

# Dipendenza dai dati iniziali

Dopo aver studiato il problema dell'esistenza e unicità delle soluzioni dei problemi di Cauchy, il passo successivo è vedere come le traiettorie di queste ultime dipendono dai dati iniziali. Denotando con  $y_0(t)$  la soluzione dell'equazione differenziale  $y' = f(t, y)$  con dati iniziali  $y(t_0) = y_0$ , se interpretiamo la traiettoria come l'evoluzione nel tempo del nostro sistema fisico, ci aspettiamo che variando di poco la "posizione iniziale"  $y_0$  (o il tempo iniziale  $t_0$ ) la traiettoria della corrispondente soluzione sia vicina a quella di  $y_0(t)$ . Più precisamente, se  $y_1(t)$  denota la soluzione della medesi-

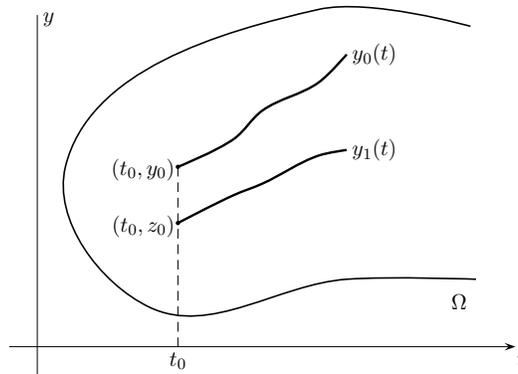


Figura 1: Confronto tra soluzioni

ma equazione differenziale e tale che  $y_1(t_0) = y_1$  ci aspettiamo che quando  $y_1$  è vicino a  $y_0$  le traiettorie di  $y_0(t)$  e  $y_1(t)$  siano vicine, e se  $y_1$  tende a  $y_0$  ci aspettiamo che le due traiettorie tendano a sovrapporsi, ovvero ci sia una qualche continuità delle soluzioni dai dati iniziali (a volte chiamata anche "stability"). In questo capitolo studieremo come le soluzioni dipendono da  $t_0$  e  $y_0$ , e vedremo che, sotto le usuali ipotesi per  $f$ , la mappa che associa al dato  $y_0$  la soluzione che assume tale dato al tempo  $t_0$  è continua e differen-

ziabile. Analizzeremo infine anche la dipendenza delle soluzioni dal tempo iniziale  $t_0$  e dal campo vettoriale  $f$ .

## Dipendenza continua dai dati iniziali

In questa sezione dimostreremo la continuità delle soluzioni di un'equazione differenziale dal dato iniziale  $y_0$ . Chiaramente, se le soluzioni dei problemi di Cauchy non sono uniche a maggior ragione perde anche senso parlare di dipendenza continua dai dati iniziali. Di conseguenza, se non diversamente specificato, d'ora in avanti assumeremo l'unicità delle soluzioni dei problemi di Cauchy relativi all'equazione differenziale in considerazione. Sappiamo che ciò garantisce l'esistenza di un'unica soluzione massimale per ciascuno di tali problemi. Per evidenziare la dipendenza della soluzione dai dati iniziali, nel seguito denoteremo con  $y(t; t_0, y_0)$  la soluzione (massimale) del problema di Cauchy

$$(1) \quad \begin{cases} y' = f(t, y) \\ y(t_0) = y_0. \end{cases}$$

Nel caso in cui il tempo iniziale  $t_0$  sia fissato, per concentrarci sulla sola dipendenza della soluzione dal dato iniziale  $y_0$  useremo anche la notazione ridotta  $y(t; y_0)$ . Vediamo ora che nel caso in cui valgono le ipotesi del Teorema di Cauchy-Lipschitz, la dipendenza della soluzione dai dati iniziali è addirittura lipschitziana.

**Teorema 1 (di dipendenza continua dai dati (I))** *Sia  $f : \Omega \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  continua e localmente lipschitziana (rispetto alle variabili  $y$ ). Allora*

*i) per ogni  $(t_0, y_0), (t_0, z_0) \in \Omega$  esistono  $\delta > 0, C > 0$  tali che*

$$(2) \quad \|y(\cdot; y_0) - y(\cdot; z_0)\|_\infty \leq C \|y_0 - z_0\|,$$

*dove si è posto  $\|y(\cdot; y_0) - y(\cdot; z_0)\|_\infty = \sup_{t \in I_\delta(t_0)} \|y(t; y_0) - y(t; z_0)\|$ ;*

