Università degli Studi di Udine — Anno Accademico 2013/2014

Corso di Laurea in Biotecnologie

Modulo di Matematica

Esame del 24/06/2014

N.B.: scrivere nome, cognome e numero di matricola su ogni foglio consegnato.
Tempo a disposizione: 2.5 ore

---

1 Se $\lim_{x\to x_0} f(x) = +\infty$ e $\lim_{x\to x_0} g(x) = -0.1$, allora $\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$

- A vale $-\infty$
- B vale 0^-
- C vale $+\infty$
- D non ci sono elementi sufficienti per rispondere

---

2 Se f è una funzione derivabile due volte in $]a, b[$ e tale che $f''(x) < 0$ per $x \in]a, b[$, allora

- A f è crescente in $]a, b[$
- B f è decrescente in $]a, b[$
- C f non ammette massimo in $]a, b[$
- D nessuna delle precedenti

---

3 L'equazione differenziale $y' = t \ln y - 7t$ è

- A un'equazione lineare del primo ordine
- B un'equazione lineare del secondo ordine
- C un'equazione non lineare del primo ordine
- D un'equazione non lineare del secondo ordine

---

4 La funzione $f(x) = \sqrt[4]{x}$

- A è pari
- B è derivabile nel proprio dominio di definizione
- C è continua in $]\sqrt{2} - 1, 4[$
- D è positiva per $x > 0$ e negativa per $x < 0$

---

5 Scrivere la definizione di derivata di una funzione f in un punto x_0.

---

6 Rappresentare il grafico di una funzione g che verifichi contemporaneamente le seguenti proprietà:

$$\lim_{x\to-\infty} g(x) = 4 \qquad \lim_{x\to 3^-} g(x) = -\infty \qquad \lim_{x\to 3^+} g(x) = -2 \qquad \lim_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$$

---

7 a) Enunciare il Teorema del valore medio di Lagrange;

b) determinare, argomentando, a quali tra le funzioni $f(x) = \ln(x+2)$, $g(x) = 1/(x-1)$, $h(x) = x^2 - |x| + 2$ è possibile applicare il teorema nell'intervallo $[-2, -1]$.

---

8 Data la funzione

$$g(x) = x^3 \ln x$$

a) determinarne il dominio $\mathcal{D}$ e studiarne il segno;

b) calcolare i limiti agli estremi del dominio e determinare gli eventuali asintoti;

c) determinare gli intervalli in cui la funzione è crescente, quelli in cui è decrescente, e gli eventuali punti di massimo/minimo relativo e/o assoluto;

d) trovare gli intervalli in cui la funzione è concava e quelli in cui è convessa;

e) scrivere l'equazione della retta tangente al grafico nel punto di ascissa $x_0 = 2$;

f) disegnare un grafico approssimativo di g.

---

9 Dato il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = \dfrac{y(t^2+2)}{t \ln^2 y} \\ y(1) = \mathrm{e} \end{cases}$$

a) dire se la funzione $y(t) = \mathrm{e}^{2t-1}$ è soluzione del problema per $t \geq 1$;

b) determinare una soluzione del problema nel caso in cui non lo sia la funzione di cui al punto precedente; oppure, alternativamente

b') calcolare i seguenti integrali

$$\int \left(\frac{3x\cos^2 x - 5}{\cos^2 x} - \frac{2^{x+2}}{3^x} \right) dx, \qquad \int_1^{\mathrm{e}^4} \frac{\sqrt{\ln x}}{x}\, dx.$$

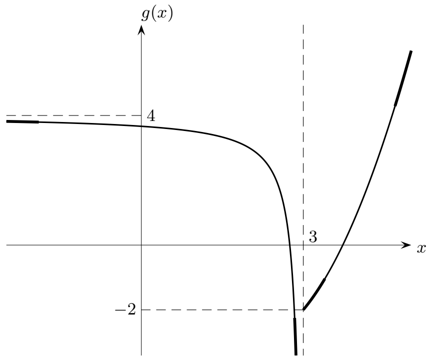
---

10 Calcolare il polinomio di Taylor di grado 2 di $f(x) = \mathrm{e}^{2\,\mathrm{sen}\, x}$ nel punto $x_0 = 0$.

Soluzioni dei quesiti dell'esame del 24 giugno 2014

1 A; **2** D; **3** C; **4** C; **5** consultare il libro di testo.

6 In neretto si evidenziano le informazioni date dai limiti. Il grafico della funzione è quindi completato a piacere (linea sottile), per esempio:



7 a) consultare il libro di testo; b) la funzione $f(x)$ è definita in $]-2,+\infty[$, in particolare non è definita in $x=2$ perciò il teorema non può essere applicato. La funzione $g(x)$ non è definita solamente in $x=1$, esterno all'intervallo $[-2,-1]$; di conseguenza g è ivi definita e derivabile e si può applicare il teorema. Infine $h(x)$ è definita e continua in $\mathbb{R}$ ma derivabile solo in $\mathbb{R}\setminus\{0\}$; essendo 0 esterno all'intervallo $[-2,-1]$ il teorema può essere applicato anche ad h.

