



Facoltà di Scienze Matematiche, Fisiche e Naturali  
Corso di Laurea in Matematica

## EQUAZIONI DIFFERENZIALI

Appello del 1 luglio 2013

N.B.: scrivere nome, cognome e numero di matricola su ogni foglio consegnato. È ammesso l'utilizzo degli appunti del corso. Tempo a disposizione: 3 ore

**1** Dato il sistema di equazioni differenziali

$$\begin{cases} x' = -yz^2 \\ y' = x(x^2 + y^2 + z^2) \\ z' = xyz \end{cases}$$

- studiare l'esistenza e l'unicità locale delle soluzioni e individuare gli equilibri del sistema. Valgono anche le ipotesi dei teoremi di esistenza globale?
- Dimostrare che se  $(x(t), y(t), z(t))$  è soluzione,  $(x(-t), -y(-t), \pm z(-t))$  e  $(-x(t), -y(t), \pm z(t))$  sono ancora soluzioni;
- verificare che le due funzioni  $E_1(x, y, z) = \frac{z^2}{x^2 + y^2}$  e  $E_2(x, y, z) = x^2 + z^2$ , ove definite, sono integrali primi del sistema. Dare l'interpretazione geometrica degli insiemi di livello di  $E_1$  e  $E_2$  e dire se sono insiemi limitati oppure no;
- utilizzare il punto precedente per studiare l'intervallo massimale di esistenza delle soluzioni e la loro eventuale esistenza globale;
- dimostrare che tutte le orbite non banali o sono rettilinee oppure sono periodiche; nel primo caso calcolare esplicitamente le soluzioni e determinare il loro intervallo massimale di esistenza;
- calcolare il periodo di oscillazione della soluzione relativa al dato iniziale  $(1, 0, 1)$ . (Suggerimento: trovare un'equazione differenziale scalare per la componente  $x(t)$  della soluzione, poi utilizzare opportunamente il metodo di separazione delle variabili e la sostituzione  $s = x/\sqrt{2(1-x^2)}$ .)

**2** Data il problema di Cauchy  $y' = 2\sqrt{|y|}$ ,  $y(0) = y_0$ , calcolare le soluzioni  $y(t)$  strettamente positive con i seguenti due metodi

- operare la sostituzione  $y = z^2$ , trovare un'equazione per  $z$  e integrarla; oppure
- dopo aver dimostrato che  $y \in C^2$ , differenziare l'equazione per ottenere una nuovo problema di Cauchy per un'equazione di ordine 2. Integrare quest'ultima due volte per ottenere la soluzione.

Giustificare la validità delle argomentazioni utilizzate in a)-b).

**3** Trovare la generica soluzione dell'equazione  $y' = Ay$  dove

$$A := \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -2 & -3 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$