*ii) più in generale, fissato un compatto  $K \subset \Omega$  esistono  $\delta, C > 0$  (dipendenti solo da  $K$  e  $f$ ) tali che per ogni  $(t_0, y_0), (t_0, z_0) \in K$  vale (2). In altri termini, l'applicazione  $y_0 \mapsto y(\cdot; y_0)$  è localmente lipschitziana come funzione da  $\mathbb{R}^n$  in  $(C(I_\delta, \mathbb{R}^n), \|\cdot\|_\infty)$ .*

DIMOSTRAZIONE i) Presi  $(t_0, y_0), (t_0, z_0) \in \Omega$  denotiamo con  $I'$  e  $I''$  gli intervalli di definizione, rispettivamente, di  $y(t; y_0)$  e  $y(t; z_0)$ . Sia  $K$  un compatto che contiene le due traiettorie ristrette all'intervallo  $I' \cap I''$  (per esempio, se  $I' \cap I''$  è chiuso, l'unione delle traiettorie medesime) e sia  $L$  la costante di Lipschitz di  $f$  in  $K$ . Si prenda infine  $\delta$  tale che  $\delta L < 1$ . Come nella dimostrazione del Teorema di Cauchy, per  $t \in I_\delta(t_0) \cap I' \cap I''$  si ottiene (3)

$$\begin{aligned} \|y(t; y_0) - y(t; z_0)\| &= \left\| y_0 - z_0 + \int_{t_0}^t f(s, y(s; y_0)) - f(s, y(s; z_0)) ds \right\| \\ &\leq \|y_0 - z_0\| + \left| \int_{t_0}^t \|f(s, y(s; y_0)) - f(s, y(s; z_0))\| ds \right| \\ &\leq \|y_0 - z_0\| + L \left| \int_{t_0}^t \|y(s; y_0) - y(s; z_0)\| ds \right| \\ &\leq \|y_0 - z_0\| + \delta L \|y(\cdot; y_0) - y(\cdot; z_0)\|_\infty. \end{aligned}$$

Passando all'estremo superiore sui  $t \in I_\delta$  e riordinando i termini si ottiene

$$\|y(\cdot; y_0) - y(\cdot; z_0)\|_\infty \leq \frac{1}{1 - \delta L} \|y_0 - z_0\|,$$

da cui la tesi con  $C = (1 - \delta L)^{-1}$ .

ii) Nel punto precedente si è visto come le costanti  $\delta, C$  dipendono da  $y_0$  e  $z_0$ . Verifichiamo che è possibile prenderle uniformi in un compatto contenente  $(t_0, y_0)$  e  $(t_0, z_0)$  (ciò è necessario per potere far tendere in seguito  $z_0$  a  $y_0$  e ottenere la lipschitzianità). Fissato un compatto  $K$  in  $\Omega$ , sia  $C_{\alpha, R}(K) \subset \Omega$  definito come in (12) nella dimostrazione del Teorema 12 di Peano sui compatti. Per quest'ultimo teorema e per il Lemma 3.19 delle dispense ogni soluzione massimale con dati iniziali  $(t_0, y_0)$  in  $K$  è definita almeno in  $I_\varepsilon(t_0)$  con  $\varepsilon = \min\{\alpha, R/M_K\}$ , essendo  $M_K$  il massimo della norma di  $f$  in  $C_{\alpha, R}(K)$ ; inoltre, per il Lemma 2.8 delle dispense la traiettoria di  $y(t; y_0)$ ,  $t \in I_\varepsilon(t_0)$ , è contenuta in  $C_{\varepsilon, R}(t_0, y_0) \subset C_{\alpha, R}(K)$  che è dunque un compatto contenente tutte le traiettorie al variare di  $(t_0, y_0) \in K$ . Sia infine  $L$  la costante di Lipschitz di  $f$  in  $C_{\alpha, R}(K)$  e come prima si prenda  $\delta$  tale che  $\delta \leq \varepsilon$  e  $\delta L < 1$ . Con queste scelte di  $L, \delta$  le stime (3) continuano a valere per ogni  $t \in I_\delta(t_0)$ , uniformemente per ogni  $(t_0, y_0), (t_0, z_0) \in K$ , da cui la tesi.  $\square$

Del teorema precedente segue che la traiettoria di  $y(t; z_0)$  converge uniformemente a quella di  $y(t; y_0)$  quando  $z_0$  tende a  $y_0$ .

