Università degli Studi di Udine — Anno Accademico 2013/2014

Corso di Laurea in Biotecnologie

Modulo di Matematica

Esame del 30/01/2014

N.B.: scrivere nome, cognome e numero di matricola su ogni foglio consegnato.
Tempo a disposizione: 2.5 ore

---

1 Se $\lim_{x\to x_0} f(x) = -\infty$ e $\lim_{x\to x_0} g(x) = -1$, allora $\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$ è

- A $-\infty$
- B $+\infty$
- C 0
- D non ci sono elementi sufficienti per rispondere

---

2 Se f è una funzione derivabile due volte in $]a,b[$ e tale che $f'(x) < 0$ e $f''(x) < 0$ per $x \in]a,b[$, allora

- A f è crescente e concava in $]a,b[$
- B f è decrescente e convessa in $]a,b[$
- C f è crescente e convessa in $]a,b[$
- D f è decrescente e concava in $]a,b[$

---

3 L'equazione differenziale $y'' = \text{sen}(yt) - 5ty'$ è

- A un'equazione lineare del primo ordine
- B un'equazione lineare del secondo ordine
- C un'equazione non lineare del primo ordine
- D un'equazione non lineare del secondo ordine

---

4 La funzione $f(x) = \sqrt[3]{x}$

- A è derivabile in $\mathbb{R}$
- B è integrabile
- C ha come dominio naturale $\mathbb{R}^+$
- D è continua e pari

---

5 a) Scrivere la definizione di primitiva di una funzione f in un intervallo $[a,b]$.

---

6 Rappresentare il grafico di una funzione g che verifichi contemporaneamente le seguenti proprietà:

$$\lim_{x\to-\infty} g(x) = +\infty \qquad \lim_{x\to 2^-} g(x) = +\infty \qquad \lim_{x\to 2^+} g(x) = -\infty \qquad \lim_{x\to+\infty} g(x) = -2$$

---

7 a) Enunciare il Teorema dei due carabinieri

b) per ciascuno dei seguenti casi

$$\frac{2x+1}{3x^2+7} \le f(x) \le \frac{2x^2+5}{x^2+1}, \text{ con } x \to +\infty, \quad \mathrm{e}^{x-3x^2} \le f(x) \le \frac{3x^2+1}{2x^2+x^3}, \text{ con } x \to +\infty$$

applicare il teorema nel caso fosse possibile farlo.

---

8 Data la funzione

$$g(x) = \frac{3-x}{\sqrt{x^2+1}}$$

a) determinarne il dominio $\mathcal{D}$;

b) studiare il segno di g;

c) calcolare i limiti agli estremi del dominio e determinare gli eventuali asintoti;

d) determinare gli intervalli in cui la funzione è crescente, quelli in cui è decrescente, e gli eventuali punti di massimo/minimo relativo;

e) determinare gli intervalli in cui la funzione è concava e quelli in cui è convessa;

f) determinare l'equazione della retta tangente al grafico nel punto di ascissa $x_0 = 1$;

g) disegnare un grafico approssimativo di g

---

9 Dato il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = \dfrac{\sqrt{1+2y^2}}{yt^2} \\ y(1) = 2 \end{cases}$$

a) dire se la funzione $y(t) = (t+1)\mathrm{e}^{2t-2}$ è soluzione del problema per $t > 0$;

b) determinare una soluzione del problema nel caso in cui non lo sia la funzione di cui al punto precedente; oppure, alternativamente

b') calcolare i seguenti integrali

$$\int \Big(\frac{\sqrt[3]{x} - 3x}{x^2} + \frac{2}{3^x} \Big)\, dx, \qquad \int_0^{1/2} \frac{2x+1}{\sqrt{1-x^2}}\, dx.$$

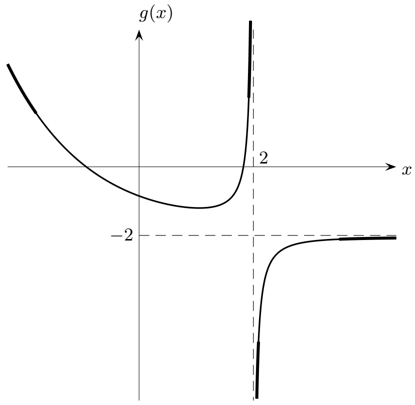
---

10 Calcolare il polinomio di Taylor di grado 2 di $f(x) = (3x+1)\mathrm{e}^{2x}$ nel punto $x_0 = 0$.

Soluzioni dei quesiti dell'esame del 30 gennaio 2014

1 B; **2** D; **3** D; **4** B; **5** consultare il libro di testo.

6 In neretto si evidenziano le informazioni date dai limiti. Il grafico della funzione è quindi completato a piacere (linea sottile), per esempio:



$\boxed{7}$ a) consultare il libro di testo; b) nel primo caso si ha

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{2x+1}{3x^2+7} = \lim_{x\to+\infty} \frac{2+1/x}{x(3+7/x^2)} = 0, \qquad \lim_{x\to+\infty} \frac{2x^2+5}{x^2+1} \lim_{x\to+\infty} \frac{2+5/x^2}{1+/x^2} = 2,$$

e il teorema non può essere applicato, mentre nel secondo

$$\lim_{x\to+\infty} \mathrm{e}^{x-3x^2} = \lim_{x\to+\infty} \mathrm{e}^{x(1-3x)} = \left[\mathrm{e}^{-\infty}\right] = 0, \quad \lim_{x\to+\infty} \frac{3x^2+1}{2x^2+x^3} = \lim_{x\to+\infty} \frac{3+1/x^2}{x(2/x+1)} = 0,$$

per cui $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

$\boxed{8}$ a) La funzione è definita per $x^2+1>0$ che è sempre verificata perciò il dominio è $\mathcal{D} = \mathbb{R}$; la funzione è ivi continua e derivabile. Inoltre g non è funzione né pari né dispari.

b) Il numeratore è positivo se $x \leq 3$, il denominatore è sempre positivo per cui la funzione è positiva per $x < 3$, negativa per $x > 3$ e si annulla in $x = 3$.

c) Ha senso andare a studiare solamente i limiti a $\pm\infty$. Si ha

$$\lim_{x\to\pm\infty} g(x) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x(3/x-1)}{\sqrt{x^2(1+1/x^2)}} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x}{|x|} \cdot \frac{3/x-1}{\sqrt{1+1/x^2}} = [\pm1\cdot(-1)] = \mp1,$$

quindi la retta di equazione $y = 1$ è un asintoto per $x \to -\infty$ mentre quella di equazione $y = -1$ è un asintoto per $x \to +\infty$.

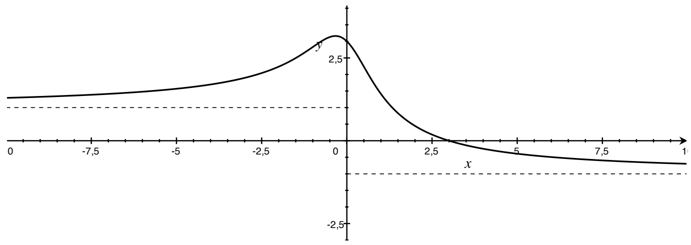
d) La derivata prima è

$$g'(x) = \frac{-\sqrt{x^2+1} - (3-x)\frac{1}{2\sqrt{x^2+1}}2x}{x^2+1} = \frac{-(x^2+1)-(3-x)x}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}} = -\frac{3x+1}{(x^2+1)^{3/2}}.$$

Poiché il denominatore è sempre positivo, la derivata prima è maggiore o uguale a zero se e solo se $3x+1 \leq 0$ cioè $x \leq -1/3$, quindi

$$g'(x) \begin{cases} > 0, & \text{se } x \in]-\infty, -1/3[, \\ = 0, & \text{se } x = -1/3, \\ < 0, & \text{se } x \in]-1/3, +\infty[, \end{cases}$$

perciò la funzione è crescente in $]-\infty, -1/3[$, mentre è decrescente in $]-1/3, +\infty[$. In $x = -1/3$ ammette un massimo relativo e assoluto.



e) La derivata seconda è

$$g''(x) = -\frac{3(x^2+1)^{3/2} - (3x+1)\frac{3}{2}(x^2+1)^{1/2}2x}{(x^2+1)^3}$$
$$= -\frac{3(x^2+1) - (3x+1)3x}{(x^2+1)^{5/2}} = \frac{3(2x^2+x-1)}{(x^2+1)^{5/2}}.$$

Il denominatore è sempre positivo, mentre il numeratore è positivo quando $x \leq -1$ oppure $x \geq 1/2$. In definitiva

$$g''(x) \begin{cases} > 0, & \text{se } x \in]-\infty, -1[\cup]1/2, +\infty[, \\ = 0, & \text{se } x = -1 \text{ oppure } x = 1/2, \\ < 0, & \text{se } x \in]-1, 1/2[, \end{cases}$$

perciò la funzione è convessa in $]-\infty, -1[$ e in $]1/2, +\infty[$, mentre è concava in $]-1, 1/2[$. In $x = -1$ e $x = 1/2$ ammette due punti di flesso.

f) L'equazione della retta tangente al grafico nel generico punto $(x_0, g(x_0))$ è

$$y = (x - x_0)g'(x_0) + g(x_0).$$

Poiché $g(1) = 2/\sqrt{2} = \sqrt{2}$ e $g'(1) = -4/2\sqrt{2} = -\sqrt{2}$, l'equazione della retta cercata è

$$y = -\sqrt{2}(x-1) + \sqrt{2}.$$

$\boxed{\textbf{9}}$ a) Si ha $y'(t) = \mathrm{e}^{2t-2} + 2(t+1)\mathrm{e}^{2t-2} = (2t+3)\mathrm{e}^{2t-2}$. Sostituendo si ottiene l'equazione

$$(2t+3)\mathrm{e}^{2t-2} = \frac{\sqrt{1+2(t+1)^2\mathrm{e}^{4t-4}}}{t^2(t+1)\mathrm{e}^{2t-2}},$$

che non è identicamente soddisfatta per $t > 0$ (per esempio, per $t = 1$ si ottiene $5 \neq 3/2$). La funzione non è dunque soluzione. Si osservi che la funzione soddisfa la seconda condizione $y(1) = 2$.

b) Scrivendo $y' = \frac{dy}{dt}$ e utilizzando il metodo di separazione delle variabili si ha

$$\frac{y}{\sqrt{1+2y^2}}\,dy = \frac{1}{t^2}\,dt \quad \Longrightarrow \quad \int \frac{y}{\sqrt{1+2y^2}}\,dy = \int \frac{1}{t^2}\,dt = -\frac{1}{t} + c.$$

Per quanto concerne il primo integrale, utilizzando le tabelle si ottiene

$$\int \frac{y}{\sqrt{1+2y^2}}\,dy = \frac{1}{4}\int 4y(1+2y^2)^{-1/2}\,dy = \frac{1}{4}\int (1+2y^2)'(1+2y^2)^{-1/2}\,dy = \frac{1}{4}\cdot\frac{(1+2y^2)^{1/2}}{1/2}$$

da cui segue

$$\frac{\sqrt{1+2y^2}}{2} = -\frac{1}{t} + c,$$

con c generica costante d'integrazione. Osservando che $t > 0$ dovrà essere $c > 0$, mentre essendo $y(1) = 2$ si può supporre (almeno per i t vicini a 1) che $y(t) > 0$. Risolvendo in y, per i t per cui $c - 1/t \geq 0$ si ottiene quindi

$$1 + 2y^2 = \Big(2c - \frac{2}{t}\Big)^2 \qquad \Longrightarrow \qquad y = \sqrt{\frac{1}{2}\Big[\Big(2c - \frac{2}{t}\Big)^2 - 1\Big]}.$$

Imponendo la condizione $y(1) = 2$ nella prima delle relazioni sopra si ottiene $\sqrt{9}/2 = -1 + c$, da cui si ricava $c = 5/2$. La soluzione è quindi

$$y(t) = \sqrt{\frac{1}{2}\Big[\Big(5 - \frac{2}{t}\Big)^2 - 1\Big]} = \sqrt{\frac{2}{t^2} - \frac{10}{t} + 12}.$$

Alternativamente, si poteva utilizzare direttamente la formula risolutiva per le equazioni a variabili separabili (insieme alla formula fondamentale del calcolo integrale)

$$\int_2^y \frac{z}{\sqrt{1+2z^2}}\,dz = \int_1^t \frac{1}{s^2}\,ds \qquad \Longrightarrow \qquad \Big[\frac{\sqrt{1+2z^2}}{2}\Big]_2^y = \Big[-\frac{1}{s}\Big]_1^t$$

$$\Longrightarrow \qquad \frac{\sqrt{1+2y^2}}{2} - \frac{3}{2} = 1 - \frac{1}{t},$$

che risolta rispetto a y fornisce la soluzione cercata.

b') Dalle tabelle si ottiene

$$\int \Big(\frac{\sqrt[3]{x} - 3x}{x^2} + \frac{2}{3^x}\Big)\,dx = \int x^{-5/3}\,dx - 3\int \frac{1}{x}\,dx + 2\int (1/3)^x\,dx$$

$$= \frac{x^{-2/3}}{-2/3} - 3\ln|x| + 2\frac{(1/3)^x}{\ln(1/3)} + c = -\frac{3}{2\sqrt[3]{x^2}} - 3\ln|x| - \frac{2}{3^x \ln 3} + c,$$

con c costante arbitraria. Per il Teorema fondamentale del calcolo si ha

$$\int_0^{1/2} \frac{2x+1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \int_0^{1/2} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx - \int_0^{1/2} \frac{-2x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$$

$$= \Big[\operatorname{arcsen} x - 2\sqrt{1-x^2}\Big]_0^{1/2} = \frac{\pi}{6} - 2\sqrt{\frac{3}{4}} + 2 = \frac{\pi}{6} + 2 - \sqrt{3}.$$

10 Si ha $f'(x) = 3e^{2x} + 2(3x+1)e^{2x} = (6x+5)e^{2x}$ e $f''(x) = 6e^{2x} + 2(6x+5)e^{2x} = (12x+16)e^{2x}$ da cui $f(0) = 1$, $f'(0) = 5$, $f''(0) = 16$ perciò il polinomio di Taylor cercato è

$$P(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x - x_0)^2 = 1 + 5x + 8x^2.$$

Appello del 30 gennaio 2014 - Tema B

N.B.: scrivere nome, cognome e numero di matricola su ogni foglio consegnato.
Tempo a disposizione: 2.5 ore

---

1 Se $\lim_{x\to x_0} f(x) = 0$ e $\lim_{x\to x_0} g(x) = -\infty$, allora $\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$ è

- A $-\infty$
- B $+\infty$
- C 0
- D non ci sono elementi sufficienti per rispondere

---

2 Se f è una funzione derivabile in $]a, b[$ e tale che $f''(x_0) = 0$ e $f'(x_0) < 0$ per $x_0 \in]a, b[$, allora

- A x_0 è un punto di minimo relativo
- B x_0 è un punto di massimo relativo
- C x_0 è un punto di flesso
- D nessuna delle precedenti

---

3 L'equazione differenziale $y' = \mathrm{e}^{2t} y \operatorname{sen} t - 1$ è

- A un'equazione lineare del primo ordine
- B un'equazione lineare del secondo ordine
- C un'equazione non lineare del primo ordine
- D un'equazione non lineare del secondo ordine

---

4 Dire quali delle seguenti implicazioni è falsa

- A f derivabile implica f continua
- B f continua implica f derivabile
- C f derivabile implica f integrabile
- D f continua implica f integrabile

---

5 a) Scrivere la definizione di derivata di una funzione f in un punto x_0.

