



Facoltà di Scienze Matematiche, Fisiche e Naturali
Corso di Laurea in Matematica

EQUAZIONI DIFFERENZIALI

Appello del 3 settembre 2013

N.B.: scrivere nome, cognome e numero di matricola su ogni foglio consegnato. È ammesso l'utilizzo degli appunti del corso. Tempo a disposizione: 3 ore

1 Data l'equazione differenziale $y' = \frac{t^2 y - 1}{y^3}$

- studiare l'esistenza e l'unicità locale delle soluzioni nel dominio $\Omega = \{(t, y) : y > 0\}$. Verificare che non valgono le ipotesi dei teoremi di esistenza globale. Trovare le eventuali soluzioni costanti, le regioni dove le soluzioni sono crescenti/decrescenti e rappresentarle nel piano $t - y$;
- dimostrare che non esistono soluzioni massimali che esplodono all'infinito in tempo finito;
- verificare che ogni soluzione massimale $y(t)$ è globalmente definita in passato e studiare l'esistenza e l'eventuale valore del limite di $y(t)$ per $t \rightarrow -\infty$;
- provare che tutte le soluzioni con dati iniziali $y(t_0) = y_0$ dove $t_0 > 0$ e $y_0 \geq 1/t_0^2$ sono globalmente definite e monotone crescenti in futuro. Studiare il limite di $y(t)$ per $t \rightarrow +\infty$;
- dimostrare che esistono soluzioni massimali $y :]-\infty, \beta[\rightarrow \mathbb{R}$ che non sono globalmente definite in futuro. Qual è eventualmente il valore del limite di $y(t)$ per $t \rightarrow \beta^-$?
- Dimostrare che tutte le soluzioni globalmente definite in futuro sono sublineari;
- provare che tutte le soluzioni $y(t)$ relative al punto d) verificano $\lim_{t \rightarrow +\infty} (y(t) - t) = 0$.

(Suggerimento: in alcuni punti potrebbe risultare utile applicare opportunamente il teorema del confronto)

2 Risolvere il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = Ay \\ y(1) = (1, 2, 2) \end{cases}$$

dove

$$A := \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

3 Data l'equazione del secondo ordine $y'' = g(y)$ con g funzione lipschitziana

- verificare che i relativi problemi di Cauchy ammettono esistenza e unicità locale e che le funzioni costantemente uguali agli eventuali zeri di g sono soluzioni;
- supposto che g abbia un unico zero $\bar{y}$, provare o confutare che se $y(t)$ è una soluzione con $y(t_0) \neq \bar{y}$ per qualche t_0 allora $y(t) \neq \bar{y}$ per ogni t di definizione.

Punteggi indicativi: 4+3+5+5+6+6+10, 8, 3+4