**Esercizio 2** Generalizzare il teorema precedente al caso in cui anche  $t_0$  può variare; più precisamente, definiti  $C_{\alpha, R}(K)$  e  $M_K$  come nella dimostrazione

del Teorema 12, si verifichi che esistono  $\delta, C > 0$  tali che

$$(4) \quad \|y(\cdot; t_0, y_0) - y(\cdot; t_1, y_1)\|_\infty \leq C[M_K|t_0 - t_1| + \|y_0 - y_1\|].$$

Le disuguaglianze (2) e (4) forniscono una stima sulla norma infinito della distanza tra due soluzioni; quest'ultima implica banalmente la disuguaglianza puntuale

$$\|y(t; y_0) - y(t; z_0)\| \leq C\|y_0 - z_0\|,$$

per ogni  $t \in I_\delta(t_0)$ . Si osservi che quest'ultima non è ottimale in quanto per  $t = t_0$  si ottiene  $\|y_0 - z_0\| < C\|y_0 - z_0\|$ , con  $C = (1 - \delta L)^{-1} > 1$ . Volendo ottenere una stima puntuale più precisa si può utilizzare il Lemma di Gronwall, un classico strumento nell'ambito delle equazioni differenziali, utilissimo per esempio per dimostrare l'unicità delle soluzioni e per ottenere stime sulle medesime. Fornisce inoltre un primo approccio alle cosiddette disequazioni integrali e, per certi aspetti, è l'equivalente del Teorema del confronto 5.1 delle dispense (quest'ultimo può anche essere utilizzato proprio per dimostrare il Lemma).

**Lemma 3 (di Gronwall)** *Sia  $v : I \rightarrow \mathbb{R}$  continua e non negativa tale che esistano  $\alpha, \beta \geq 0$ ,  $t_0 \in I$  per cui*

$$(5) \quad v(t) \leq \alpha + \beta \left| \int_{t_0}^t v(s) ds \right|.$$

Allora

$$(6) \quad v(t) \leq \alpha e^{\beta|t-t_0|}.$$

**Osservazione 4** La differenza fondamentale tra (5) e (6) sta nel fatto che nella prima la funzione  $v(t)$  compare sia a destra che a sinistra della disuguaglianza, nella seconda compare solo a sinistra e quindi fornisce un'effettiva stima di  $v(t)$ .

**DIMOSTRAZIONE** (del Lemma di Gronwall) Verifichiamo la tesi nel caso  $t > t_0$ , cioè in futuro, nel qual caso si può togliere il valore assoluto sia in (5) che in (6). Introdotta la funzione

$$u(t) := \alpha + \beta \int_{t_0}^t v(s) ds,$$

per ipotesi si ha  $v(t) \leq u(t)$  per ogni  $t > t_0$ . Inoltre

$$\frac{d}{dt}(u(t)e^{-\beta(t-t_0)}) = \beta e^{-\beta(t-t_0)} \left( v(t) - \left( \alpha + \beta \int_{t_0}^t v(s) ds \right) \right) \leq 0,$$

ovvero la funzione  $w(t) = u(t)e^{-\beta(t-t_0)}$  è decrescente per  $t \geq t_0$ , dunque  $w(t) \leq w(t_0) = \alpha$  da cui

$$v(t)e^{-\beta(t-t_0)} \leq u(t)e^{-\beta(t-t_0)} \leq \alpha,$$

cioè la tesi per  $t \geq t_0$ .

Alternativamente si può utilizzare il Teorema del confronto 5.4 delle dispense. Anche qui verifichiamo la tesi nel caso  $t > t_0$ , cioè in futuro. Introdotta la funzione  $u(t)$  come sopra, per ipotesi si ha  $v(t) \leq u(t)$  per ogni  $t > t_0$ . È dunque sufficiente dimostrare che la tesi vale per  $u$  cioè che  $u(t) \leq \alpha e^{\beta(t-t_0)}$  per  $t > t_0$ . Per ipotesi  $u$  è derivabile e si ha  $u'(t) = \beta v(t) \leq \beta u(t)$ , per ogni  $t > t_0$ . In particolare  $u(t)$  è sottosoluzione in futuro per la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} z' = \beta z \\ z(t_0) = u(t_0) = \alpha. \end{cases}$$

Essendo tale soluzione data da  $z(t) = \alpha e^{\beta(t-t_0)}$ , per il Teorema del confronto 5.4 delle dispense si ottiene  $u(t) \leq z(t)$  per  $t > t_0$ , da cui la tesi. Per esercizio, si verifichi (utilizzando il Teorema del confronto o facendo un calcolo diretto) che la tesi vale anche in passato, cioè per  $t < t_0$ .