---

6 Rappresentare il grafico di una funzione g che verifichi contemporaneamente le seguenti proprietà:

$$\lim_{x\to-\infty} g(x) = -1 \qquad \lim_{x\to-3^-} g(x) = -\infty \qquad \lim_{x\to-3^+} g(x) = +\infty \qquad \lim_{x\to+\infty} g(x) = -\infty$$

---

7 a) Enunciare il Teorema del valore medio di Lagrange;

b) determinare, argomentando, a quali tra le funzioni $f(x) = \sqrt[3]{x}$, $g(x) = 3\ln(2|x| - 1)$, $h(x) = \frac{2x}{x^2+x+3}$ è possibile applicare il teorema nell'intervallo $[-1, 1]$.

---

8 Data la funzione

$$g(x) = \frac{x-2}{\sqrt{x^2+2}}$$

a) determinarne il dominio $\mathcal{D}$;

b) studiare il segno di g;

c) calcolare i limiti agli estremi del dominio e determinare gli eventuali asintoti;

d) determinare gli intervalli in cui la funzione è crescente, quelli in cui è decrescente, e gli eventuali punti di massimo/minimo relativo;

e) determinare gli intervalli in cui la funzione è concava e quelli in cui è convessa;

f) determinare l'equazione della retta tangente al grafico nel punto di ascissa $x_0 = 1$;

g) disegnare un grafico approssimativo di g

---

9 Dato il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = \dfrac{\sqrt{1+3y^2}}{yt^3} \\ y(1) = 1 \end{cases}$$

a) dire se la funzione $y(t) = te^{3t-3}$ è soluzione del problema per $t > 0$;

b) determinare una soluzione del problema nel caso in cui non lo sia la funzione di cui al punto precedente; oppure, alternativamente

b') calcolare i seguenti integrali

$$\int \left(\frac{x^2+2\sqrt{x}}{3x^3} - \frac{5}{2^x}\right) dx, \qquad \int_0^{1/2} \frac{2-3x}{\sqrt{1-x^2}}\, dx.$$

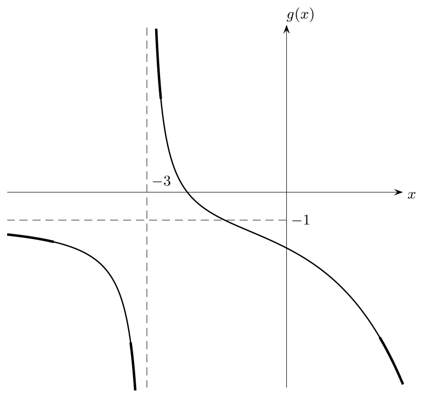
---

10 Calcolare il polinomio di Taylor di grado 2 di $f(x) = (2x-1)\mathrm{e}^{3x}$ nel punto $x_0 = 0$.

Soluzioni dei quesiti dell'esame del 30 gennaio 2014 - Tema B

1 C; **2** D; **3** A; **4** B; **5** consultare il libro di testo.

6 In neretto si evidenziano le informazioni date dai limiti. Il grafico della funzione è quindi completato a piacere (linea sottile), per esempio:



$\boxed{7}$ a) consultare il libro di testo; b) la funzione $f(x)$ è continua in $[-1,1]$ ma è derivabile solo $[-1,1]\setminus\{0\}$, mentre $g(x)$ non è nemmeno definita in $[-1,1]$, avendo come dominio naturale l'insieme $]-\infty,-1/2[\cup]1/2,+\infty[$, perciò il teorema non è applicabile a queste due funzioni. Invece, poiché il denominatore di $h(x)$ non si annulla mai, h è funzione razionale ovunque definita, in particolare in $[-1,1]$, e si può applicare il teorema.

$\boxed{8}$ a) La funzione è definita per $x^2+2>0$ che è sempre verificata perciò il dominio è $\mathcal{D}=\mathbb{R}$; la funzione è ivi continua e derivabile. Inoltre g non è funzione né pari né dispari.

b) Il numeratore è positivo se $x \geq 2$, il denominatore è sempre positivo per cui la funzione è positiva per $x>2$, negativa per $x<2$ e si annulla in $x=2$.

c) Ha senso andare a studiare solamente i limiti a $\pm\infty$. Si ha

$$\lim_{x\to\pm\infty} g(x) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x(1-2/x)}{\sqrt{x^2(1+2/x^2)}} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x}{|x|}\cdot\frac{1-2/x}{\sqrt{1+2/x^2}} = [\pm1\cdot 1] = \pm 1,$$

quindi la retta di equazione $y=-1$ è un asintoto per $x\to-\infty$ mentre quella di equazione $y=1$ è un asintoto per $x\to+\infty$.

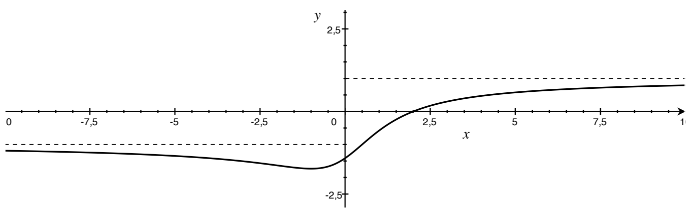
d) La derivata prima è

$$g'(x) = \frac{\sqrt{x^2+2}-(x-2)\frac{1}{2\sqrt{x^2+2}}2x}{x^2+2} = \frac{(x^2+2)-(x-2)x}{(x^2+2)\sqrt{x^2+2}} = \frac{2(x+1)}{(x^2+2)^{3/2}}.$$

Poiché il denominatore è sempre positivo, la derivata prima è maggiore o uguale a zero se e solo se $x+1\geq 0$ cioè $x\geq -1$, quindi

$$g'(x)\begin{cases} <0, & \text{se } x\in]-\infty,-1[,\\ =0, & \text{se } x=-1,\\ >0, & \text{se } x\in]-1,+\infty[,\end{cases}$$

perciò la funzione è decrescente in $]-\infty,-1[$ mentre è crescente in $]-1,+\infty[$. In $x=-1$ ammette un minimo relativo e assoluto.



e) La derivata seconda è

$$\begin{aligned} g''(x) &= 2\frac{(x^2+2)^{3/2}-(x+1)\frac{3}{2}(x^2+2)^{1/2}2x}{(x^2+2)^3}\\ &= 2\frac{(x^2+2)-(x+1)3x}{(x^2+2)^{5/2}} = \frac{-2(2x^2+3x-2)}{(x^2+2)^{5/2}}.\end{aligned}$$

Il denominatore è sempre positivo, mentre il numeratore è positivo quando $-2\leq x\leq 1/2$. In definitiva

$$g''(x)\begin{cases} <0, & \text{se } x\in]-\infty,-2[\cup]1/2,+\infty[,\\ =0, & \text{se } x=-2 \text{ oppure } x=1/2,\\ >0, & \text{se } x\in]-2,1/2[,\end{cases}$$

perciò la funzione è concava in $]-\infty,-2[$ e in $]1/2,+\infty[$, mentre è convessa in $]-2,1/2[$. In $x=-2$ e $x=1/2$ ammette due punti di flesso.

f) L'equazione della retta tangente al grafico nel generico punto $(x_0, g(x_0))$ è

$$y = (x - x_0)g'(x_0) + g(x_0).$$

Poiché $g(1) = -1/\sqrt{3}$ e $g'(1) = 4/(3\sqrt{3})$, l'equazione della retta cercata è

$$y = \frac{4}{3\sqrt{3}}(x-1) - \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

$\boxed{\mathbf{9}}$ a) Si ha $y'(t) = \mathrm{e}^{3t-3} + 3t\mathrm{e}^{3t-3} = (3t+1)\mathrm{e}^{3t-3}$. Sostituendo si ottiene l'equazione

$$(3t+1)\mathrm{e}^{3t-3} = \frac{\sqrt{1+3t^2\mathrm{e}^{6t-6}}}{t^4\mathrm{e}^{3t-3}},$$

che non è identicamente soddisfatta per $t>0$ (per esempio, per $t=1$ si ottiene $4 \neq 2$). La funzione non è dunque soluzione. Si osservi che la funzione soddisfa invece la seconda condizione $y(1)=2$.

b) Scrivendo $y' = \frac{dy}{dt}$ e utilizzando il metodo di separazione delle variabili si ha

$$\frac{y}{\sqrt{1+3y^2}}\,dy = \frac{1}{t^3}\,dt \quad\Longrightarrow\quad \int \frac{y}{\sqrt{1+3y^2}}\,dy = \int \frac{1}{t^3}\,dt = -\frac{1}{2t^2} + c.$$

Per quanto concerne il primo integrale, utilizzando le tabelle si ottiene

$$\int \frac{y}{\sqrt{1+3y^2}}\,dy = \frac{1}{6}\int 6y(1+3y^2)^{-1/2}\,dy = \frac{1}{6}\int (1+3y^2)'(1+3y^2)^{-1/2}\,dy = \frac{1}{6}\cdot\frac{(1+3y^2)^{1/2}}{1/2}$$

da cui segue

$$\frac{\sqrt{1+3y^2}}{3} = -\frac{1}{2t^2} + c,$$

con c generica costante d'integrazione. Osservando che $t>0$ dovrà essere $c>0$, mentre essendo $y(1)=1$ si può supporre (almeno per i t vicini a 1) che $y(t)>0$. Risolvendo in y, per i t per cui $c - 1/(2t^2) \geq 0$ si ottiene quindi

$$1 + 3y^2 = \Big(3c - \frac{3}{2t^2}\Big)^2 \quad\Longrightarrow\quad y = \sqrt{\frac{1}{3}\Big[\Big(3c - \frac{3}{2t^2}\Big)^2 - 1\Big]}.$$

Imponendo la condizione $y(1)=1$ nella prima delle relazioni sopra si ottiene $\sqrt{4}/3 = -1/2 + c$, da cui si ricava $c = 7/6$. La soluzione è quindi

$$y(t) = \sqrt{\frac{1}{3}\Big[\Big(\frac{7}{2} - \frac{3}{2t^2}\Big)^2 - 1\Big]} = \sqrt{\frac{3}{4t^2} - \frac{7}{2t} + \frac{15}{4}}.$$

Alternativamente, si poteva utilizzare direttamente la formula risolutiva per le equazioni a variabili separabili (insieme alla formula fondamentale del calcolo integrale)

$$\int_1^y \frac{z}{\sqrt{1+3z^2}}\,dz = \int_1^t \frac{1}{s^3}\,ds \quad\Longrightarrow\quad \Big[\frac{\sqrt{1+3z^2}}{3}\Big]_1^y = \Big[-\frac{1}{2s^2}\Big]_1^t$$

$$\Longrightarrow\quad \frac{\sqrt{1+3y^2}}{3} - \frac{2}{3} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2t^2},$$

che risolta rispetto a y fornisce la soluzione cercata.

b') Dalle tabelle si ottiene

$$\int \Big(\frac{x^2+2\sqrt{x}}{3x^3} - \frac{5}{2^x}\Big)\,dx = \frac{1}{3}\int \frac{1}{x}\,dx + \frac{2}{3}\int x^{-5/2}\,dx - 5\int (1/2)^x\,dx$$

$$= \frac{1}{3}\ln|x| + \frac{2}{3}\cdot\frac{x^{-3/2}}{-3/2} - 5\frac{(1/2)^x}{\ln(1/2)} + c = \frac{1}{3}\ln|x| - \frac{4}{9\sqrt{x^3}} + \frac{5}{2^x\ln 2} + c,$$

con c costante arbitraria. Per il Teorema fondamentale del calcolo si ha

$$\int_0^{1/2} \frac{2-3x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = 2\int_0^{1/2} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx + \frac{3}{2}\int_0^{1/2} \frac{-2x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$$

$$= \Big[2\operatorname{arcsen} x + 3\sqrt{1-x^2}\Big]_0^{1/2} = \frac{\pi}{3} + 3\sqrt{\frac{3}{4}} - 3 = \frac{\pi}{3} + \frac{3\sqrt{3}}{2} - 3.$$

10 Si ha $f'(x) = 2e^{3x} + 3(2x-1)e^{3x} = (6x-1)e^{3x}$ e $f''(x) = 6e^{3x} + 3(6x-1)e^{3x} = (18x+3)e^{3x}$ da cui $f(0) = -1$, $f'(0) = -1$, $f''(0) = 3$ perciò il polinomio di Taylor cercato è

$$P(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x-x_0)^2 = -1 - x + \frac{3}{2}x^2.$$

Appello del 18 febbraio 2014

N.B.: scrivere nome, cognome e numero di matricola su ogni foglio consegnato.
Tempo a disposizione: 2.5 ore

---

1 Se $\lim_{x\to x_0} f(x)$ non esiste e $\lim_{x\to x_0} g(x) = +\infty$, allora $\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$

- A vale 0
- B non esiste
- C vale $+\infty$
- D non ci sono elementi sufficienti per rispondere

