3}{0^+}\right] = -\infty,$$

quindi la funzione non ammette minimo. Dallo studio dei limiti si evince immediatamente che g ha un asintoto verticale in $x = -2$ e un asintoto orizzontale di equazione $y = -1$ sia per $x \to \infty$ che per $x \to -\infty$.

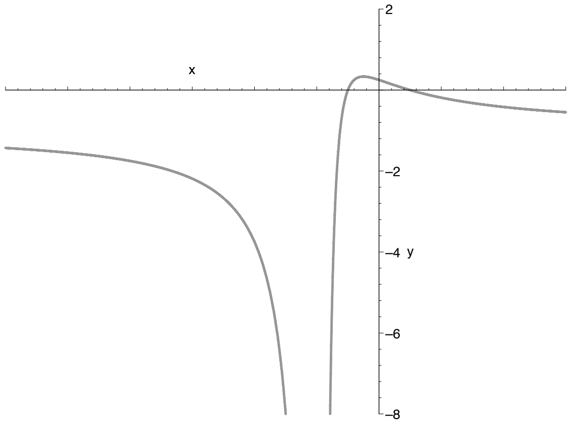
c) La derivata prima di g è

$$g'(x) = \frac{-2x(x+2)^2 - (1-x^2)2(x+2)}{(x+2)^4} = \frac{-2x(x+2) - (1-x^2)2}{(x+2)^3} = \frac{-(4x+2)}{(x+2)^3}.$$

Il numeratore è positivo se $-(4x+2) \geq 0$ ovvero se $x \leq -1/2$, il denominatore è positivo se $(x+2)^3 > 0$ cioè se $x + 2 > 0$ ovvero $x > -2$. In definitiva

$$g'(x) \begin{cases} > 0, & \text{se } x \in]-2, -1/2[, \\ = 0, & \text{se } x = -1/2, \\ < 0, & \text{se } x \in]-\infty, -2[\cup]-1/2, +\infty[, \end{cases}$$

perciò la funzione è crescente in $]-2, -1/2[$, mentre è decrescente in $]-\infty, -2[$ e in $]-1/2, +\infty[$. In $x = -1/2$ ammette un massimo assoluto.



d) La derivata seconda è

$$g''(x) = -\frac{4(x+2)^3 - (4x+2)3(x+2)^2}{(x+2)^6} = -\frac{4(x+2) - (4x+2)3}{(x+2)^4} = \frac{8x-2}{(x+2)^4}.$$

Il numeratore è ≥ 0 se $x \geq 1/4$, mentre il denominatore è sempre positivo nel dominio, quindi

$$g''(x) \begin{cases} < 0, & \text{se } x \in]-\infty,-2[\cup]-2,1/4[, \\ = 0, & \text{se } x = 1/4, \\ > 0, & \text{se } x \in]1/4,+\infty[, \end{cases}$$

perciò la funzione è concava in $]-\infty,-2[$ e in $]-2,1/4[$, mentre è convessa in $]1/4,+\infty[$. In $x = 1/4$ ammette un punto di flesso.

e) L'equazione della retta tangente al grafico nel generico punto $(x_0, g(x_0))$ è

$$y = (x - x_0)g'(x_0) + g(x_0).$$

Poiché $g(0) = 1/4$ e $g'(0) = -1/4$, l'equazione della retta cercata è

$$y = \frac{1}{4} - \frac{x}{4}.$$

9 a) Si ha $y'(t) = \pi\cos(\pi t)$. Sostituendo si ottiene l'equazione

$$\pi\cos(\pi t) = t\,e^{2t}3^{\operatorname{sen}(\pi t)},$$

che non è identicamente soddisfatta per $t \in \mathbb{R}$ (per esempio, se $t = 0$ si ottiene $\pi \neq 0$). La funzione non è dunque soluzione. Si osservi che la funzione soddisfa la seconda condizione $y(1) = 0$.

b) Scrivendo $y' = \frac{dy}{dt}$ e utilizzando il metodo di separazione delle variabili si ha

$$\frac{1}{3^y}\,dy = t\,e^{2t}\,dt \qquad \Longrightarrow \qquad \int 3^{-y}\,dy = \int t\,e^{2t}\,dt.$$