Grazie al Lemma di Gronwall è possibile ottenere un generalizzazione del Teorema 1.

**Teorema 5 (di dipendenza continua dai dati (II))** *Sia  $f : \Omega \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  continua e localmente lipschitziana (rispetto alle variabili  $y$ ). Dati  $(t_0, y_0), (t_0, z_0) \in \Omega$  allora*

$$(7) \quad \|y(t; y_0) - y(t; z_0)\| \leq e^{L|t-t_0|} \|y_0 - z_0\|,$$

per ogni  $t$  in un comune intervallo di definizione  $I_\delta$ , dove  $L$  è la costante di Lipschitz di  $f$  in un compatto che contiene entrambe le traiettorie. Inoltre è possibile prendere  $L, \delta$  uniformi per  $(t_0, y_0), (t_0, z_0)$  che variano in un compatto di  $\Omega$ .

**DIMOSTRAZIONE** Fissato un compatto  $K$  che contiene entrambe le traiettorie e detta  $L$  la costante di Lipschitz di  $f$  in  $K$ , operando come in (3), per ogni  $t \in I_\delta$  si ottiene

$$\|y(t; y_0) - y(t; z_0)\| \leq \|y_0 - z_0\| + L \left| \int_{t_0}^t \|y(s; y_0) - y(s; z_0)\| ds \right|.$$

Applicando il Lemma di Gronwall alla funzione  $v(t) = \|y(t; y_0) - y(t; z_0)\|$  con  $\alpha = \|y_0 - z_0\|$  e  $\beta = L$  si ottiene la tesi. La generalizzazione per dati che variano in un compatto di  $\Omega$  si ottiene analogamente alla dimostrazione del punto ii) del Teorema 1.  $\square$

Uno dei punti deboli dei Teoremi 1 e 5 è che permettono di confrontare le soluzioni solamente su un piccolo intorno di  $t_0$ , mentre le soluzioni in origine potrebbero essere definite su intervalli possibilmente molto grandi. Si confrontino questi risultati con quelli ottenuti nei Teoremi 10 e 11 dove le soluzioni vengono confrontate con una soluzione su un dominio compatto fissato a priori (si veda anche il Teorema 9.5 delle dispense).

**Esercizio 6** Generalizzare il teorema precedente al caso in cui anche  $t_0$  può variare; più precisamente, definiti  $C_{\alpha,R}(K)$  e  $M = M_K$  come nella dimostrazione del Teorema 12, si verifichi che esistono  $\delta, L > 0$  tali che

$$(8) \quad \|y(t; t_0, y_0) - y(t; t_1, y_1)\| \leq e^{L|t-t_0|} [M|t_0 - t_1| + \|y_0 - y_1\|].$$

**Esercizio 7** Utilizzando il Lemma di Gronwall, dimostrare il teorema di unicità delle soluzioni per i problemi di Cauchy associati a  $y' = f(t, y)$  nel caso in cui  $f$  sia localmente lipschitziana rispetto alle variabili  $y$ .

## Differenziabilità rispetto ai dati iniziali

Analogamente alla continuità, si può anche studiare la differenziabilità della mappa  $y_0 \mapsto y(\cdot; y_0)$ . Supponendo di aver già dimostrato la differenziabilità di tale mappa, derivando parzialmente l'equazione  $y' = f(t, y)$  rispetto alle variabili  $y_0$ , dovrà allora essere

$$D_{y_0} \left( \frac{d}{dt} y(t; y_0) \right) = D_{y_0} (f(t, y(t; y_0))) = D_y f(t, y(t; y_0)) D_{y_0} y(t; y_0).$$

Potendo scambiare l'ordine di derivazione si ottiene

$$\frac{d}{dt} (D_{y_0} y(t; y_0)) = D_y f(t, y(t; y_0)) D_{y_0} y(t; y_0),$$

ovvero l'applicazione  $D_{y_0} y(\cdot; y_0) : \mathbb{R} \rightarrow L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n) \simeq \mathcal{M}(n)$  è soluzione dell'equazione differenziale lineare in forma matriciale  $Y' = D_y f(t, y(t; y_0)) Y$ . Per quanto concerne il dato iniziale si ha

$$D_{y_0} (y(t_0; y_0)) = D_{y_0} y_0 = I,$$

dove  $I$  è l'identità. In effetti, si può dimostrare il seguente risultato.