---

2 Se f è una funzione derivabile due volte in $]a,b[$ e tale che $f'(x_0) = 0$ e $f''(x_0) < 0$ per $x_0 \in]a,b[$, allora

- A x_0 è sempre punto di minimo relativo per f
- B x_0 è sempre punto di massimo relativo per f
- C x_0 è sempre punto di flesso relativo per f
- D nessuna delle precedenti

---

3 L'equazione differenziale $y'' = t^2 y' - 5y \operatorname{sen} t$ è

- A un'equazione lineare del primo ordine
- B un'equazione lineare del secondo ordine
- C un'equazione non lineare del primo ordine
- D un'equazione non lineare del secondo ordine

---

4 La funzione $f(x) = \arccos x$

- A è derivabile nel dominio
- B ha immagine uguale a $[-\pi/2, \pi/2]$
- C è integrabile in $[1/4, 1/2]$
- D è continua e pari

---

5 Dare l'interpretazione geometrica della derivata di una funzione f in un punto x_0.

---

6 Rappresentare il grafico di una funzione g che verifichi contemporaneamente le seguenti proprietà:

$$\lim_{x\to-\infty} g(x) = -3 \qquad \lim_{x\to 1^-} g(x) = 2 \qquad \lim_{x\to 1^+} g(x) = +\infty \qquad \lim_{x\to+\infty} g(x) = -\infty$$

7
a) Enunciare il Teorema sul limite delle successioni monotone
b) dire in quali dei seguenti casi è possibile applicarlo

$$a_n = \frac{2n}{n+1}, \qquad b_n = \frac{\operatorname{sen} n}{n}, \qquad c_n = \mathrm{e}^{n^2}.$$

---

8 Data la funzione

$$g(x) = x^3 \mathrm{e}^{1/x}$$

a) determinarne il dominio $\mathcal{D}$ e studiarne il segno;
b) calcolare i limiti agli estremi del dominio e determinare gli eventuali asintoti;
c) determinare gli intervalli in cui la funzione è crescente, quelli in cui è decrescente, e gli eventuali punti di massimo/minimo relativo e/o assoluto;
d) determinare gli intervalli in cui la funzione è concava e quelli in cui è convessa;
e) determinare l'equazione della retta tangente al grafico nel punto di ascissa $x_0 = -1$;
f) disegnare un grafico approssimativo di g.

---

9 Dato il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = t\,\mathrm{e}^{\sqrt{y}}\sqrt{y}(1-2t) \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

a) dire se la funzione $y(t) = \ln^2(\mathrm{e}+t)$ è soluzione del problema;
b) determinare una soluzione del problema nel caso in cui non lo sia la funzione di cui al punto precedente; oppure, alternativamente
b') calcolare i seguenti integrali

$$\int \left(\frac{x^2 - 2\sqrt[4]{x^3}}{x} + \sqrt{\frac{3}{4-x^2}}\right) dx, \qquad \int_1^2 \frac{5x}{\mathrm{e}^{3x^2}}\, dx.$$

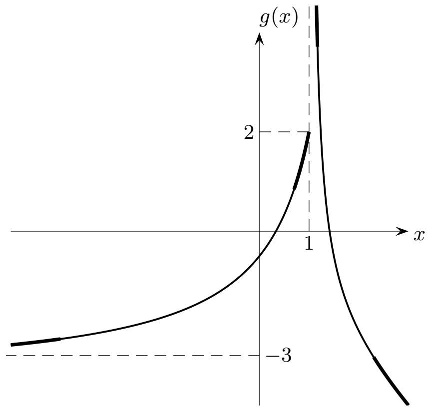
---

10 Calcolare il polinomio di Taylor di grado 2 di $f(x) = \mathrm{e}^{3x}/x$ nel punto $x_0 = 1$.

Soluzioni dei quesiti dell'esame del 18 febbraio 2014

1 D; **2** B; **3** B; **4** C; **5** consultare il libro di testo.

6 In neretto si evidenziano le informazioni date dai limiti. Il grafico della funzione è quindi completato a piacere (linea sottile), per esempio:



7 a) consultare il libro di testo; b) nel primo caso si ha

$$a_n \le a_{n+1} \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{2n}{n+1} < \frac{2(n+1)}{n+2} \quad \Longleftrightarrow \quad n(n+2) < (n+1)^2$$

che è sempre vera; nel secondo caso, a causa del seno, la successione non è monotona, nel terzo è nuovamente monotona, essendo composta di funzioni monotone crescenti. Il teorema si può dunque applicare ad a_n e c_n, non a b_n.

8 a) La funzione è definita per $x \neq 0$ perciò il dominio è $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{0\}$; la funzione è ivi continua e derivabile. Inoltre g non è funzione né pari né dispari.

b) Banalmente la funzione è positiva per $x > 0$, negativa per $x < 0$.

c) Ha senso andare a studiare i limiti a $\pm\infty$ e in $x = 0$. Si ha

$$\lim_{x\to\pm\infty} g(x) = [\pm\infty \cdot 1] = \pm\infty, \qquad \lim_{x\to 0^-} g(x) = \left[0 \cdot \mathrm{e}^{-\infty}\right] = 0,$$

mentre il limite per $x \to 0^+$ si presenta nella forma indeterminata $[0 \cdot (+\infty)]$; con la sostituzione $1/x = y \to +\infty$ diventa

$$\lim_{x\to 0^+} x^3 \mathrm{e}^{1/x} = \lim_{y\to+\infty} \frac{\mathrm{e}^y}{y^3} = +\infty,$$

essendo un limite notevole (in alternativa si può utilizzare de L'Hôpital tre volte consecutivamente). In particolare si noti che f è illimitata inferiormente e superiormente.

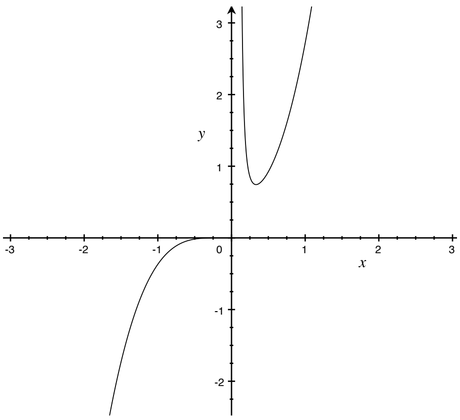
d) La derivata prima è

$$g'(x) = 3x^2\mathrm{e}^{1/x} + x^3\mathrm{e}^{1/x}(-1/x^2) = (3x^2 - x)\mathrm{e}^{1/x} = x(3x-1)\mathrm{e}^{1/x}.$$

Poiché la funzione esponenziale è sempre positiva, si ha

$$g'(x) \begin{cases} > 0, & \text{se } x \in]-\infty, 0[\cup]1/3, +\infty[, \\ = 0, & \text{se } x = 1/3, \\ < 0, & \text{se } x \in]0, 1/3[, \end{cases}$$

perciò la funzione è crescente in $]-\infty, 0[$ e in $]1/3, +\infty[$, mentre è decrescente in $]0, 1/3[$. In $x = 1/3$ ammette un minimo relativo.



e) La derivata seconda è

$$g''(x) = (6x-1)\mathrm{e}^{1/x} + (3x^2 - x)\mathrm{e}^{1/x}(-1/x^2) = \frac{6x^2-4x+1}{x}\mathrm{e}^{1/x}.$$

Il denominatore è positivo se $x > 0$, negativo se $x < 0$, mentre il numeratore è sempre positivo. In definitiva

$$g''(x) \begin{cases} < 0, & \text{se } x \in]-\infty, 0[, \\ > 0, & \text{se } x \in]0, +\infty[, \end{cases}$$

perciò la funzione è concava in $]-\infty, 0[$, mentre è convessa in $]0, +\infty[$.

f) L'equazione della retta tangente al grafico nel generico punto $(x_0, g(x_0))$ è

$$y = (x - x_0)g'(x_0) + g(x_0).$$

Poiché $g(-1) = -\mathrm{e}^{-1} = -1/\mathrm{e}$ e $g'(-1) = 4\mathrm{e}^{-1} = 4/\mathrm{e}$, l'equazione della retta cercata è

$$y = \frac{4}{\mathrm{e}}(x+1) - \frac{1}{\mathrm{e}}.$$

$\boxed{9}$ a) Si ha $y'(t) = 2\frac{\ln(\mathrm{e}+t)}{\mathrm{e}+t}$. Sostituendo si ottiene l'equazione

$$2\frac{\ln(\mathrm{e}+t)}{\mathrm{e}+t} = t\,\mathrm{e}^{|\ln(\mathrm{e}+t)|}|\ln(\mathrm{e}+t)|(1-2t),$$

che non è identicamente soddisfatta (per esempio, per $t = 0$ si ottiene $2/\mathrm{e} \neq 0$). La funzione non è dunque soluzione. Si osservi che la funzione soddisfa invece la seconda condizione $y(0) = 1$.

b) Scrivendo $y' = \frac{dy}{dt}$ e utilizzando il metodo di separazione delle variabili si ha

$$\frac{1}{\sqrt{y}\mathrm{e}^{\sqrt{y}}}\,dy = (t - 2t^2)\,dt \quad \Longrightarrow \quad \int \frac{1}{\sqrt{y}\mathrm{e}^{\sqrt{y}}}\,dy = \int (t-2t^2)\,dt = \frac{t^2}{2} - \frac{2t^3}{3} + c.$$

Per quanto concerne il primo integrale, utilizzando le tabelle si ottiene

$$\int \frac{1}{\sqrt{y}\mathrm{e}^{\sqrt{y}}}\,dy = -2\int \frac{\mathrm{e}^{-\sqrt{y}}}{-2\sqrt{y}}\,dy = -2\int (-\sqrt{y})'\mathrm{e}^{-\sqrt{y}}\,dy = -2\mathrm{e}^{-\sqrt{y}},$$

da cui segue

$$-2\mathrm{e}^{-\sqrt{y}} = \frac{t^2}{2} - \frac{2t^3}{3} + c,$$

con c generica costante d'integrazione. Risolvendo in y si ottiene quindi

$$\mathrm{e}^{-\sqrt{y}} = \frac{t^3}{3} - \frac{t^2}{4} - \frac{c}{2} \quad \Longrightarrow \quad -\sqrt{y} = \ln\Big(\frac{t^3}{3} - \frac{t^2}{4} - \frac{c}{2}\Big) \quad \Longrightarrow \quad y = \ln^2\Big(\frac{t^3}{3} - \frac{t^2}{4} - \frac{c}{2}\Big).$$

Imponendo la condizione $y(0) = 1$ nella prima delle relazioni sopra si ottiene $\mathrm{e}^{-1} = -c/2$, da cui si ricava $c = -2/\mathrm{e}$. La soluzione è quindi

$$y(t) = \ln^2\Big(\frac{t^3}{3} - \frac{t^2}{4} + \frac{1}{\mathrm{e}}\Big).$$

Alternativamente, si poteva utilizzare direttamente la formula risolutiva per le equazioni a variabili separabili (insieme alla formula fondamentale del calcolo integrale)

$$\int_1^y \frac{1}{\sqrt{z}\mathrm{e}^{\sqrt{z}}}\,dz = \int_0^t (s - 2s^2)\,ds \quad \Longrightarrow \quad \Big[-2\mathrm{e}^{-\sqrt{z}}\Big]_1^y = \Big[\frac{s^2}{2} - \frac{2s^3}{3}\Big]_0^t$$
$$\Longrightarrow \quad -2\mathrm{e}^{-\sqrt{y}} + 2\mathrm{e}^{-1} = \frac{t^2}{2} - \frac{2t^3}{3},$$

che risolta rispetto a y fornisce la soluzione cercata.

b') Dalle tabelle si ottiene

$$\int \Big(\frac{x^2 - 2\sqrt[4]{x^3}}{x} + \sqrt{\frac{3}{4-x^2}}\Big)\,dx = \int x\,dx - 2\int x^{-1/4}\,dx + \sqrt{3}\int \frac{1}{\sqrt{4-x^2}}\,dx$$
$$= \frac{x^2}{2} - 2\frac{x^{3/4}}{3/4} + \sqrt{3}\,\mathrm{arcsen}(x/2) + c = \frac{x^2}{2} - \frac{8}{3}\sqrt[4]{x^3} + \sqrt{3}\,\mathrm{arcsen}(x/2) + c,$$

con c costante arbitraria. Per il Teorema fondamentale del calcolo si ha

$$\int_1^2 \frac{5x}{\mathrm{e}^{3x^2}}\,dx = -\frac{5}{6}\int_1^2 (-3x^2)'\mathrm{e}^{-3x^2}\,dx = -\frac{5}{6}\Big[\mathrm{e}^{-3x^2}\Big]_1^2 = \frac{5}{6}(\mathrm{e}^{-3} - \mathrm{e}^{-12}) = \frac{5(\mathrm{e}^9 - 1)}{6\mathrm{e}^{12}}.$$

10 Si ha

$$f'(x) = \frac{3\mathrm{e}^{3x}}{x} - \frac{\mathrm{e}^{3x}}{x^2}, \qquad f''(x) = \frac{9\mathrm{e}^{3x}}{x} - 6\frac{\mathrm{e}^{3x}}{x^2} + 2\frac{\mathrm{e}^{3x}}{x^3},$$

da cui $f(1) = \mathrm{e}^3$, $f'(1) = 2\mathrm{e}^3$, $f''(1) = 5\mathrm{e}^3$ perciò il polinomio di Taylor cercato è

$$P(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x - x_0)^2 = \mathrm{e}^3 + 2\mathrm{e}^3(x-1) + \frac{5}{2}\mathrm{e}^3(x-1)^2.$$

Appello del 18 febbraio 2014 - Tema B

N.B.: scrivere nome, cognome e numero di matricola su ogni foglio consegnato.
Tempo a disposizione: 2.5 ore

---

1 Se $\lim_{x\to x_0} f(x) = -\infty$ e $\lim_{x\to x_0} g(x)$ non esiste, allora $\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$

- A vale $-\infty$
- B vale 0
- C non esiste
- D non ci sono elementi sufficienti per rispondere