8 a) La funzione è definita per $x>0$ perciò il dominio è $\mathcal{D}=\mathbb{R}^+$; la funzione è ivi continua e derivabile. Il fattore x^3 è sempre positivo per $x\in\mathcal{D}$ perciò la funzione è positiva se e solo se $\ln x>0$; in definitiva g è positiva in $]1,+\infty[$, negativa in $]0,1[$ e si annulla in $x=1$.

b) Ha senso andare a studiare i limiti a $+\infty$ e in $x=0$. Si ha

$$\lim_{x\to+\infty} g(x) = [+\infty\cdot+\infty] = +\infty, \qquad \lim_{x\to0^+} g(x) = [0\cdot-\infty] = 0,$$

il secondo essendo un limite notevole (si consulti il libro). In particolare g è illimitata superiormente e non ammette massimo. Banalmente la funzione non ammette asintoti verticali, e poiché

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{g(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} x^2\ln x = +\infty,$$

g non ammette nemmeno asintoti obliqui.

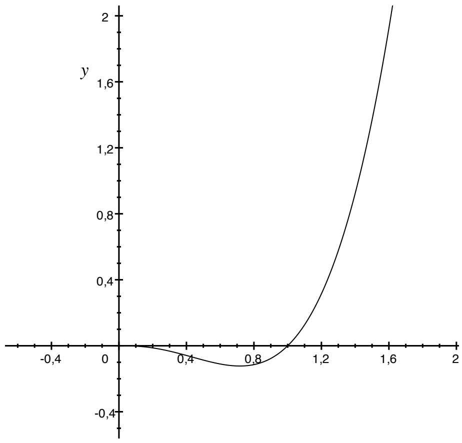
c) La derivata prima è

$$g'(x) = 3x^2\ln x + x^3\frac{1}{x} = x^2(3\ln x+1).$$

Poiché x^2 è sempre positivo in $\mathcal{D}$, si ha che $g'(x)$ è positiva se e solo se $3\ln x+1>0$, da cui

$$g'(x)\begin{cases} >0, & \text{se } x\in\,]\mathrm{e}^{-1/3},+\infty[,\\ =0, & \text{se } x=\mathrm{e}^{-1/3},\\ <0, & \text{se } x\in\,]0,\mathrm{e}^{-1/3}[,\end{cases}$$

perciò la funzione è crescente in $]\mathrm{e}^{-1/3},+\infty[$ mentre è decrescente in $]0,\mathrm{e}^{-1/3}[$. In $x=\mathrm{e}^{-1/3}$ ammette un minimo relativo e assoluto.



e) La derivata seconda è

$$g''(x) = 2x(3\ln x + 1) + x^2\frac{3}{x} = x(6\ln x + 5).$$

Poiché x è sempre positivo in $\mathcal{D}$, si ha che $g'(x)$ è positiva se e solo se $6\ln x + 5 > 0$, da cui

$$g''(x) \begin{cases} > 0, & \text{se } x \in]\mathrm{e}^{-5/6}, +\infty[, \\ = 0, & \text{se } x = \mathrm{e}^{-5/6}, \\ < 0, & \text{se } x \in]0, \mathrm{e}^{-5/6}[, \end{cases}$$

perciò la funzione è concava in $]0, \mathrm{e}^{-5/6}[$, mentre è convessa in $]\mathrm{e}^{-5/6}, +\infty[$; in $x = \mathrm{e}^{-5/6}$ ammette un punto di flesso.

f) L'equazione della retta tangente al grafico nel generico punto $(x_0, g(x_0))$ è

$$y = (x - x_0)g'(x_0) + g(x_0).$$

Poiché $g(2) = 8\ln 2$ e $g'(2) = 4(3\ln 2 + 1)$, l'equazione della retta cercata è

$$y = 4(3\ln 2 + 1)(x - 2) + 8\ln 2.$$

$\boxed{9}$ a) Si ha $y'(t) = 2\mathrm{e}^{2t-1}$. Sostituendo si ottiene l'equazione

$$2\mathrm{e}^{2t-1} = \frac{\mathrm{e}^{2t-1}(t^2+2)}{t\ln^2(\mathrm{e}^{2t-1})} = \frac{\mathrm{e}^{2t-1}(t^2+2)}{t(2t-1)^2}$$

che non è identicamente soddisfatta (per esempio, per $t = 1$ si ottiene $2\mathrm{e} \neq 3\mathrm{e}$). La funzione non è dunque soluzione. Si osservi che la funzione soddisfa invece la seconda condizione $y(1) = \mathrm{e}$.