**Teorema 8 (di differenziabilità rispetto ai dati)** *Sia  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ , con  $\Omega \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$  aperto, continua e con derivate parziali rispetto a  $y$  continue. Allora la mappa  $y_0 \mapsto y(t; y_0)$  è differenziabile e l'applicazione  $t \mapsto D_{y_0} y(t; y_0)$  da  $\mathbb{R}$  in  $\mathcal{M}(n)$  è la soluzione al tempo  $t$  del problema di Cauchy in forma matriciale*

$$(9) \quad \begin{cases} Y' = D_y f(t, y(t; y_0))Y \\ Y(t_0) = I, \end{cases}$$

dove  $y(t; y_0)$  è la soluzione di (1).

DIMOSTRAZIONE Omessa (si può ottenere mediante un'opportuna generalizzazione del Lemma di Gronwall).

## Dipendenza continua rispetto al campo vettoriale

Il Lemma di Gronwall permette anche di dimostrare un risultato di continuità delle soluzioni di un'equazione differenziale rispetto al campo vettoriale. Premettiamo il seguente risultato preliminare al risultato più generale dato dal Teorema 10.

**Teorema 9 (di Kamke)** *Siano  $f, g : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $\Omega \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$  aperto, funzioni continue e localmente lipschitziane rispetto alla variabile  $y$ . Fissati  $(t_0, y_0), (s_0, z_0) \in \Omega$ , sia  $y : I \rightarrow \mathbb{R}^n$  la soluzione in  $I = [t_0 - \delta_0, t_0 + \delta_0]$  del problema di Cauchy*

$$\begin{cases} y' = f(t, y) \\ y(t_0) = y_0, \end{cases}$$

e sia  $z : J \rightarrow \mathbb{R}^n$  la soluzione in  $J = [s_0 - \delta'_0, s_0 + \delta'_0]$  del problema di Cauchy

$$\begin{cases} z' = g(t, z) \\ z(s_0) = z_0. \end{cases}$$

Allora esistono costanti positive  $\varepsilon = \varepsilon(t_0, g)$ ,  $M = M_g(K)$ ,  $L = L_f(K)$ ,  $d = d(\delta_0, \delta'_0)$ , dove  $K \subset \Omega$  è un compatto che contiene le traiettorie di  $y(t)$  e  $z(t)$  ristrette a  $I \cap J$ , tali che se  $|t_0 - s_0| \leq \varepsilon$  si ha

$$(10) \quad \|y(t) - z(t)\| \leq [\|y_0 - z_0\| + M|t_0 - s_0| + d\|f - g\|_\infty] e^{L|t-t_0|},$$

per ogni  $t \in I \cap J$ , dove si è posto  $\|f - g\|_\infty := \max_{(\tau, x) \in K} \|f(\tau, x) - g(\tau, x)\|$ .

DIMOSTRAZIONE Fissati  $(t_0, y_0)$  e la relativa soluzione  $y(t)$  in  $I$ , se  $s_0$  è sufficientemente vicino a  $t_0$  si avrà  $s_0 \in I$  e  $t_0 \in J$ , in particolare l'intervallo di estremi  $t_0$  e  $s_0$  sarà contenuto in  $I \cap J$  che quindi sarà non vuoto. In realtà dobbiamo anche applicare il Teorema di Peano sui compatti per garantire l'esistenza di un intervallo di definizione comune per tutte le corrispondenti soluzioni  $z(t)$  al variare di  $(s_0, z_0)$  in un intorno compatto di  $(t_0, z_0)$ . Più precisamente, si prende  $\varepsilon$  uguale all' $\varepsilon_K$  del Teorema 12 relativo al compatto  $K = I \times \{z_0\}$  e alla funzione  $g$ .

Sia  $K$  un qualsiasi compatto contenuto in  $\Omega$  e contenente le traiettorie di  $y(t)$  e  $z(t)$  ristrette a  $I \cap J$  (per esempio si potrebbe prendere  $K$  proprio uguale all'unione di queste due traiettorie), si definiscano

$$M = M_g(K) := \max_{(s,z) \in K} \|g(s, z)\|, \quad d = d(\delta_0, \delta'_0) = \text{ampiezza di } I \cap J,$$

e sia  $L$  la costante di Lipschitz di  $f(t, \cdot)$  sul compatto  $K$ . Si ha