---

2 Se f è una funzione derivabile due volte in $]a,b[$ e tale che $f''(x_0)=0$ e $f'(x_0)>0$ per $x_0 \in]a,b[$, allora

- A x_0 è sempre punto di minimo relativo per f
- B x_0 è sempre punto di massimo relativo per f
- C x_0 è sempre punto di flesso relativo per f
- D nessuna delle precedenti

---

3 L'equazione differenziale $y' = 5t - \ln(2t+y)$ è

- A un'equazione lineare del primo ordine
- B un'equazione lineare del secondo ordine
- C un'equazione non lineare del primo ordine
- D un'equazione non lineare del secondo ordine

---

4 La funzione $f(x) = \operatorname{arctg} x$

- A è continua e pari
- B è limitata
- C è positiva in $[-1,1]$
- D non è derivabile in $x=1$ e $x=-1$

---

5 Dare la definizione di integrale indefinito di una funzione f in un intervallo I.

---

6 Rappresentare il grafico di una funzione g che verifichi contemporaneamente le seguenti proprietà:

$$\lim_{x\to-\infty} g(x) = 0 \qquad \lim_{x\to 3^-} g(x) = -\infty \qquad \lim_{x\to 3^+} g(x) = 4 \qquad \lim_{x\to+\infty} g(x) = 0$$

7
a) Enunciare il Teorema del confronto per i limiti
b) dire in quali dei seguenti casi è possibile applicarlo

$$i)\ f(x) = \cos x,\ g(x) = 2 + x^2,\ \text{per } x \to +\infty$$

$$ii)\ f(x) = \frac{\operatorname{sen} x}{x},\ g(x) = \frac{1}{2x},\ \text{per } x \to +\infty$$

$$iii)\ f(x) = \frac{x^2}{x^2+1},\ g(x) = \frac{2x^2+5}{x^2+2},\ \text{per } x \to +\infty$$

---

8 Data la funzione

$$g(x) = x^5 \mathrm{e}^{-1/x}$$

a) determinarne il dominio $\mathcal{D}$ e studiarne il segno;
b) calcolare i limiti agli estremi del dominio e determinare gli eventuali asintoti;

c) determinare gli intervalli in cui la funzione è crescente, quelli in cui è decrescente, e gli eventuali punti di massimo/minimo relativo e/o assoluto;

d) determinare gli intervalli in cui la funzione è concava e quelli in cui è convessa;

e) determinare l'equazione della retta tangente al grafico nel punto di ascissa $x_0 = -1$;

f) disegnare un grafico approssimativo di g.

---

9 Dato il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = t\,\mathrm{e}^{\sqrt{y}}\sqrt{y}(2-5t) \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

a) dire se la funzione $y(t) = \ln^2(\mathrm{e} - t)$ è soluzione del problema;

b) determinare una soluzione del problema nel caso in cui non lo sia la funzione di cui al punto precedente; oppure, alternativamente

b') calcolare i seguenti integrali

$$\int \Big(\frac{\sqrt[3]{x} - 4x^7}{x^2} + \sqrt{\frac{5}{9-x^2}}\Big)\,dx, \qquad \int_1^2 \frac{3x}{\mathrm{e}^{2x^2}}\,dx.$$

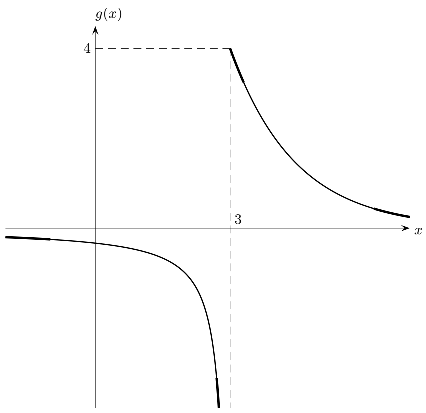
---

10 Calcolare il polinomio di Taylor di grado 2 di $f(x) = \mathrm{e}^{2x}/x$ nel punto $x_0 = -1$.

Soluzioni dei quesiti dell'esame del 18 febbraio 2014 - Tema B

1 D; **2** D; **3** C; **4** B; **5** consultare il libro di testo.

6 In neretto si evidenziano le informazioni date dai limiti. Il grafico della funzione è quindi completato a piacere (linea sottile), per esempio:



7 a) consultare il libro di testo; b) nel primo caso si ha $f(x) \leq 1 < 2 + x^2 = g(x)$, tuttavia il limite di f non esiste e non si può applicare il teorema. Nel secondo caso non si ha $f(x) \leq g(x)$ e nemmeno $f(x) \geq g(x)$ per ogni x grande; infatti g è sempre positiva mentre $f(\pi/2 + 2\pi n) = 1/(\pi/2 + 2\pi n) > 1/(\pi + \pi n) = g(\pi/2 + 2\pi n)$ e $f(3\pi/2 + 2\pi n) = -1/(3\pi/2 + 2\pi n) < g(3\pi/2 + 2\pi n)$. Anche in questo caso il teorema non può essere applicato; tuttavia si noti che i limiti esistono e sono uguali a 0. Nel terzo caso si ha

$$\frac{x^2}{x^2+1} \leq \frac{2x^2+5}{x^2+2} \quad \Longleftrightarrow \quad x^2(x^2+2) < (2x^2+5)(x^2+1) \quad \Longleftrightarrow \quad 0 < 3x^4 + 5x^2 + 5$$

che è sempre vera, perciò $f(x) \leq g(x)$; inoltre entrambi i limiti di f e g per $x \to +\infty$ esistono, il primo uguale a 1, il secondo uguale a 2, dunque si può applicare il teorema.

8 a) La funzione è definita per $x \neq 0$ perciò il dominio è $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{0\}$; la funzione è ivi continua e derivabile. Inoltre g non è funzione né pari né dispari.

b) Banalmente la funzione è positiva per $x > 0$, negativa per $x < 0$.

c) Ha senso andare a studiare i limiti a $\pm\infty$ e in $x = 0$. Si ha

$$\lim_{x \to \pm\infty} g(x) = [\pm\infty \cdot 1] = \pm\infty, \qquad \lim_{x \to 0^+} g(x) = \left[0 \cdot \mathrm{e}^{-\infty}\right] = 0,$$

mentre il limite per $x \to 0^-$ si presenta nella forma indeterminata $[0 \cdot (+\infty)]$; con la sostituzione $-1/x = y \to +\infty$ diventa

$$\lim_{x \to 0^-} x^5 \mathrm{e}^{-1/x} = \lim_{y \to +\infty} -\frac{\mathrm{e}^y}{y^5} = -\infty,$$

essendo un limite notevole (in alternativa si può utilizzare de L'Hôpital cinque volte consecutivamente). In particolare si noti che f è illimitata inferiormente e superiormente.

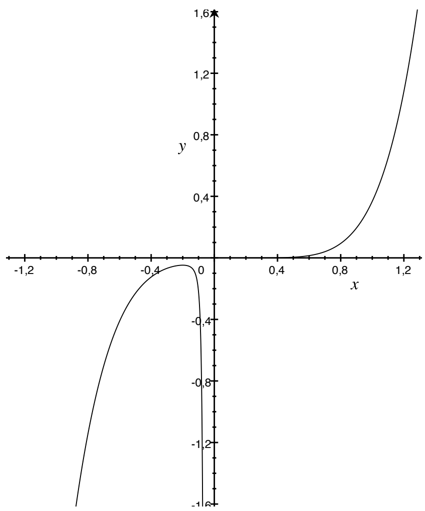
d) La derivata prima è

$$g'(x) = 5x^4 \mathrm{e}^{-1/x} + x^5 \mathrm{e}^{-1/x}(1/x^2) = (5x^4 + x^3)\mathrm{e}^{-1/x} = x^3(5x+1)\mathrm{e}^{-1/x}.$$

Poiché la funzione esponenziale è sempre positiva, si ha

$$g'(x) \begin{cases} > 0, & \text{se } x \in]-\infty, -1/5[\cup]0, +\infty[, \\ = 0, & \text{se } x = -1/5, \\ < 0, & \text{se } x \in]-1/5, 0[, \end{cases}$$

perciò la funzione è crescente in $]-\infty, -1/5[$ e in $]0, +\infty[$, mentre è decrescente in $]-1/5, 0[$. In $x = -1/5$ ammette un massimo relativo.



e) La derivata seconda è

$$g''(x) = (20x^3 + 3x^2)\mathrm{e}^{-1/x} + (5x^4 + x^3)\mathrm{e}^{-1/x}(1/x^2) = x(20x^2 + 8x + 1)\mathrm{e}^{-1/x}.$$

Poiché $20x^2 + 8x + 1 > 0$ per ogni x, si ha

$$g''(x) \begin{cases} < 0, & \text{se } x \in]-\infty, 0[, \\ > 0, & \text{se } x \in]0, +\infty[, \end{cases}$$

perciò la funzione è concava in $]-\infty, 0[$, mentre è convessa in $]0, +\infty[$.
f) L'equazione della retta tangente al grafico nel generico punto $(x_0, g(x_0))$ è

$$y = (x - x_0)g'(x_0) + g(x_0).$$

Poiché $g(-1) = -\mathrm{e}$ e $g'(-1) = 4\mathrm{e}$, l'equazione della retta cercata è

$$y = 4\mathrm{e}(x+1) - \mathrm{e}.$$

$\boxed{\mathbf{9}}$ a) Si ha $y'(t) = -2\frac{\ln(\mathrm{e}-t)}{\mathrm{e}-t}$. Sostituendo si ottiene l'equazione

$$-2\frac{\ln(\mathrm{e}-t)}{\mathrm{e}-t} = t\,\mathrm{e}^{|\ln(\mathrm{e}-t)|}|\ln(\mathrm{e}-t)|(2-5t),$$

che non è identicamente soddisfatta (per esempio, per $t = 0$ si ottiene $-2/\mathrm{e} \neq 0$). La funzione non è dunque soluzione. Si osservi che la funzione soddisfa invece la seconda condizione $y(0) = 1$.
b) Scrivendo $y' = \frac{dy}{dt}$ e utilizzando il metodo di separazione delle variabili si ha

$$\frac{1}{\sqrt{y}\mathrm{e}^{\sqrt{y}}}\,dy = (2t - 5t^2)\,dt \qquad \Longrightarrow \qquad \int \frac{1}{\sqrt{y}\mathrm{e}^{\sqrt{y}}}\,dy = \int (2t-5t^2)\,dt = t^2 - \frac{5t^3}{3} + c.$$

Per quanto concerne il primo integrale, utilizzando le tabelle si ottiene

$$\int \frac{1}{\sqrt{y}\mathrm{e}^{\sqrt{y}}}\,dy = -2\int \frac{\mathrm{e}^{-\sqrt{y}}}{-2\sqrt{y}}\,dy = -2\int (-\sqrt{y})'\mathrm{e}^{-\sqrt{y}}\,dy = -2\mathrm{e}^{-\sqrt{y}},$$

da cui segue

$$-2\mathrm{e}^{-\sqrt{y}} = t^2 - \frac{5t^3}{3} + c,$$

con c generica costante d'integrazione. Risolvendo in y si ottiene quindi

$$\mathrm{e}^{-\sqrt{y}} = \frac{5t^3}{6} - \frac{t^2}{2} - \frac{c}{2} \qquad \Longrightarrow \qquad -\sqrt{y} = \ln\Big(\frac{5t^3}{6} - \frac{t^2}{2} - \frac{c}{2}\Big) \qquad \Longrightarrow \qquad y = \ln^2\Big(\frac{5t^3}{6} - \frac{t^2}{2} - \frac{c}{2}\Big).$$

Imponendo la condizione $y(0) = 1$ nella prima delle relazioni sopra si ottiene $\mathrm{e}^{-1} = -c/2$, da cui si ricava $c = -2/\mathrm{e}$. La soluzione è quindi

$$y(t) = \ln^2\Big(\frac{5t^3}{6} - \frac{t^2}{2} + \frac{1}{\mathrm{e}}\Big).$$

Alternativamente, si poteva utilizzare direttamente la formula risolutiva per le equazioni a variabili separabili (insieme alla formula fondamentale del calcolo integrale)

$$\int_1^y \frac{1}{\sqrt{z}\mathrm{e}^{\sqrt{z}}}\,dz = \int_0^t (2s-5s^2)\,ds \qquad \Longrightarrow \qquad \Big[-2\mathrm{e}^{-\sqrt{z}}\Big]_1^y = \Big[s^2 - \frac{5s^3}{3}\Big]_0^t$$

$$\Longrightarrow \qquad -2\mathrm{e}^{-\sqrt{y}} + 2\mathrm{e}^{-1} = t^2 - \frac{5t^3}{3},$$

che risolta rispetto a y fornisce la soluzione cercata.
b') Dalle tabelle si ottiene

$$\int \Big(\frac{\sqrt[3]{x} - 4x^7}{x^2} + \sqrt{\frac{5}{9-x^2}}\Big)\,dx = \int x^{-5/3}\,dx - 4\int x^5\,dx + \sqrt{5}\int \frac{1}{\sqrt{9-x^2}}\,dx$$

$$= \frac{x^{-2/3}}{-2/3} - 4\frac{x^6}{6} + \sqrt{5}\,\mathrm{arcsen}(x/3) + c = -\frac{3}{2\sqrt[3]{x^2}} - \frac{2}{3}x^6 + \sqrt{5}\,\mathrm{arcsen}(x/3) + c,$$

con c costante arbitraria. Per il Teorema fondamentale del calcolo si ha

$$\int_1^2 \frac{3x}{\mathrm{e}^{2x^2}}\,dx = -\frac{3}{4}\int_1^2 (-2x^2)'\mathrm{e}^{-2x^2}\,dx = -\frac{3}{4}\Big[\mathrm{e}^{-2x^2}\Big]_1^2 = \frac{3}{4}(\mathrm{e}^{-2} - \mathrm{e}^{-8}) = \frac{3(\mathrm{e}^6 - 1)}{4\mathrm{e}^8}.$$

10 Si ha

$$f'(x) = \frac{2e^{2x}}{x} - \frac{e^{2x}}{x^2}, \qquad f''(x) = \frac{4e^{2x}}{x} - 4\frac{e^{2x}}{x^2} + 2\frac{e^{2x}}{x^3},$$

da cui $f(-1) = -e^{-2} = -1/e^2$, $f'(-1) = -3/e^2$, $f''(1) = -10/e^2$ perciò il polinomio di Taylor cercato è

$$P(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x - x_0)^2 = -\frac{1}{e^2} - \frac{3}{e^2}(x + 1) - \frac{10}{2e^2}(x + 1)^2.$$

