Università degli Studi di Udine Anno Accademico 2012/2013

Facoltà di Scienze Matematiche, Fisiche e Naturali
Corso di Laurea in Matematica

Programma del Corso di Equazioni Differenziali
Docente: Paolo Baiti

Definizioni di base e alcuni richiami. Definizione di equazione/sistema di equazioni differenziali ordinarie (EDO); soluzione di un'equazione/sistema, traiettoria e orbita di una soluzione. Equazioni e sistemi in forma normale. Sistemi autonomi. Riduzione di un'equazione in forma normale di ordine n a un sistema di n equazioni di ordine 1. Regolarità delle soluzioni in funzione della regolarità del campo vettoriale. Il problema di Cauchy. Richiami sul teorema di Cauchy-Lipschitz di esistenza e unicità locale in ipotesi di Lipschitz. La lipschitzianità locale implica la lipschitzianità sui compatti. Esempi di approssimazione con le iterate di Picard.

Il teorema di esistenza locale di Peano. Richiami sugli spazi metrici e compattezza in spazi metrici. Spazi topologici separabili. Gli spazi metrici compatti sono separabili. Insiemi compatti e relativamente compatti in $C(E, R)$; insiemi equicontinui ed equiuniformemente continui. Il teorema di Ascoli-Arzelà. Introduzione al metodo delle poligonali di Eulero. Il teorema di Peano: dimostrazione dell'esistenza di una soluzione tramite approssimazione con le poligonali di Eulero. Cenni di altre dimostrazioni. I teoremi di punto fisso di Brouwer e di Schauder (solo enunciati).

Analisi qualitativa delle soluzioni. Questioni legate all'unicità delle soluzioni: l'unicità locale implica l'unicità globale. Conseguenze dell'unicità sulle traiettorie e sulle orbite delle soluzioni. Il fenomeno di Peano, integrale superiore e inferiore (cenni). Prolungabilità delle soluzioni. Soluzioni massimali e intervallo massimale d'esistenza. L'intervallo massimale d'esistenza è aperto. Teorema di esistenza delle soluzioni massimali nel caso in cui il campo vettoriale è localmente lipschitziano oppure continuo. Il grafico di una soluzione massimale è chiuso nella topologia indotta. Fuga dai compatti. Esplosione delle soluzioni in tempo finito. Alcune conseguenze del teorema della fuga dai compatti: compattezza e limitatezza implicano l'esistenza in grande. Il metodo delle funzioni ausiliarie; la sublinearità implica l'esistenza in grande delle soluzioni; la lipschitzianità globale implica l'esistenza in grande delle soluzioni. I sistemi lineari a coefficienti continui hanno esistenza e unicità in grande delle soluzioni. Esistenza e unicità per equazioni scalari di ordine n. Il Teorema di Peano sui compatti. Il Lemma di Gronwall. Alcuni teoremi sulla dipendenza continua dai dati iniziali e dal campo vettoriale. Il Teorema di Kamke (tre formulazioni, solo enunciati). Differenziabilità rispetto al dato iniziale (cenni). Il teorema del confronto (due versioni).

Il criterio dell'asintoto e alcune sue conseguenze. Applicazione degli strumenti introdotti allo studio qualitativo delle soluzioni di un sistema di equazioni differenziali. Un modello di Lotka-Volterra per la competizione tra due specie: caso dell'estinzione. Sistemi autonomi e integrali primi. Sistemi conservativi. Sistemi fisici conservativi; caso dell'energia. La ricerca di integrali primi: il metodo della 1-forme; fattori integranti. Il pendolo non lineare: analisi qualitativa delle soluzioni. Analisi del modello nonlineare preda-predatore di Lotka-Volterra.

Alcune classi di equazioni risolubili analiticamente. Equazioni a variabili separabili. Formula risolutiva per le equazioni lineari del primo ordine a coefficienti continui. L'equazione di Bernoulli. L'equazione di Malthus e l'equazione logistica di Verhulst. Equazioni omogenee e loro varianti. Equazioni del secondo ordine della forma $y'' = f(y, y')$ oppure $y'' = f(t, y')$. Applicazione al problemi della fune inestensibile (catenaria).

Sistemi ed equazioni lineari. Sistemi lineari. Sistema omogeneo associato. La soluzione generale di un sistema lineare è somma della generica soluzione del sistema omogeneo e di una qualsiasi soluzione fissata del sistema. L'insieme delle soluzioni di un sistema omogeneo è uno spazio vettoriale di dimensione n. Matrice soluzione e matrice fondamentale (risolvente). Teorema di Lagrange e formula di variazione delle costanti. Sistemi lineari a coefficienti costanti. Esponenziale di una matrice: definizione e proprietà. Soluzione del problema di Cauchy associato a un sistema lineare omogeneo a coefficienti costanti. Calcolo esplicito dell'esponenziale di una matrice in alcuni casi particolari: matrice multipla dell'identità, matrice di rotazione 2×2, matrice diagonalizzabile reale, matrice somma di una matrice diagonalizzabile e di una nilpotente che commutano. Decomposizione di una matrice nella somma di una matrice diagonalizzabile e di una nilpotente (senza dim) con applicazioni al calcolo della matrice esponenziale. Forma canonica di Jordan (senza dim): caso delle matrici 2×2 e 3×3; applicazione ai sistemi lineari. Applicazione della teoria svolta alle equazioni differenziali ordinarie di ordine n a coefficienti costanti.

Soluzioni periodiche per sistemi di equazioni differenziali (cenni). Equivalenza del problema della ricerca di soluzioni periodiche con un opportuno problema di punto fisso. Applicazione del teorema di punto fisso di Brouwer per dimostrare l'esistenza di orbite periodiche per sistemi di equazioni differenziali. Il caso dell'oscillatore con resistenza del mezzo. Il teorema di Poincaré-Bendixson (cenni).