$$\begin{aligned} y(t) - z(t) &= y_0 + \int_{t_0}^t f(s, y(s)) ds - \left( z_0 + \int_{s_0}^t g(s, z(s)) ds \right) \\ &= y_0 - z_0 + \int_{t_0}^{s_0} g(s, z(s)) ds + \int_{t_0}^t (f(s, z(s)) - g(s, z(s))) ds + \\ &\quad + \int_{t_0}^t (f(s, y(s)) - f(s, z(s))) ds, \end{aligned}$$

da cui segue

$$\begin{aligned} &\|y(t) - z(t)\| \\ &\leq \|y_0 - z_0\| + \left| \int_{s_0}^{t_0} \|g(s, z(s))\| ds \right| + \left| \int_{t_0}^t \|f(s, z(s)) - g(s, z(s))\| ds \right| + \\ &\quad + \left| \int_{t_0}^t \|f(s, y(s)) - f(s, z(s))\| ds \right| \\ &\leq \|y_0 - z_0\| + M|t_0 - s_0| + d\|f - g\|_\infty + L \left| \int_{t_0}^t \|y(s) - z(s)\| ds \right|. \end{aligned}$$

A questo punto si può applicare il Lemma di Gronwall alla funzione  $v(t) = \|y(t) - z(t)\| : I \cap J \rightarrow \mathbb{R}$ , con  $\alpha = \|y_0 - z_0\| + M|t_0 - s_0| + d\|f - g\|_\infty$  e  $\beta = L$ , ottenendo (10).  $\square$

Dal Teorema di Kamke si deduce che la distanza tra le soluzioni di due problemi di Cauchy cresce al più esponenzialmente rispetto alla loro distanza iniziale misurata in termini della distanza tra i dati iniziali e tra i campi vettoriali. Come corollario si dimostra il seguente risultato.

**Teorema 10 (di Kamke, di dipendenza continua dai dati (III))**

Siano date  $f, f_k : \Omega \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $k = 1, 2, \dots$ , continue e localmente lipschitziane rispetto alla variabile  $y$ , e siano dati  $(t_k, y_k) \in \Omega$  per  $k \in \mathbb{N}$ . Denotiamo con  $y(t)$  la soluzione nell'intervallo chiuso e limitato  $I$  del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = f(t, y) \\ y(t_0) = y_0. \end{cases}$$

Se  $(t_k, y_k) \rightarrow (t_0, y_0)$  e  $f_k \rightarrow f$  per  $k \rightarrow +\infty$  uniformemente sui compatti di  $\Omega$ , detta  $y_k(t)$  la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = f_k(t, y) \\ y(t_k) = y_k, \end{cases}$$

definitivamente per  $k \geq \bar{k}$  la funzione  $y_k(t)$  può essere definita in  $I$  e si ha  $y_k(t) \rightarrow y(t)$  per  $k \rightarrow +\infty$  uniformemente in  $I$ .

**DIMOSTRAZIONE** La parte complicata del teorema sta nel dimostrare che definitivamente per  $k \geq \bar{k}$  le soluzioni  $y_k(t)$  possono essere definite in  $I$  e, volendo applicare il Teorema 9, nel verificare che le costanti  $M, d, L$  possono essere scelte in maniera uniforme (per esempio ciò accade se le traiettorie delle  $y_k$  sono definitivamente contenute in un intorno compatto della traiettoria di  $y$ ). Una volta provato ciò il risultato discende banalmente da (10) essendo

$$(11) \quad \|y(t) - y_k(t)\| \leq [\|y_0 - y_k\| + M|t_0 - t_k| + d\|f - f_k\|_\infty] e^{L|t-t_0|},$$

per  $t \in I$ , e per  $k \rightarrow +\infty$  si ottiene la tesi. Per i dettagli si vedano gli approfondimenti in coda al capitolo.  $\square$

Esistono generalizzazioni di questi teoremi al caso di campi vettoriali non necessariamente lipschitziani, una delle quali è presentata nel seguito.

**Teorema 11 (di Kamke, di dipendenza continua dai dati (IV))**

Siano date  $f, f_k : \Omega \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  continue,  $k = 1, 2, \dots$ , e punti  $(t_k, y_k) \in \Omega$  per  $k \in \mathbb{N}$ . Supponiamo che il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = f(t, y) \\ y(t_0) = y_0, \end{cases}$$

abbia un'unica soluzione  $y(t)$  nell'intervallo chiuso e limitato  $I$ . Se  $(t_k, y_k) \rightarrow (t_0, y_0)$  e  $f_k \rightarrow f$  per  $k \rightarrow +\infty$  uniformemente sui compatti di  $\Omega$ , detta  $y_k(t)$

una qualsiasi soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = f_k(t, y) \\ y(t_k) = y_k, \end{cases}$$

allora, definitivamente per  $k \geq \bar{k}$ , la funzione  $y_k(t)$  può essere definita in  $I$  e si ha  $y_k(t) \rightarrow y(t)$  per  $k \rightarrow +\infty$  uniformemente su  $I$ .