Appello del 24 giugno 2014

N.B.: scrivere nome, cognome e numero di matricola su ogni foglio consegnato.
Tempo a disposizione: 2.5 ore

---

1 Se $\lim_{x\to x_0} f(x) = +\infty$ e $\lim_{x\to x_0} g(x) = -0.1$, allora $\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$

- A vale $-\infty$
- B vale 0^-
- C vale $+\infty$
- D non ci sono elementi sufficienti per rispondere

---

2 Se f è una funzione derivabile due volte in $]a, b[$ e tale che $f''(x) < 0$ per $x \in]a, b[$, allora

- A f è crescente in $]a, b[$
- B f è decrescente in $]a, b[$
- C f non ammette massimo in $]a, b[$
- D nessuna delle precedenti

---

3 L'equazione differenziale $y' = t \ln y - 7t$ è

- A un'equazione lineare del primo ordine
- B un'equazione lineare del secondo ordine
- C un'equazione non lineare del primo ordine
- D un'equazione non lineare del secondo ordine

---

4 La funzione $f(x) = \sqrt[4]{x}$

- A è pari
- B è derivabile nel proprio dominio di definizione
- C è continua in $]\sqrt{2} - 1, 4[$
- D è positiva per $x > 0$ e negativa per $x < 0$

---

5 Scrivere la definizione di derivata di una funzione f in un punto x_0.

---

6 Rappresentare il grafico di una funzione g che verifichi contemporaneamente le seguenti proprietà:

$$\lim_{x\to-\infty} g(x) = 4 \qquad \lim_{x\to3^-} g(x) = -\infty \qquad \lim_{x\to3^+} g(x) = -2 \qquad \lim_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$$

7
a) Enunciare il Teorema del valore medio di Lagrange;
b) determinare, argomentando, a quali tra le funzioni $f(x) = \ln(x+2)$, $g(x) = 1/(x-1)$, $h(x) = x^2 - |x| + 2$ è possibile applicare il teorema nell'intervallo $[-2,-1]$.

---

8 Data la funzione

$$g(x) = x^3 \ln x$$

a) determinarne il dominio $\mathcal{D}$ e studiarne il segno;
b) calcolare i limiti agli estremi del dominio e determinare gli eventuali asintoti;
c) determinare gli intervalli in cui la funzione è crescente, quelli in cui è decrescente, e gli eventuali punti di massimo/minimo relativo e/o assoluto;
d) trovare gli intervalli in cui la funzione è concava e quelli in cui è convessa;
e) scrivere l'equazione della retta tangente al grafico nel punto di ascissa $x_0 = 2$;
f) disegnare un grafico approssimativo di g.

---

9 Dato il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = \dfrac{y(t^2+2)}{t\ln^2 y} \\ y(1) = \mathrm{e} \end{cases}$$

a) dire se la funzione $y(t) = \mathrm{e}^{2t-1}$ è soluzione del problema per $t \geq 1$;
b) determinare una soluzione del problema nel caso in cui non lo sia la funzione di cui al punto precedente; oppure, alternativamente
b') calcolare i seguenti integrali

$$\int \left(\frac{3x\cos^2 x - 5}{\cos^2 x} - \frac{2^{x+2}}{3^x} \right) dx, \qquad \int_1^{\mathrm{e}^4} \frac{\sqrt{\ln x}}{x}\, dx.$$

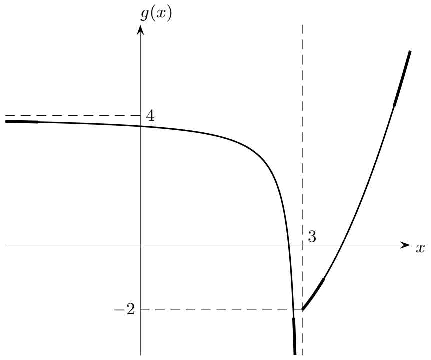
---

10 Calcolare il polinomio di Taylor di grado 2 di $f(x) = \mathrm{e}^{2\,\mathrm{sen}\,x}$ nel punto $x_0 = 0$.

Soluzioni dei quesiti dell'esame del 24 giugno 2014

1 A; **2** D; **3** C; **4** C; **5** consultare il libro di testo.

6 In neretto si evidenziano le informazioni date dai limiti. Il grafico della funzione è quindi completato a piacere (linea sottile), per esempio:



$\boxed{7}$ a) consultare il libro di testo; b) la funzione $f(x)$ è definita in $]-2,+\infty[$, in particolare non è definita in $x=2$ perciò il teorema non può essere applicato. La funzione $g(x)$ non è definita solamente in $x=1$, esterno all'intervallo $[-2,-1]$; di conseguenza g è ivi definita e derivabile e si può applicare il teorema. Infine $h(x)$ è definita e continua in $\mathbb{R}$ ma derivabile solo in $\mathbb{R}\setminus\{0\}$; essendo 0 esterno all'intervallo $[-2,-1]$ il teorema può essere applicato anche ad h.

$\boxed{8}$ a) La funzione è definita per $x>0$ perciò il dominio è $\mathcal{D}=\mathbb{R}^+$; la funzione è ivi continua e derivabile. Il fattore x^3 è sempre positivo per $x\in\mathcal{D}$ perciò la funzione è positiva se e solo se $\ln x>0$; in definitiva g è positiva in $]1,+\infty[$, negativa in $]0,1[$ e si annulla in $x=1$.

b) Ha senso andare a studiare i limiti a $+\infty$ e in $x=0$. Si ha

$$\lim_{x\to+\infty} g(x)=[+\infty\cdot+\infty]=+\infty,\qquad \lim_{x\to0^+} g(x)=[0\cdot-\infty]=0,$$

il secondo essendo un limite notevole (si consulti il libro). In particolare g è illimitata superiormente e non ammette massimo. Banalmente la funzione non ammette asintoti verticali, e poiché

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{g(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty} x^2\ln x=+\infty,$$

g non ammette nemmeno asintoti obliqui.

c) La derivata prima è

$$g'(x)=3x^2\ln x+x^3\frac{1}{x}=x^2(3\ln x+1).$$

Poiché x^2 è sempre positivo in $\mathcal{D}$, si ha che $g'(x)$ è positiva se e solo se $3\ln x+1>0$, da cui

$$g'(x)\begin{cases}>0, & \text{se } x\in\,]\mathrm{e}^{-1/3},+\infty[,\\ =0, & \text{se } x=\mathrm{e}^{-1/3},\\ <0, & \text{se } x\in\,]0,\mathrm{e}^{-1/3}[,\end{cases}$$

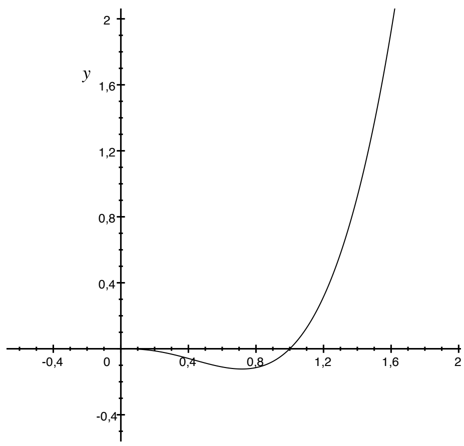
perciò la funzione è crescente in $]\mathrm{e}^{-1/3},+\infty[$ mentre è decrescente in $]0,\mathrm{e}^{-1/3}[$. In $x=\mathrm{e}^{-1/3}$ ammette un minimo relativo e assoluto. e) La derivata seconda è

$$g''(x)=2x(3\ln x+1)+x^2\frac{3}{x}=x(6\ln x+5).$$

Poiché x è sempre positivo in $\mathcal{D}$, si ha che $g'(x)$ è positiva se e solo se $6\ln x+5>0$, da cui

$$g''(x)\begin{cases}>0, & \text{se } x\in\,]\mathrm{e}^{-5/6},+\infty[,\\ =0, & \text{se } x=\mathrm{e}^{-5/6},\\ <0, & \text{se } x\in\,]0,\mathrm{e}^{-5/6}[,\end{cases}$$

perciò la funzione è concava in $]0,\mathrm{e}^{-5/6}[$, mentre è convessa in $]\mathrm{e}^{-5/6},+\infty[$; in $x=\mathrm{e}^{-5/6}$ ammette un punto di flesso.



f) L'equazione della retta tangente al grafico nel generico punto $(x_0, g(x_0))$ è

$$y = (x - x_0)g'(x_0) + g(x_0).$$

Poiché $g(2) = 8\ln 2$ e $g'(2) = 4(3\ln 2 + 1)$, l'equazione della retta cercata è

$$y = 4(3\ln 2 + 1)(x - 2) + 8\ln 2.$$

$\boxed{\mathbf{9}}$ a) Si ha $y'(t) = 2\mathrm{e}^{2t-1}$. Sostituendo si ottiene l'equazione

$$2\mathrm{e}^{2t-1} = \frac{\mathrm{e}^{2t-1}(t^2+2)}{t\ln^2(\mathrm{e}^{2t-1})} = \frac{\mathrm{e}^{2t-1}(t^2+2)}{t(2t-1)^2}$$

che non è identicamente soddisfatta (per esempio, per $t = 1$ si ottiene $2\mathrm{e} \neq 3\mathrm{e}$). La funzione non è dunque soluzione. Si osservi che la funzione soddisfa invece la seconda condizione $y(1) = \mathrm{e}$.
b) Scrivendo $y' = \frac{dy}{dt}$ e utilizzando il metodo di separazione delle variabili si ha

$$\frac{\ln^2 y}{y}\,dy = \Big(t + \frac{2}{t}\Big)\,dt \qquad \Longrightarrow \qquad \int \frac{\ln^2 y}{y}\,dy = \int \Big(t + \frac{2}{t}\Big)\,dt = \frac{t^2}{2} + 2\ln t + c.$$

Per quanto concerne il primo integrale, utilizzando le tabelle si ottiene

$$\int \frac{\ln^2 y}{y}\,dy = \int (\ln y)^2(\ln y)'\,dy = \frac{\ln^3 y}{3},$$

da cui segue

$$\frac{\ln^3 y}{3} = \frac{t^2}{2} + 2\ln t + c,$$

con c generica costante d'integrazione. Risolvendo in y si ottiene quindi

$$\ln^3 y = \frac{3}{2}t^2 + 6\ln t + 3c \qquad \Longrightarrow \qquad \ln y = \sqrt[3]{\frac{3}{2}t^2 + 6\ln t + 3c},$$

$$\Longrightarrow \qquad y = \exp\left(\sqrt[3]{\frac{3}{2}t^2 + 6\ln t + 3c}\right).$$

Imponendo la condizione $y(1) = \mathrm{e}$ nella prima delle relazioni sopra si ottiene $1 = \frac{3}{2} + 3c$, da cui si ricava $c = -1/6$. La soluzione è quindi

$$y(t) = \exp\left(\sqrt[3]{\frac{3}{2}t^2 + 6\ln t - \frac{1}{2}}\right).$$

Alternativamente, si poteva utilizzare direttamente la formula risolutiva per le equazioni a variabili separabili (insieme alla formula fondamentale del calcolo integrale)

$$\int_{\mathrm{e}}^{y} \frac{\ln^2 z}{z}\, dz = \int_1^t \Big(s + \frac{2}{s}\Big)\, ds \qquad \Longrightarrow \qquad \Big[\frac{\ln^3 z}{3}\Big]_{\mathrm{e}}^{y} = \Big[\frac{s^2}{2} + 2\ln s\Big]_1^t$$

$$\Longrightarrow \qquad \frac{\ln^3 y}{3} - \frac{1}{3} = \frac{t^2}{2} + 2\ln t - \frac{1}{2},$$

che risolta rispetto a y fornisce la soluzione cercata.

b') Dalle tabelle si ottiene

$$\int \Big(\frac{3x\cos^2 x - 5}{\cos^2 x} - \frac{2^{x+2}}{3^x}\Big)\, dx = \int 3x\, dx - 5\int \frac{1}{\cos^2 x}\, dx - 4\int (2/3)^x\, dx$$

$$= \frac{3}{2}x^2 - 5\,\mathrm{tg}\, x - 4\frac{(2/3)^x}{\ln(2/3)} + c,$$

con c costante arbitraria. Per il Teorema fondamentale del calcolo e per la seconda tabella si ha

$$\int_1^{\mathrm{e}^4} \frac{\sqrt{\ln x}}{x}\, dx = \int_1^{\mathrm{e}^4} (\ln x)^{1/2} (\ln x)'\, dx = \Big[\frac{(\ln x)^{3/2}}{3/2}\Big]_1^{\mathrm{e}^4} = \frac{2}{3}(\ln \mathrm{e}^4)^{3/2} = \frac{2}{3}4^{3/2} = \frac{16}{3}.$$

10 Si ha $f'(x) = \mathrm{e}^{2\,\mathrm{sen}\, x}(2\cos x)$ e

$$f''(x) = \mathrm{e}^{2\,\mathrm{sen}\, x}(2\cos x)^2 - \mathrm{e}^{2\,\mathrm{sen}\, x} 2\,\mathrm{sen}\, x = \mathrm{e}^{2\,\mathrm{sen}\, x}(4\cos^2 x - 2\,\mathrm{sen}\, x),$$

da cui $f(0) = 1$, $f'(0) = 2$, $f''(0) = 4$ perciò il polinomio di Taylor cercato è

$$P(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x - x_0)^2 = 1 + 2x + 2x^2.$$

Appello del 11 luglio 2014

N.B.: scrivere nome, cognome e numero di matricola su ogni foglio consegnato.
Tempo a disposizione: 2.5 ore

---

1 Se $\lim_{x\to x_0} f(x) = 1$ e $\lim_{x\to x_0} g(x) = 0^-$, allora $\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$

- A vale -1
- B vale 0
- C vale $-\infty$
- D non ci sono elementi sufficienti per rispondere

---

2 Se f è una funzione derivabile in $]a, b[$ e tale che $f'(x_0) = 0$ e $f''(x_0) < 0$ per $x_0 \in]a, b[$, allora

- A x_0 è un punto di minimo relativo
- B x_0 è un punto di massimo relativo
- C x_0 è un punto di flesso

D nessuna delle precedenti

---

3 L'equazione differenziale $y'' = 2e^t y - y \operatorname{sen} t$ è

A un'equazione lineare del primo ordine

B un'equazione lineare del secondo ordine

C un'equazione non lineare del primo ordine

D un'equazione non lineare del secondo ordine

---

4 La funzione $f(x) = \log_{1/2} x$

A è definita in $[0, +\infty[$

B è pari

C è decrescente

D ha limite $+\infty$ per $x \to +\infty$

---

5 Dare l'interpretazione geometrica della derivata di una funzione f in un punto x_0.

---

6 Rappresentare il grafico di una funzione g che verifichi contemporaneamente le seguenti proprietà:

$$\lim_{x\to-\infty} g(x) = -\infty \qquad \lim_{x\to-2^-} g(x) = -\infty \qquad \lim_{x\to-2^+} g(x) = +\infty \qquad \lim_{x\to+\infty} g(x) = -1$$

---

7 a) Enunciare il Teorema di de L'Hôpital;

b) per ciascuno dei seguenti tre limiti

$$\lim_{x\to0} \frac{2x^2 + \operatorname{arctg}(1+x)}{x\ln(1+x) + 3\operatorname{sen} x}, \qquad \lim_{x\to0} \frac{3\operatorname{tg}(x^2) - 4\operatorname{sen} x}{x + \ln(1+2x)}, \qquad \lim_{x\to+\infty} \frac{2^x - 3x}{5^{-x} + \operatorname{sen} x + 2},$$

determinare se è possibile applicare il teorema ed eventualmente calcolarne il valore.

