



Facoltà di Scienze Matematiche, Fisiche e Naturali
Corso di Laurea in Matematica

EQUAZIONI DIFFERENZIALI

Appello del 18 luglio 2013

N.B.: scrivere nome, cognome e numero di matricola su ogni foglio consegnato. È ammesso l'utilizzo degli appunti del corso. Tempo a disposizione: 3 ore

1 Data l'equazione differenziale $y' = \frac{\ln(ty)}{t^2}$

- studiare l'esistenza e l'unicità locale delle soluzioni nel dominio $\Omega = \{(t, y) : t, y > 0\}$. Verificare che non valgono le ipotesi dei teoremi di esistenza globale. Trovare le eventuali soluzioni costanti, le regioni dove le soluzioni sono crescenti/decrescenti e rappresentarle nel piano $t - y$;
- dimostrare che esiste un unico $\bar{y} \in]0, 1[$ tale che la funzione $\bar{y}(t) = \bar{y}/t$ è soluzione dell'equazione;
- provare che tutte le soluzioni sono globalmente definite in passato e studiare il loro comportamento per $t \rightarrow \alpha^+$;
- fissato ora il dato iniziale $y(1) = y_1 > \bar{y}$, provare che la relativa soluzione è globalmente definita in futuro. Cosa si può dire se $y_1 < \bar{y}$? Esistono soluzioni non globalmente definite in futuro?
- Nel caso $y_1 > \bar{y}$, dimostrare che $\lim_{t \rightarrow +\infty} y(t)$ esiste finito (Suggerimento: dimostrare che definitivamente $y(t) \leq ct$ per qualche $c > 0$ e utilizzare questa disuguaglianza nell'equazione differenziale per ottenere la tesi).
- Operare un opportuno cambiamento di variabile e integrare l'equazione ottenuta al fine di calcolare una forma chiusa per la generica soluzione. Utilizzare quest'ultima per studiare l'intervallo massimale d'esistenza $] \alpha, \beta[$ e il comportamento agli estremi α, β .

(Suggerimento: in c-d-e) potrebbe risultare utile applicare il teorema del confronto a opportune sopra/sottosoluzioni.)

2 Data l'equazione differenziale $y'' + a(t)y' + b(t)y = 0$ dove $a, b \in C^1(I)$ e $I \subseteq]0, +\infty[$ è un intervallo

- discutere l'esistenza locale/globale e l'unicità delle soluzioni individuando anche l'intervallo massimale di esistenza;
- determinare condizioni necessarie su a, b affinché l'equazione ammetta due soluzioni della forma $y_1(t)$ e $y_2(t) = t^2 y_1(t)$ con y_1 mai nulla; nel qual caso trovare anche l'espressione di y_1 in funzione di a e b (Suggerimento: imporre la condizione di essere soluzioni, trovare prima una formula per y_1 in funzione di a, b , poi imporre che y_1 sia soluzione per trovare una relazione che legghi a e b). Tali condizioni sono anche sufficienti?
- Verificare che y_1 e y_2 sono linearmente indipendenti e utilizzare b) per risolvere esplicitamente il problema di Cauchy in $I =]0, +\infty[$

$$\begin{cases} 4t^2 y'' + 4t^2 y' + (t^2 - 3)y = 0 \\ y(1) = 3, y'(1) = 1. \end{cases} \quad (1)$$

- Alternativamente, posto $z(t) = \sqrt{t} e^{t/2} y(t)$, trovare l'equazione differenziale di ordine 2 soddisfatta da z . Di che tipo di equazione si tratta? Risolverla per riottenere la soluzione di (1).
- Fare l'analogo di d) ma con la trasformazione delle variabili sia dipendente che indipendente $(t, y(t)) \mapsto (s, v(s))$ dove $s = \ln t$ (cioè $t = e^s$) e $v(s) = \exp[(s + e^s)/2] y(e^s)$. Verificare che $v(s)$ soddisfa un'equazione differenziale lineare del secondo ordine a coefficienti costanti e risolverla per ottenere nuovamente la soluzione di (1).