Utilizzando le tabelle si ha facilmente

$$\int 3^{-y}\,dy = -\frac{3^{-y}}{\ln 3},$$

mentre integrando per parti si ottiene

$$\int t\,\mathrm{e}^{2t}\,dt = t\frac{\mathrm{e}^{2t}}{2} - \int \frac{\mathrm{e}^{2t}}{2}\,dt = t\frac{\mathrm{e}^{2t}}{2} - \frac{\mathrm{e}^{2t}}{4},$$

perciò in definitiva

$$-\frac{3^{-y}}{\ln 3} = t\frac{\mathrm{e}^{2t}}{2} - \frac{\mathrm{e}^{2t}}{4} + c,$$

dove c è la generica costante d'integrazione. Risolvendo in y si ottiene

$$3^y = \frac{1}{\left(\frac{\mathrm{e}^{2t}}{4} - t\frac{\mathrm{e}^{2t}}{2} - c\right)\ln 3} \qquad \Longleftrightarrow \qquad y = \log_3\left(\frac{4}{(\mathrm{e}^{2t} - 2t\mathrm{e}^{2t} - 4c)\ln 3}\right).$$

Imponendo la condizione $y(1) = 0$, ad esempio nella prima delle precedenti relazioni, si ottiene

$$1 = \frac{1}{\left(\frac{\mathrm{e}^{2}}{4} - \frac{\mathrm{e}^{2}}{2} - c\right)\ln 3},$$

da cui si ricava $c = -\frac{1}{\ln 3} - \frac{\mathrm{e}^2}{4}$. La soluzione è quindi

$$y(t) = \log_3\left(\frac{4}{(\mathrm{e}^{2t} - 2t\mathrm{e}^{2t} + \mathrm{e}^2)\ln 3 + 4}\right).$$

Alternativamente, si poteva utilizzare direttamente la formula risolutiva per le equazioni a variabili separabili (insieme alla formula fondamentale del calcolo integrale)

$$\begin{aligned}\int_0^y 3^{-z}\,dz = \int_1^t s\,\mathrm{e}^{2s}\,ds \quad &\Longrightarrow \quad \left[-\frac{3^{-z}}{\ln 3}\right]_0^y = \left[s\frac{\mathrm{e}^{2s}}{2} - \frac{\mathrm{e}^{2s}}{4}\right]_1^t \\ &\Longrightarrow \quad -\frac{3^{-y}}{\ln 3} + \frac{1}{\ln 3} = t\frac{\mathrm{e}^{2t}}{2} - \frac{\mathrm{e}^{2t}}{4} - \left(\frac{\mathrm{e}^2}{2} - \frac{\mathrm{e}^2}{4}\right),\end{aligned}$$

che risolta rispetto a y fornisce la soluzione cercata.

b') Dalle tabelle si ottiene

$$\int \left(\frac{2+x^2}{1+x^2} + \frac{3}{\cos^2 x}\right)dx = \int 1\,dx + \int \frac{1}{1+x^2}\,dx + 3\int \frac{1}{\cos^2 x}\,dx = x + \operatorname{arctg} x + 3\operatorname{tg} x + c,$$

con c costante arbitraria. Integrando per parti si ottiene

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{x}{\mathrm{e}^{3x}}\,dx &= \int_0^1 x\,\mathrm{e}^{-3x}\,dx = \left[x\frac{\mathrm{e}^{-3x}}{-3}\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{\mathrm{e}^{-3x}}{-3}\,dx \\ &= -\frac{\mathrm{e}^{-3}}{3} - \left[\frac{\mathrm{e}^{-3x}}{9}\right]_0^1 = -\frac{\mathrm{e}^{-3}}{3} - \frac{\mathrm{e}^{-3}}{9} + \frac{1}{9} = \frac{\mathrm{e}^3 - 4}{9\mathrm{e}^3}.\end{aligned}$$

10 Si ha $f'(x) = \cos(2x) - 2x\operatorname{sen}(2x)$ e $f''(x) = -4\operatorname{sen}(2x) - 4x\cos(2x)$, da cui $f(\pi/4) = 0$, $f'(\pi/4) = -\pi/2$, $f''(\pi/4) = -4$ perciò il polinomio di Taylor cercato è

$$P(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x - x_0)^2 = -\frac{\pi}{2}\left(x - \frac{\pi}{4}\right) - 2\left(x - \frac{\pi}{4}\right)^2.$$