b) Scrivendo $y' = \frac{dy}{dt}$ e utilizzando il metodo di separazione delle variabili si ha

$$\frac{\ln^2 y}{y}\,dy = \left(t + \frac{2}{t}\right)dt \qquad \Longrightarrow \qquad \int \frac{\ln^2 y}{y}\,dy = \int \left(t + \frac{2}{t}\right)dt = \frac{t^2}{2} + 2\ln t + c.$$

Per quanto concerne il primo integrale, utilizzando le tabelle si ottiene

$$\int \frac{\ln^2 y}{y}\,dy = \int (\ln y)^2(\ln y)'\,dy = \frac{\ln^3 y}{3},$$

da cui segue

$$\frac{\ln^3 y}{3} = \frac{t^2}{2} + 2\ln t + c,$$

con c generica costante d'integrazione. Risolvendo in y si ottiene quindi

$$\ln^3 y = \frac{3}{2}t^2 + 6\ln t + 3c \qquad \Longrightarrow \qquad \ln y = \sqrt[3]{\frac{3}{2}t^2 + 6\ln t + 3c},$$

$$\Longrightarrow \qquad y = \exp\left(\sqrt[3]{\frac{3}{2}t^2 + 6\ln t + 3c}\right).$$

Imponendo la condizione $y(1) = \mathrm{e}$ nella prima delle relazioni sopra si ottiene $1 = \frac{3}{2} + 3c$, da cui si ricava $c = -1/6$. La soluzione è quindi

$$y(t) = \exp\left(\sqrt[3]{\frac{3}{2}t^2 + 6\ln t - \frac{1}{2}}\right).$$

Alternativamente, si poteva utilizzare direttamente la formula risolutiva per le equazioni a variabili separabili (insieme alla formula fondamentale del calcolo integrale)

$$\int_{\mathrm{e}}^{y} \frac{\ln^2 z}{z}\,dz = \int_1^t \left(s + \frac{2}{s}\right) ds \qquad \Longrightarrow \qquad \left[\frac{\ln^3 z}{3}\right]_{\mathrm{e}}^{y} = \left[\frac{s^2}{2} + 2\ln s\right]_1^t$$

$$\Longrightarrow \qquad \frac{\ln^3 y}{3} - \frac{1}{3} = \frac{t^2}{2} + 2\ln t - \frac{1}{2},$$

che risolta rispetto a y fornisce la soluzione cercata.

b') Dalle tabelle si ottiene

$$\int \left(\frac{3x\cos^2 x - 5}{\cos^2 x} - \frac{2^{x+2}}{3^x}\right) dx = \int 3x\,dx - 5\int \frac{1}{\cos^2 x}\,dx - 4\int (2/3)^x\,dx$$

$$= \frac{3}{2}x^2 - 5\operatorname{tg} x - 4\frac{(2/3)^x}{\ln(2/3)} + c,$$

con c costante arbitraria. Per il Teorema fondamentale del calcolo e per la seconda tabella si ha

$$\int_1^{\mathrm{e}^4} \frac{\sqrt{\ln x}}{x}\,dx = \int_1^{\mathrm{e}^4} (\ln x)^{1/2}(\ln x)'\,dx = \left[\frac{(\ln x)^{3/2}}{3/2}\right]_1^{\mathrm{e}^4} = \frac{2}{3}(\ln \mathrm{e}^4)^{3/2} = \frac{2}{3}4^{3/2} = \frac{16}{3}.$$

10 Si ha $f'(x) = \mathrm{e}^{2\,\mathrm{sen}\,x}(2\cos x)$ e

$$f''(x) = \mathrm{e}^{2\,\mathrm{sen}\,x}(2\cos x)^2 - \mathrm{e}^{2\,\mathrm{sen}\,x}2\,\mathrm{sen}\,x = \mathrm{e}^{2\,\mathrm{sen}\,x}(4\cos^2 x - 2\,\mathrm{sen}\,x),$$

da cui $f(0) = 1$, $f'(0) = 2$, $f''(0) = 4$ perciò il polinomio di Taylor cercato è

$$P(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x - x_0)^2 = 1 + 2x + 2x^2.$$