---

8 Data la funzione

$$g(x) = \frac{1-x^2}{(x+2)^2}$$

a) determinarne il dominio $\mathcal{D}$ e studiarne il segno;

b) calcolare i limiti agli estremi del dominio e trovare gli eventuali asintoti;

c) determinare gli intervalli in cui la funzione è crescente, quelli in cui è decrescente, e gli eventuali punti di massimo/minimo relativo e/o assoluto;

d) trovare gli intervalli in cui la funzione è concava e quelli in cui è convessa;

e) scrivere l'equazione della retta tangente al grafico nel punto di ascissa $x_0 = 0$;

f) disegnare un grafico approssimativo di g.

---

9 Dato il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = t\,e^{2t}\,3^y \\ y(1) = 0 \end{cases}$$

a) dire se la funzione $y(t) = \operatorname{sen}(\pi t)$ è soluzione;

b) determinare una soluzione del problema nel caso in cui non lo sia la funzione di cui al punto precedente; oppure, alternativamente

b') calcolare i seguenti integrali

$$\int \Big(\frac{2+x^2}{1+x^2} + \frac{3}{\cos^2 x}\Big)\,dx, \qquad \int_0^1 \frac{x}{e^{3x}}\,dx.$$

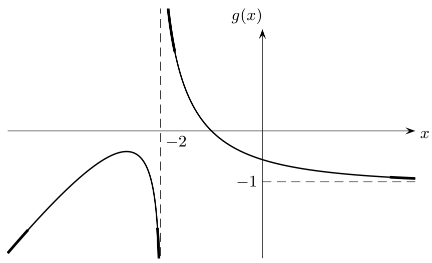
---

10 Scrivere il polinomio di Taylor di grado 2 di $f(x) = x\cos(2x)$ nel punto $x_0 = \pi/4$.

Soluzioni dei quesiti dell'esame del 11 luglio 2014

1 C; **2** B; **3** B; **4** C; **5** consultare il libro di testo.

6 In neretto si evidenziano le informazioni date dai limiti. Il grafico della funzione è quindi completato a piacere (linea sottile), per esempio:



7 a) consultare il libro di testo; b) il primo limite è della forma $(\pi/4)/0$, il secondo $0/0$, nel terzo il denominatore non ammette limite. Il teorema si può applicare solamente al secondo limite, per il quale si ha

$$\lim_{x\to 0} \frac{3\operatorname{tg}(x^2) - 4\operatorname{sen} x}{x + \ln(1+2x)} \overset{H}{=} \lim_{x\to 0} \frac{\frac{6x}{\cos^2(x^2)} - 4\cos x}{1 + \frac{2}{1+2x}} = -\frac{4}{3}.$$

8 a) La funzione è definita per gli x tali che $x+2 \neq 0$ cioè $x \neq -2$, perciò il dominio è $\mathcal{D} = \mathbb{R}\setminus\{-2\}$ e la funzione (razionale) è ivi continua e derivabile.

Il denominatore è sempre positivo, il numeratore è ≥ 0 quando $1 - x^2 \geq 0$ cioè $-1 \leq x \leq 1$. In definitiva la funzione è positiva in $]-1,1[$, negativa in $]-\infty,-2[$, in $]-2,-1[$ e in $]1,+\infty[$, mentre si annulla per $x=-1$ e $x=1$.

b) Ha senso andare a studiare i limiti in -2 e a $\pm\infty$. Si ha

$$\lim_{x\to\pm\infty} g(x) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{1/x^2 - 1}{(1+2/x)^2} = \left[\frac{-1}{1}\right] = -1,$$

$$\lim_{x\to -2} g(x) = \left[\frac{-3}{0^+}\right] = -\infty,$$

quindi la funzione non ammette minimo. Dallo studio dei limiti si evince immediatamente che g ha un asintoto verticale in $x=-2$ e un asintoto orizzontale di equazione $y=-1$ sia per $x\to\infty$ che per $x\to-\infty$.

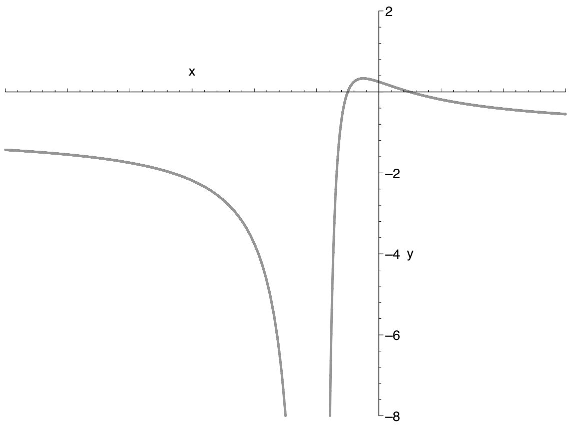
c) La derivata prima di g è

$$g'(x) = \frac{-2x(x+2)^2 - (1-x^2)2(x+2)}{(x+2)^4} = \frac{-2x(x+2) - (1-x^2)2}{(x+2)^3} = \frac{-(4x+2)}{(x+2)^3}.$$

Il numeratore è positivo se $-(4x+2) \geq 0$ ovvero se $x \leq -1/2$, il denominatore è positivo se $(x+2)^3 > 0$ cioè se $x+2 > 0$ ovvero $x > -2$. In definitiva

$$g'(x) \begin{cases} > 0, & \text{se } x \in]-2, -1/2[, \\ = 0, & \text{se } x = -1/2, \\ < 0, & \text{se } x \in]-\infty, -2[\cup]-1/2, +\infty[, \end{cases}$$

perciò la funzione è crescente in $]-2, -1/2[$, mentre è decrescente in $]-\infty, -2[$ e in $]-1/2, +\infty[$. In $x = -1/2$ ammette un massimo assoluto.



d) La derivata seconda è

$$g''(x) = -\frac{4(x+2)^3 - (4x+2)3(x+2)^2}{(x+2)^6} = -\frac{4(x+2) - (4x+2)3}{(x+2)^4} = \frac{8x-2}{(x+2)^4}.$$

Il numeratore è ≥ 0 se $x \geq 1/4$, mentre il denominatore è sempre positivo nel dominio, quindi

$$g''(x) \begin{cases} < 0, & \text{se } x \in]-\infty, -2[\cup]-2, 1/4[, \\ = 0, & \text{se } x = 1/4, \\ > 0, & \text{se } x \in]1/4, +\infty[, \end{cases}$$

perciò la funzione è concava in $]-\infty, -2[$ e in $]-2, 1/4[$, mentre è convessa in $]1/4, +\infty[$. In $x = 1/4$ ammette un punto di flesso.

e) L'equazione della retta tangente al grafico nel generico punto $(x_0, g(x_0))$ è

$$y = (x - x_0)g'(x_0) + g(x_0).$$

Poiché $g(0) = 1/4$ e $g'(0) = -1/4$, l'equazione della retta cercata è

$$y = \frac{1}{4} - \frac{x}{4}.$$

$\boxed{9}$ a) Si ha $y'(t) = \pi \cos(\pi t)$. Sostituendo si ottiene l'equazione

$$\pi \cos(\pi t) = t\, \mathrm{e}^{2t} 3^{\operatorname{sen}(\pi t)},$$

che non è identicamente soddisfatta per $t \in \mathbb{R}$ (per esempio, se $t = 0$ si ottiene $\pi \neq 0$). La funzione non è dunque soluzione. Si osservi che la funzione soddisfa la seconda condizione $y(1) = 0$.
b) Scrivendo $y' = \frac{dy}{dt}$ e utilizzando il metodo di separazione delle variabili si ha

$$\frac{1}{3^y}\, dy = t\, \mathrm{e}^{2t}\, dt \qquad \Longrightarrow \qquad \int 3^{-y}\, dy = \int t\, \mathrm{e}^{2t}\, dt.$$

Utilizzando le tabelle si ha facilmente

$$\int 3^{-y}\, dy = -\frac{3^{-y}}{\ln 3},$$

mentre integrando per parti si ottiene

$$\int t\, \mathrm{e}^{2t}\, dt = t\frac{\mathrm{e}^{2t}}{2} - \int \frac{\mathrm{e}^{2t}}{2}\, dt = t\frac{\mathrm{e}^{2t}}{2} - \frac{\mathrm{e}^{2t}}{4},$$

perciò in definitiva

$$-\frac{3^{-y}}{\ln 3} = t\frac{\mathrm{e}^{2t}}{2} - \frac{\mathrm{e}^{2t}}{4} + c,$$

dove c è la generica costante d'integrazione. Risolvendo in y si ottiene

$$3^y = \frac{1}{\left(\frac{\mathrm{e}^{2t}}{4} - t\frac{\mathrm{e}^{2t}}{2} - c\right)\ln 3} \qquad \Longleftrightarrow \qquad y = \log_3\left(\frac{4}{(\mathrm{e}^{2t} - 2t\mathrm{e}^{2t} - 4c)\ln 3}\right).$$

Imponendo la condizione $y(1) = 0$, ad esempio nella prima delle precedenti relazioni, si ottiene

$$1 = \frac{1}{\left(\frac{\mathrm{e}^{2}}{4} - \frac{\mathrm{e}^{2}}{2} - c\right)\ln 3},$$

da cui si ricava $c = -\frac{1}{\ln 3} - \frac{\mathrm{e}^2}{4}$. La soluzione è quindi

$$y(t) = \log_3\left(\frac{4}{(\mathrm{e}^{2t} - 2t\mathrm{e}^{2t} + \mathrm{e}^2)\ln 3 + 4}\right).$$

Alternativamente, si poteva utilizzare direttamente la formula risolutiva per le equazioni a variabili separabili (insieme alla formula fondamentale del calcolo integrale)

$$\int_0^y 3^{-z}\, dz = \int_1^t s\, \mathrm{e}^{2s}\, ds \quad \Longrightarrow \quad \left[-\frac{3^{-z}}{\ln 3}\right]_0^y = \left[s\frac{\mathrm{e}^{2s}}{2} - \frac{\mathrm{e}^{2s}}{4}\right]_1^t$$
$$\Longrightarrow \quad -\frac{3^{-y}}{\ln 3} + \frac{1}{\ln 3} = t\frac{\mathrm{e}^{2t}}{2} - \frac{\mathrm{e}^{2t}}{4} - \left(\frac{\mathrm{e}^2}{2} - \frac{\mathrm{e}^2}{4}\right),$$

che risolta rispetto a y fornisce la soluzione cercata.
b') Dalle tabelle si ottiene

$$\int \left(\frac{2 + x^2}{1 + x^2} + \frac{3}{\cos^2 x}\right) dx = \int 1\, dx + \int \frac{1}{1 + x^2}\, dx + 3\int \frac{1}{\cos^2 x}\, dx = x + \operatorname{arctg} x + 3 \operatorname{tg} x + c,$$

con c costante arbitraria. Integrando per parti si ottiene

$$\int_0^1 \frac{x}{\mathrm{e}^{3x}}\, dx = \int_0^1 x\, \mathrm{e}^{-3x}\, dx = \left[x\frac{\mathrm{e}^{-3x}}{-3}\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{\mathrm{e}^{-3x}}{-3}\, dx$$
$$= -\frac{\mathrm{e}^{-3}}{3} - \left[\frac{\mathrm{e}^{-3x}}{9}\right]_0^1 = -\frac{\mathrm{e}^{-3}}{3} - \frac{\mathrm{e}^{-3}}{9} + \frac{1}{9} = \frac{\mathrm{e}^3 - 4}{9\mathrm{e}^3}.$$

10 Si ha $f'(x) = \cos(2x) - 2x \operatorname{sen}(2x)$ e $f''(x) = -4 \operatorname{sen}(2x) - 4x \cos(2x)$, da cui $f(\pi/4) = 0$, $f'(\pi/4) = -\pi/2$, $f''(\pi/4) = -4$ perciò il polinomio di Taylor cercato è

$$P(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x - x_0)^2 = -\frac{\pi}{2}\left(x - \frac{\pi}{4}\right) - 2\left(x - \frac{\pi}{4}\right)^2.$$

Appello del 25 luglio 2014

N.B.: scrivere nome, cognome e numero di matricola su ogni foglio consegnato.
Tempo a disposizione: 2.5 ore

---

1 Se $\lim_{x\to x_0} f(x) = 3$ e $\lim_{x\to x_0} g(x) = -\infty$, allora $\lim_{x\to x_0} f(x)g(x)$

- A vale -3
- B vale $-\infty$
- C vale 0
- D non ci sono elementi sufficienti per rispondere

---

2 Se f è una funzione derivabile in $]a, b[$ e tale che $f'(x_0) = 0$ e $f''(x_0) > 0$ per $x_0 \in]a, b[$, allora

- A x_0 è un punto di minimo relativo
- B x_0 è un punto di massimo relativo
- C x_0 è un punto di flesso
- D nessuna delle precedenti

---

3 L'equazione differenziale $y' = t \ln y - 3t$ è

- A un'equazione lineare del primo ordine
- B un'equazione lineare del secondo ordine
- C un'equazione non lineare del primo ordine
- D un'equazione non lineare del secondo ordine

---

4 La funzione $f(x) = \operatorname{tg} x$

- A è definita in $\mathbb{R} \setminus \{\pi + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}$
- B è pari
- C è suriettiva come funzione a valori in $\mathbb{R}$
- D è crescente sul proprio dominio

---

5 Scrivere la definizione di primitiva di una funzione f in un intervallo I

---

6 Rappresentare il grafico di una funzione g che verifichi contemporaneamente le seguenti proprietà:

$$\lim_{x\to-\infty} g(x) = +\infty \qquad \lim_{x\to 2^-} g(x) = +\infty \qquad \lim_{x\to 2^+} g(x) = -\infty \qquad \lim_{x\to+\infty} g(x) = -2$$

---

7 a) Enunciare il Teorema del valore medio di Lagrange;

b) determinare, argomentando, a quali tra le funzioni $f(x) = \sqrt{|x|+1}$, $g(x) = \frac{1}{x+1}$, $h(x) = \ln(\mathrm{e}^x + 1)$ è possibile applicare il teorema nell'intervallo $[-2, 0]$.