DIMOSTRAZIONE Omessa.

## Approfondimenti

### Il Teorema di Peano, sui compatti

Il seguente teorema asserisce che l'ampiezza dell'intervallo di esistenza di una soluzione può essere presa uniforme se il dato iniziale varia in un compatto.

**Teorema 12 (di Peano, sui compatti)** Sia  $\Omega \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$  aperto e sia  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$  continua. Fissato  $K \subset \Omega$  esiste  $\varepsilon = \varepsilon_K > 0$ , dipendente solo da  $K$ , tale che per ogni  $(t_0, y_0) \in K$  ogni soluzione massimale  $y(t)$  del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = f(t, y) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

è definita almeno sull'intervallo  $[t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon]$ .

DIMOSTRAZIONE Fissato un compatto  $K \subset \Omega$ , si possono trovare  $\alpha, R > 0$  tali che

$$(12) \quad C_{\alpha, R}(K) := \bigcup_{(t, y) \in K} C_{\alpha, R}(t, y)$$

sia un compatto contenuto in  $\Omega$  (verificarlo per esercizio). Posto  $M_K = \max\{\|f(s, z)\| : (s, z) \in C_{\alpha, R}(K)\}$  sia infine  $\varepsilon_K := \min\{\alpha, R/M_K\}$ . Preso un qualsiasi  $(t_0, y_0) \in K$ , per costruzione si ha  $C_{\alpha, R}(t_0, y_0) \subseteq C_{\alpha, R}(K) \subset \Omega$ , da cui  $M := \max\{\|f(s, z)\| : (s, z) \in C_{\alpha, R}(t_0, y_0)\} \leq M_K$  e anche  $\varepsilon := \{\alpha, R/M\} \geq \varepsilon_K$ . Il Teorema di Peano e il Lemma 3.19 delle dispense garantiscono che ogni soluzione massimale del problema di Cauchy  $y' = f(t, y)$ ,  $y(t_0) = y_0$  sia definita almeno in  $I_\varepsilon(t_0)$  e a maggior ragione in  $I_{\varepsilon_K}(t_0)$ .  $\square$

**Dimostrazione del Teorema 5 di dipendenza continua dai dati (III)**

L'idea della dimostrazione è la seguente: si proverà che per  $t_k, y_k, f_k$  sufficientemente vicini a  $t_0, y_0, f$ , vale la disuguaglianza (11) in un intorno di  $t_0$ , da cui seguirà che, ristrette a tale intorno, le traiettorie delle  $y_k$  sono contenute in un intorno compatto della traiettoria di  $y$ . Inoltre, dimostreremo che se le traiettorie delle  $y_k$  sono contenute in un intorno compatto della traiettoria di  $y$  fino al tempo  $t$ , allora vale (11) in un intorno di  $t$ . Ciò permetterà di concludere che (11) vale per ogni  $t \in I$  e che le traiettorie delle  $y_k$  ristrette a  $t$  sono contenute in un intorno compatto della traiettoria di  $y$  (sembra un ragionamento circolare, ma non lo è!).

Posto  $I = [a, b]$ , poniamo per brevità  $\rho = b - a$  e, come nella dimostrazione del Teorema di Peano sui compatti, prendiamo  $\alpha, R > 0$  tali che  $K_1 := C_{\alpha, R}(K)$  sia contenuto in  $\Omega$ , dove  $K = \mathcal{T}_y$  è la traiettoria di  $y$  in  $I$ . Definiamo

$$M := \max_{(s,x) \in K_1} \|f(s,x)\|, \quad M_k := \max_{(s,x) \in K_1} \|f_k(s,x)\|, \quad k = 1, 2, \dots$$

Per ipotesi  $f_k \rightarrow f$  uniformemente in  $K_1$ , quindi esiste  $\bar{k}$  tale che definitivamente per  $k \geq \bar{k}$  si ha

$$M_k \leq \max_{(s,x) \in K_1} \|f(s,x)\| + \max_{(s,x) \in K_1} \|f_k(s,x) - f(s,x)\| \leq (M + 1).$$

Preso  $\delta = \min\{\alpha, R/(M + 1)\}$  si ha che tutte le soluzioni di  $y' = f_k(t, y)$  con dati iniziali  $(t_k, y_k) \in C_{\alpha/2, R/2}(K)$  sono definite almeno in un intorno di  $t_k$  di ampiezza  $\delta/2$ . Essendo  $t_k \rightarrow t_0, y_k \rightarrow y_0$ , eventualmente aumentando  $\bar{k}$  possiamo assumere che  $|t_k - t_0| \leq \delta/2$  (in modo tale che  $y_k(t)$  sia definita in  $t_0$ ),  $\|y_k - y_0\| \leq R/2$  e anche

$$(13) \quad [ \|y_k - y_0\| + (M + 1)|t_k - t_0| + \rho \|f_k - f\|_\infty ] e^{L\rho} \leq R.$$

Dimostriamo che per ogni  $k \geq \bar{k}$  la funzione  $y_k$  è definita in  $I$  e ivi soddisfa  $\|y_k(t) - y(t)\| \leq R$ . Questa è essenzialmente una *stima a priori*: se è vera allora  $(t, y_k(t)) \in K_1$  per ogni  $t$  e si può utilizzare (10) per ottenere

$$(14) \quad \begin{aligned} \|y_k(t) - y(t)\| &\leq [ \|y_k - y_0\| + M_k |t_k - t_0| + \rho \|f_k - f\|_\infty ] e^{L|t-t_0|} \\ &\leq [ \|y_k - y_0\| + (M + 1)|t_k - t_0| + \rho \|f_k - f\|_\infty ] e^{L|t-t_0|}. \end{aligned}$$

Il secondo membro si maggiora con (13) da cui  $\|y_k(t) - y(t)\| \leq R$ . In un certo senso si è dimostrato che finché  $\|y_k(t) - y(t)\| \leq R$  è vera allora...  $\|y_k(t) -$

$y(t)\| \leq R$  è vera (e di conseguenza vale (14))! Siccome è vera in  $t_0$  allora è sempre vera. Vediamo ora i dettagli che dimostrano la validità di questo ragionamento, apparentemente circolare.

Per  $k \geq \bar{k}$  si ha  $C_{\delta/2, R/2}(t_k, y_k) \subset C_{\delta, R}(t_0, y_0) \subset K_1$ . Poiché per il Lemma 2.8 delle dispense le traiettorie di  $y_k(t)$  non possono uscire da un cilindro di sicurezza centrato in  $(t_k, y_k)$  allora sono contenute in  $K_1$  almeno per  $|t - t_k| \leq \delta/2$ , perciò vale la disuguaglianza (14) per  $t = t_0$ . Se ora tale disuguaglianza vale per ogni  $t \in [t_0, \tau]$  con  $t_0 \leq \tau < b$  allora per (14) e (13) si ha  $\|y_k(\tau) - y(\tau)\| < R$ , essendo  $|\tau - t_0| < \rho$ . Il punto  $(\tau, y_k(\tau))$  è allora contenuto all'interno del compatto  $K_1$  ed è quindi possibile costruire un cilindro di sicurezza con centro tale punto e ancora contenuto in  $K_1$ . Ne consegue che  $y_k(t)$  è definita almeno in un intorno (destro) di  $\tau$  con traiettoria contenuta in  $K_1$ . Si può quindi estendere il ragionamento per concludere che (14) vale anche in un intorno di  $\tau$ . In maniera analoga si ragiona per  $a < \tau \leq t_0$ . In definitiva, detto  $I(t_0, \tau)$  l'intervallo di estremi  $t_0$  e  $\tau$ , e posto

$$J_k := \{\tau \in I : y_k \text{ è definita in } I(t_0, \tau) \text{ e vale (14)} \forall t \in I(t_0, \tau)\}$$

si è dimostrato che  $J_k$  è un sottoinsieme chiuso (banale), aperto e non vuoto di  $I$ , dunque per connessione  $J_k = I$ . Infine da (14)-(13) segue che

$$\max_{t \in I} \|y_k(t) - y(t)\| \leq [\|y_k - y_0\| + (M + 1)|t_k - t_0| + \rho \|f_k - f\|_\infty] e^{L\rho}$$

per ogni  $k \geq \bar{k}$ , e passando al limite per  $k \rightarrow +\infty$  si ha la tesi.  $\square$