---

8 Data la funzione

$$g(x) = \ln(x^2 - 3x + 3)$$

a) determinarne il dominio $\mathcal{D}$ e studiarne il segno;

b) calcolare i limiti agli estremi del dominio e trovare gli eventuali asintoti;

c) determinare gli intervalli in cui la funzione è crescente, quelli in cui è decrescente, e gli eventuali punti di massimo/minimo relativo e/o assoluto;

d) trovare gli intervalli in cui la funzione è concava e quelli in cui è convessa;

e) scrivere l'equazione della retta tangente al grafico nel punto di ascissa $x_0 = 0$;

f) disegnare un grafico approssimativo di g.

---

9 Dato il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = \dfrac{3t\,\mathrm{sen}(2t)}{y^4} \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

a) dire se la funzione $y(t) = 2 - \cos(2t)$ è soluzione del problema;

b) determinare una soluzione del problema nel caso in cui non lo sia la funzione di cui al punto precedente; oppure, alternativamente

b') calcolare i seguenti integrali

$$\int \left(\frac{3x}{x^2+5} + \frac{x^3}{\sqrt{x}}\right) dx, \qquad \int_0^{\pi/2} (2-3x)\cos(3x)\,dx.$$

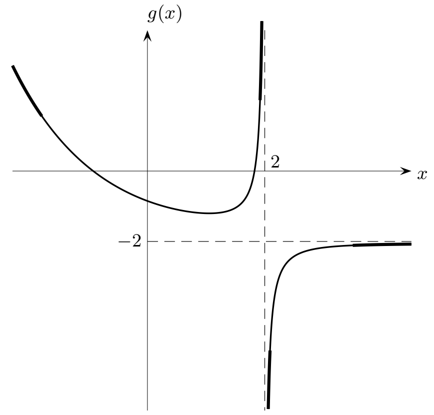
---

10 Scrivere il polinomio di Taylor di grado 2 di $f(x) = \dfrac{1}{1+3x}$ nel punto $x_0 = -1$.

Soluzioni dei quesiti dell'esame del 25 luglio 2014

1 B; **2** A; **3** C; **4** C; **5** consultare il libro di testo.

6 In neretto si evidenziano le informazioni date dai limiti. Il grafico della funzione è quindi completato a piacere (linea sottile), per esempio:



7 a) consultare il libro di testo; b) la funzione $f(x)$ è definita e continua in $\mathbb{R}$, derivabile in $\mathbb{R} \setminus \{0\}$; se ristretta a $[-2, 0]$ diventa derivabile anche nell'estremo 0 (in ogni caso basterebbe la derivabilità in $]-2, 0[$), perciò si può applicare il teorema. La funzione $g(x)$ non è definita in $x = -1$ interno all'intervallo in oggetto, perciò il teorema non può essere applicato. Infine h è banalmente definita e derivabile in $\mathbb{R}$ e a maggior ragione in $[-2, 0]$ quindi il teorema può essere applicato anche ad h.

8 a) La funzione è definita per gli x tali che $x^2 - 3x + 3 > 0$, disequazione vera per ogni $x \in \mathbb{R}$, perciò il dominio è $\mathcal{D} = \mathbb{R}$. Essendo composizione di funzioni continue e derivabili, la funzione è continua e derivabile nel dominio.

La funzione è ≥ 0 se e solo se $x^2 - 3x + 3 \geq 1$ ovvero $x^2 - 3x + 2 \geq 0$ che è verificata se e solo se $x \leq 1$ oppure $x \geq 2$. In definitiva la funzione è positiva in $]-\infty, 1[$ e in $]2, +\infty[$, negativa in $]1, 2[$, mentre si annulla in $x = 1$ e $x = 2$.

b) Ha senso andare a studiare i limiti a $\pm\infty$. Poiché l'argomento del logaritmo tende a $+\infty$ se $x \to \pm\infty$, si ha facilmente $\lim_{x\to\pm\infty} g(x) = +\infty$, quindi la funzione non ammette massimo. Essendo

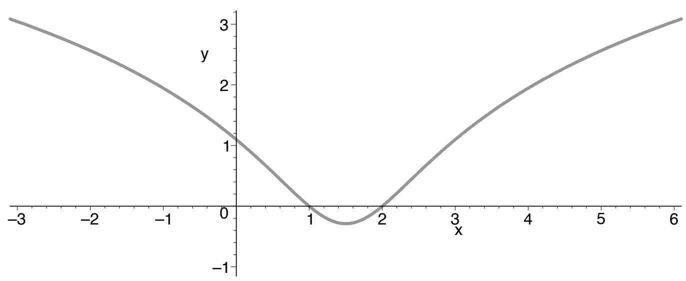
$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{g(x)}{x} = 0, \qquad \lim_{x\to\pm\infty} (g(x) - 0 \cdot x) = +\infty,$$

la funzione non ammette asintoti obliqui (e banalmente neanche verticali).

c) La derivata prima di g è

$$g'(x) = \frac{2x - 3}{x^2 - 3x + 3}.$$

Poiché per a) il denominatore è sempre positivo, la derivata è ≥ 0 se e solo se $2x - 3 \geq 0$ cioè $x \geq 3/2$, perciò la funzione è crescente in $]3/2, +\infty[$, mentre è decrescente in $]-\infty, 3/2[$. In $x = 3/2$ ammette un minimo assoluto.



d) La derivata seconda è

$$g''(x) = \frac{2(x^2 - 3x + 3) - (2x - 3)^2}{(x^2 - 3x + 3)^2} = \frac{-2x^2 + 6x - 3}{(x^2 - 3x + 3)^2}.$$

Poiché il denominatore è sempre positivo, la derivata seconda è ≥ 0 se $-2x^2+6x-3 \geq 0$ ovvero $2x^2-6x+3 \leq 0$ le cui soluzioni sono $\frac{3-\sqrt{3}}{2} \leq x \leq \frac{3+\sqrt{3}}{2}$, quindi

$$g''(x) \begin{cases} <0, & \text{se } x \in]-\infty, \frac{3-\sqrt{3}}{2}[\cup]\frac{3+\sqrt{3}}{2}, +\infty[, \\ =0, & \text{se } x = \frac{3-\sqrt{3}}{2} \text{ oppure } x = \frac{3+\sqrt{3}}{2}, \\ >0, & \text{se } x \in]\frac{3-\sqrt{3}}{2}, \frac{3+\sqrt{3}}{2}[, \end{cases}$$

perciò la funzione è concava in $]-\infty, \frac{3-\sqrt{3}}{2}[$ e in $]\frac{3+\sqrt{3}}{2}, +\infty[$, mentre è convessa in $]\frac{3-\sqrt{3}}{2}, \frac{3+\sqrt{3}}{2}[$. In $x = \frac{3-\sqrt{3}}{2}$ e $x = \frac{3+\sqrt{3}}{2}$ ammette due punti di flesso.

e) L'equazione della retta tangente al grafico nel generico punto $(x_0, g(x_0))$ è

$$y = (x-x_0)g'(x_0) + g(x_0).$$

Poiché $g(0) = \ln 3$ e $g'(0) = -1$, l'equazione della retta cercata è

$$y = -x + \ln 3$$

$\boxed{9}$ a) Si ha $y'(t) = 2\,\text{sen}(2t)$ e sostituendo si ottiene l'equazione

$$2\,\text{sen}(2t) = \frac{3t\,\text{sen}(2t)}{(2-\cos(2t))^4}$$

che non è identicamente soddisfatta per $t \in \mathbb{R}$ (per esempio, per $t = \pi/4$ si ottiene $2 \neq 3\pi/64$). La funzione non è dunque soluzione. Si osservi che la funzione soddisfa la seconda condizione, essendo $y(0) = 1$.

b) Scrivendo $y' = \frac{dy}{dt}$ e utilizzando il metodo di separazione delle variabili si ha

$$y^4\,dy = \big(3t\,\text{sen}(2t)\big)\,dt$$

e integrando (utilizzando le tabelle)

$$\int y^4\,dy = \int \big(3t\,\text{sen}(2t)\big)\,dt \qquad \Longrightarrow \qquad \frac{y^5}{5} = \int \big(3t\,\text{sen}(2t)\big)\,dt.$$

Il secondo integrale lo calcoliamo per parti:

$$\int \big(3t\,\text{sen}(2t)\big)\,dt = -3t\frac{\cos(2t)}{2} + \int 3\frac{\cos(2t)}{2}\,dt = -\frac{3}{2}t\cos(2t) + \frac{3}{4}\,\text{sen}(2t) + c$$

dove c è la generica costante d'integrazione, perciò si ottiene

$$\frac{y^5}{5} = -\frac{3}{2}t\cos(2t) + \frac{3}{4}\,\text{sen}(2t) + c \qquad \Longleftrightarrow \qquad y = \sqrt[5]{-\frac{15}{2}t\cos(2t) + \frac{15}{4}\,\text{sen}(2t) + 5c}.$$

Imponendo la condizione $y(0) = 1$ (nella prima delle due equazioni qui sopra) si ricava $1/5 = c$. La soluzione è quindi

$$y(t) = \sqrt[5]{-\frac{15}{2}t\cos(2t) + \frac{15}{4}\,\text{sen}(2t) + 1}.$$

Alternativamente, si poteva utilizzare direttamente la formula risolutiva per le equazioni a variabili separabili (insieme alla formula fondamentale del calcolo integrale)

$$\int_1^y z^4\,dz = \int_0^t \big(3s\,\text{sen}(2s)\big)\,ds \quad \Longrightarrow \quad \left[\frac{z^5}{5}\right]_1^y = \left[-\frac{3}{2}s\cos(2s) + \frac{3}{4}\,\text{sen}(2s)\right]_0^t$$

$$\Longrightarrow \quad \frac{y^5}{5} - \frac{1}{5} = -\frac{3}{2}t\cos(2t) + \frac{3}{4}\,\text{sen}(2t)$$

che risolta rispetto a y fornisce la soluzione cercata.

b') Dalle tabelle si ottiene

$$\int\Big(\frac{3x}{x^2+5}+\frac{x^3}{\sqrt{x}}\Big)\,dx=\frac{3}{2}\int\frac{(x^2+5)'}{x^2+5}\,dx+\int x^{5/2}\,dx=\frac{3}{2}\ln(x^2+5)+\frac{x^{7/2}}{7/2}+c,$$

con c costante arbitraria. Utilizzando invece il metodo di integrazione per parti si ha

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi/2}(2-3x)\cos(3x)\,dx&=\Big[(2-3x)\frac{\operatorname{sen}(3x)}{3}\Big]_0^{\pi/2}-\int_0^{\pi/2}(-3)\frac{\operatorname{sen}(3x)}{3}\,dx\\&=\frac{3\pi-4}{6}-\Big[\frac{\cos(3x)}{3}\Big]_0^{\pi/2}=\frac{3\pi-4}{6}+\frac{1}{3}=\frac{3\pi-2}{6}.\end{aligned}$$

10 Si ha $f'(x)=-\frac{3}{(1+3x)^2}$ e $f''(x)=\frac{18}{(1+3x)^3}$, da cui $f(-1)=-1/2$, $f'(-1)=-3/4$, $f''(-1)=-9/4$ perciò il polinomio di Taylor cercato è

$$P(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2}(x-x_0)^2=-\frac{1}{2}-\frac{3}{4}(x+1)-\frac{9}{8}(x+1)^2.$$

Appello del 15 settembre 2014

N.B.: scrivere nome, cognome e numero di matricola su ogni foglio consegnato.
Tempo a disposizione: 2.5 ore

---

1 Se $\lim_{x\to x_0} f(x)=0^-$ e $\lim_{x\to x_0} g(x)=+\infty$, allora $\lim_{x\to x_0} f(x)g(x)$

A vale $+\infty$

B vale $-\infty$

C vale 0

D non ci sono elementi sufficienti per rispondere

---

2 Se f è una funzione derivabile in $]a,b[$ e tale che $f''(x_0)=0$ e $f'(x_0)<0$ per $x_0\in]a,b[$, allora

A x_0 è un punto di minimo relativo

B x_0 è un punto di massimo relativo

C x_0 è un punto di flesso

D nessuna delle precedenti

---

3 L'equazione differenziale $y''=y'\ln t+3t^2y$ è

A un'equazione lineare del primo ordine

B un'equazione lineare del secondo ordine

C un'equazione non lineare del primo ordine

D un'equazione non lineare del secondo ordine

---

4 La funzione $f(x) = \log_{1/3} x$

A è definita in $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ e pari

B è invertibile con inversa $f^{-1}(x) = 3^{-x}$

C è crescente sul proprio dominio

D è definita in $]0, +\infty[$ e dispari

---

5 Dare l'interpretazione geometrica della derivata di una funzione f in un punto x_0.

---

6 Rappresentare il grafico di una funzione g che verifichi contemporaneamente le seguenti proprietà:

$$\lim_{x\to-\infty} g(x) = -2 \qquad \lim_{x\to 0^-} g(x) = 0 \qquad \lim_{x\to 0^+} g(x) = -\infty \qquad \lim_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$$

7

a) Enunciare il Teorema sul limite delle successioni monotone

b) dire in quali dei seguenti casi è possibile applicarlo:

$$a_n = 2n - \cos n, \qquad b_n = \operatorname{sen}(\pi n^2/2), \qquad c_n = \frac{n+1}{n+2}.$$

---

8 Data la funzione

$$g(x) = (2x^2 + x - 1)\mathrm{e}^x$$

a) determinarne il dominio $\mathcal{D}$ e studiarne il segno;

b) calcolare i limiti agli estremi del dominio e trovare gli eventuali asintoti;

c) determinare gli intervalli in cui la funzione è crescente, quelli in cui è decrescente, e gli eventuali punti di massimo/minimo relativo e/o assoluto;

d) trovare gli intervalli in cui la funzione è concava e quelli in cui è convessa;

e) scrivere l'equazione della retta tangente al grafico nel punto di ascissa $x_0 = -1$;

f) disegnare un grafico approssimativo di g.

---

9 Dato il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = -3y + t^2 \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

a) dire se la funzione $y(t) = t\mathrm{e}^{-3t} + 1$ è soluzione del problema;

b) determinare una soluzione del problema nel caso in cui non lo sia la funzione di cui al punto precedente; oppure, alternativamente

b') calcolare i seguenti integrali

$$\int \left(\frac{1+x}{\sqrt{4-x^2}} - x\sqrt[3]{x} \right) dx, \qquad \int_1^2 (6x^2 - 2x)\ln(2x-1)\, dx.$$

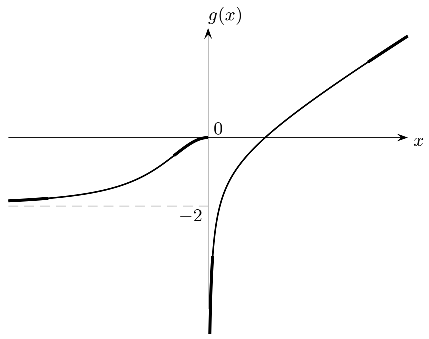
---

10 Scrivere il polinomio di Taylor di grado 2 di $f(x) = \mathrm{e}^{2x}\cos x$ nel punto $x_0 = \pi/2$.

Soluzioni dei quesiti dell'esame del 15 settembre 2014

$\boxed{\mathbf{1}}$ D; $\boxed{\mathbf{2}}$ D; $\boxed{\mathbf{3}}$ B; $\boxed{\mathbf{4}}$ B; $\boxed{\mathbf{5}}$ consultare il libro di testo.

$\boxed{\mathbf{6}}$ In neretto si evidenziano le informazioni date dai limiti. Il grafico della funzione è quindi completato a piacere (linea sottile), per esempio:



$\boxed{\mathbf{7}}$ a) consultare il libro di testo; b) nel primo caso si ha

$$a_n \leq a_{n+1} \qquad \Longleftrightarrow \qquad 2n - \cos n \leq 2(n+1) - \cos(n+1) \qquad \Longleftrightarrow \qquad \cos(n+1) - \cos n \leq 2$$

che è sempre vera in quanto $\cos(n+1) - \cos n \leq |\cos(n+1)| + |\cos n| \leq 2$. Nel secondo caso, a causa del seno, la successione non è monotona, infatti $a_0 = 0 < 1 = a_1$ mentre $a_1 > 0 = a_2$ e in generale $a_{2n} = 0$ e $a_{4n+1} = 1$ per ogni n. Nel terzo è nuovamente monotona, infatti

$$c_n \leq c_{n+1} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \frac{n+1}{n+2} \leq \frac{(n+1)+1}{(n+1)+2} \qquad \Longleftrightarrow \qquad 0 \leq \frac{1}{(n+2)(n+3)},$$

che è sempre vera. Il teorema si può dunque applicare ad a_n e c_n ma non a b_n.

$\boxed{\mathbf{8}}$ a) La funzione è definita, continua e derivabile in $\mathcal{D} = \mathbb{R}$. Poiché $\mathrm{e}^x > 0$ per ogni x si ha $g(x) \geq 0$ se e solo se $2x^2 + x - 1 \geq 0$ ovvero se $x \leq -1$ oppure $x \geq 1/2$.

b) Ha senso andare a studiare i limiti a $\pm\infty$. Si ha $\lim_{x\to+\infty} g(x) = [(+\infty)\cdot(+\infty)] = +\infty$, quindi $g(x)$ non ammette massimo, mentre applicando due volte de L'Hôpital

$$\lim_{x\to-\infty} g(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{2x^2+x-1}{\mathrm{e}^{-x}} = \left[\frac{+\infty}{+\infty}\right] \overset{H}{=} \lim_{x\to-\infty} \frac{4x+1}{-\mathrm{e}^{-x}} \overset{H}{=} \lim_{x\to-\infty} \frac{4}{\mathrm{e}^{-x}} = \left[\frac{4}{+\infty}\right] = 0.$$

Infine, siccome

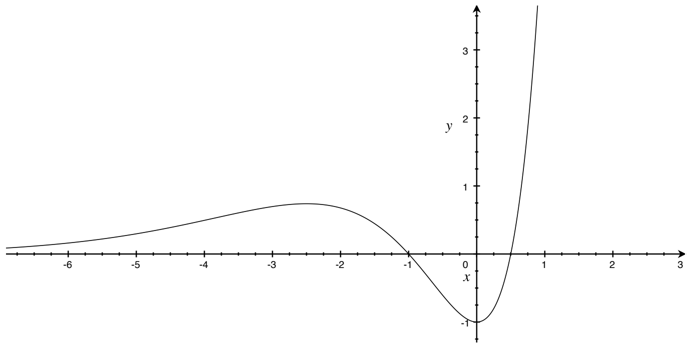
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{g(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} (2x + 1 - 1/x)e^x = +\infty$$

la funzione non ammette asintoti obliqui a $+\infty$, mentre $y = 0$ è banalmente un asintoto orizzontale a $-\infty$.

c) La derivata prima di g è

$$g'(x) = (4x+1)\mathrm{e}^x + (2x^2+x-1)\mathrm{e}^x = (2x^2+5x)\mathrm{e}^x.$$

Si ha $g'(x) \geq 0$ se e solo se $2x^2 + 5x \geq 0$ ovvero $x \leq -5/2$ oppure $x \geq 0$, quindi la funzione è decrescente in $]-5/2, 0[$, crescente in $]-\infty, -5/2[$ e su $]0, +\infty[$. In $x = -5/2$ ammette un massimo relativo, in $x = 0$ ammette un minimo relativo e assoluto con $g(0) = -1$.



d) La derivata seconda è

$$g''(x) = (4x+5)\mathrm{e}^x + (2x^2+5x)\mathrm{e}^x = (2x^2+9x+5)\mathrm{e}^x.$$

Si ha $g''(x) \geq 0$ se e solo se $2x^2+9x+5 \geq 0$ le cui soluzioni sono $x \leq \frac{-9-\sqrt{41}}{4}$ oppure $x \geq \frac{-9+\sqrt{41}}{4}$, quindi

$$g''(x) \begin{cases} > 0, & \text{se } x \in \left]-\infty, \frac{-9-\sqrt{41}}{4}\right[\cup \left]\frac{-9+\sqrt{41}}{4}, +\infty\right[, \\ = 0, & \text{se } x = \frac{-9-\sqrt{41}}{4} \text{ oppure } x = \frac{-9+\sqrt{41}}{4}, \\ < 0, & \text{se } x \in \left]\frac{-9-\sqrt{41}}{4}, \frac{-9+\sqrt{41}}{4}\right[, \end{cases}$$

perciò la funzione è convessa in $\left]-\infty, \frac{-9-\sqrt{41}}{4}\right[$ e in $\left]\frac{-9+\sqrt{41}}{4}, +\infty\right[$, mentre è concava in $\left]\frac{-9-\sqrt{41}}{4}, \frac{-9+\sqrt{41}}{4}\right[$. In $x = \frac{-9-\sqrt{41}}{4}$ e $x = \frac{-9+\sqrt{41}}{4}$ ammette due punti di flesso.

e) L'equazione della retta tangente al grafico nel generico punto $(x_0, g(x_0))$ è

$$y = (x - x_0)g'(x_0) + g(x_0).$$

Poiché $g(-1) = 0$ e $g'(-1) = -3/\mathrm{e}$, l'equazione della retta cercata è

$$y = -3(x+1)\mathrm{e}.$$

$\boxed{9}$ a) Si ha $y'(t) = (1-3t)\mathrm{e}^{-23}$ e sostituendo si ottiene l'equazione

$$(1-3t)\mathrm{e}^{-3t} = -3(t\mathrm{e}^{-3t}+1) + t^2$$

che non è identicamente soddisfatta per $t \in \mathbb{R}$ (per esempio, per $t = 0$ si ha $1 \neq -3$). La funzione non è dunque soluzione. Si osservi che tuttavia soddisfa la seconda condizione, essendo $y(0) = 1$.

b) Si tratta di un'equazione lineare del primo ordine a coefficienti costanti, del tipo

$$y' = a(t)y + b(t)$$

le cui soluzioni sono date da

$$y(t) = \mathrm{e}^{A(t)} \int \mathrm{e}^{-A(t)} b(t)\, dt$$

dove $A(t)$ è una primitiva di $a(t)$. In questo caso $A(t) = -3t$ e integrando per parti due volte si ottiene

$$\begin{aligned} y(t) &= \mathrm{e}^{-3t} \int \mathrm{e}^{3t} t^2\, dt = \mathrm{e}^{-3t} \left(\frac{\mathrm{e}^{3t}}{3} t^2 - \int \frac{\mathrm{e}^{3t}}{3} 2t\, dt \right) = \mathrm{e}^{-3t} \left(\frac{\mathrm{e}^{3t}}{3} t^2 - \frac{2}{3} \left(\frac{\mathrm{e}^{3t}}{3} t - \int \frac{\mathrm{e}^{3t}}{3}\, dt \right) \right) \\ &= \mathrm{e}^{-3t} \left(\frac{\mathrm{e}^{3t}}{3} t^2 - \frac{2\mathrm{e}^{3t}}{9} t + \frac{2\mathrm{e}^{3t}}{27} + c \right) = c\,\mathrm{e}^{-3t} + \frac{t^2}{3} - \frac{2}{9} t + \frac{2}{27}, \end{aligned}$$

dove c è la generica costante d'integrazione. Imponendo la condizione $y(0) = 1$ si ricava $c+2/27 = 1$ cioè $c = 25/27$. La soluzione è quindi

$$y(t) = \frac{25}{27}\mathrm{e}^{-3t} + \frac{t^2}{3} - \frac{2}{9}t + \frac{2}{27}.$$

Alternativamente, si poteva utilizzare direttamente la formula risolutiva (insieme alla formula fondamentale del calcolo integrale)

$$y(t) = \mathrm{e}^{A(t)} \left(\int_0^t \mathrm{e}^{-A(s)} b(s)\, ds + y(0) \right)$$

dove $A(t) = \int_0^t a(s)\, ds = -3t$ e

$$\begin{aligned} y(t) &= \mathrm{e}^{-3t} \left(\int_0^t \mathrm{e}^{3s} s^2\, ds + 1 \right) = \mathrm{e}^{-3t} \left(\left[\frac{\mathrm{e}^{3s}}{3} s^2 - \frac{2\mathrm{e}^{3s}}{9} s + \frac{2\mathrm{e}^{3s}}{27} \right]_0^t + 1 \right) \\ &= \mathrm{e}^{-3t} \left(\frac{\mathrm{e}^{3t}}{3} t^2 - \frac{2\mathrm{e}^{3t}}{9} t + \frac{2\mathrm{e}^{3t}}{27} - \frac{2}{27} + 1 \right) = \frac{25}{27}\mathrm{e}^{-3t} + \frac{t^2}{3} - \frac{2}{9}t + \frac{2}{27}. \end{aligned}$$

b') Dalle tabelle si ottiene

$$\begin{aligned} \int \left(\frac{1+x}{\sqrt{4-x^2}} - x\sqrt[3]{x} \right) dx &= \int \frac{1}{\sqrt{4-x^2}}\, dx - \frac{1}{2} \int \frac{(4-x^2)'}{(4-x^2)^{1/2}}\, dx - \int x^{4/3}\, dx \\ &= \operatorname{arcsen} \frac{x}{2} - \frac{1}{2} \frac{(4-x^2)^{1/2}}{1/2} - \frac{x^{7/3}}{7/3} + c = \operatorname{arcsen} \frac{x}{2} - \sqrt{4-x^2} - \frac{3}{7} x^2 \sqrt[3]{x} + c, \end{aligned}$$

con c costante arbitraria. Utilizzando invece il metodo di integrazione per parti si ha

$$\begin{aligned} \int_1^2 (6x^2 - 2x) \ln(2x-1)\, dx &= \Big[(2x^3 - x^2) \ln(2x-1) \Big]_1^2 - \int_1^2 (2x^3 - x^2) \frac{2}{2x-1}\, dx \\ &= 12 \ln 3 - 2 \int_1^2 x^2\, dx = 12 \ln 3 - 2 \Big[\frac{x^3}{3} \Big]_1^2 = 12 \ln 3 - \frac{14}{3}. \end{aligned}$$

10 Si ha $f'(x) = \mathrm{e}^{2x}(2\cos x - \operatorname{sen} x)$ e $f''(x) = \mathrm{e}^{2x}(3\cos x - 4\operatorname{sen} x)$, da cui $f(\pi/2) = 0$, $f'(\pi/2) = -\mathrm{e}^{\pi}$, $f''(\pi/2) = -4\mathrm{e}^{\pi}$ perciò il polinomio di Taylor cercato è

$$P(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x - x_0)^2 = -\mathrm{e}^{\pi}\Big(x - \frac{\pi}{2}\Big) - 2\mathrm{e}^{\pi}\Big(x - \frac{\pi}{2}\Big)^2.$$